TRANSFERENCIA DE CALOR, CAPÍTULO 3
J. P. HOLMAN



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

CAPITULO 3

CONDUCCION EN ESTADO ESTABLE: DOS DIMENSIONES

3-1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior, la transferencia de calor en estado estable se calculó en sistemas en donde el gradiente de temperatura y el área se podían expresar en términos de una coordenada en el espacio. Ahora deseamos analizar el caso más general de **flujo de calor** en dos dimensiones. Para estado estable, la ecuación de Laplace se aplica:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{3-1}$$

suponiendo conductividad térmica constante. La solución a esta ecuación puede obtenerse mediante técnicas analíticas, numéricas, o gráficas.

El objetivo de cualquier análisis de transferencia de calor es, generalmente, predecir el flujo de calor o la temperatura que resulta de cierto flujo de calor. La solución a la Ec. (3-1) dará la temperatura en un cuerpo en dos dimensiones, como función de las dos coordenadas independientes en el espacio x y y. Entonces, el flujo de calor en las direcciones x y y pueden calcularse de las ecuaciones de Fourier

$$q_x = -kA_x \frac{\partial T}{\partial x} \tag{3-2}$$

$$q_y = -kA_y \frac{\partial T}{\partial y} \tag{3-3}$$

Esas cantidades de flujo de calor están dirigidas, ya sea en la dirección x o en la dirección y. El flujo de calor total en cualquier punto

Librodot

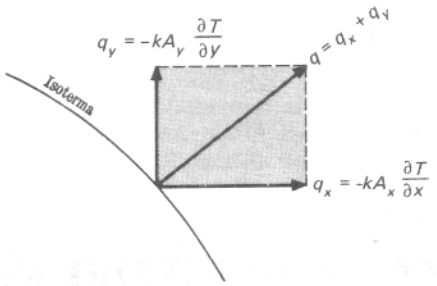


FIG. 3-1. Esquema mostrando el flujo de calor en dos dimensiones

del material es el resultante de las q_x y q_y en ese punto. Así, el vector de flujo de calor total está dirigido de tal manera que es perpendicular a las líneas de temperatura constante en el material, como se muestra en la Fig. 3-1. Así que si la distribución de temperatura en éste se conoce, fácilmente podemos establecer el flujo de calor.

3-2 ANALISIS MATEMATICO DE CONDUCCION DE CALOR BIDIMENSIONAL

Primero consideraremos una aproximación analítica a un problema en dos dimensiones y luego indicaremos los métodos numérico y gráfico que pueden usarse con ventaja en muchos otros problemas. Es importante mencionar que las soluciones analíticas no siempre son posibles de obtener y, de hecho, en muchas situaciones son tediosas y difíciles de usar. En esos casos, las técnicas numéricas son frecuentemente usadas con gran ventaja. Para un tratado más extenso de los métodos analíticos usados en problemas de conducción se refiere al lector a los libros de Carslaw y Jaeger [1], Schneider [2], Arpaci [13] y Ozisik [12].

Considérese la placa rectangular mostrada en la Fig. 3-2. Tres lados de la placa se mantienen a la temperatura constante T_1, y el lado superior tiene impuesta alguna distribución de temperatura. Esta distribución puede ser simplemente una temperatura constante o alguna más compleja, tal como una distribución de onda senoidal. Consideraremos ambos casos.

Para resolver la Ec. (3-1) se usa el método de separación de variables. El punto esencial de este método es que la solución a la ecuación diferencial se supone como un producto de la forma

$$T = XY \tag{3-4}$$

donde

$$X = X(x)$$

y

$$Y = Y(y)$$

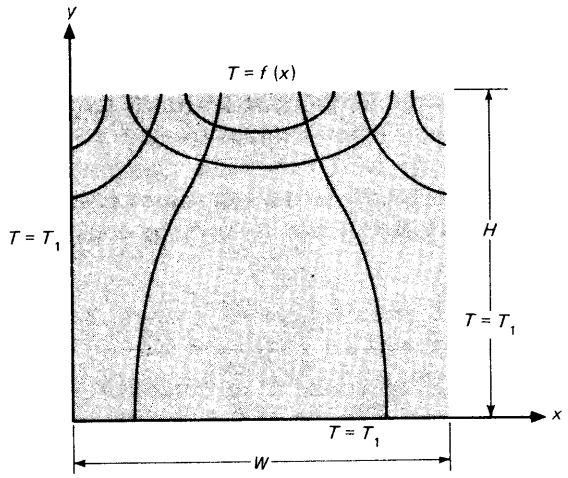


FIG. 3-2. Líneas isotérmicas y de flujo de calor en una placa rectangular

Las condiciones de frontera son entonces aplicadas para determinar la forma de las funciones X y Y. La suposición básica dada en la Ec. (3-4) puede justificarse *únicamente* si es posible encontrar una solución de esta forma que satisfaga las condiciones de frontera.

Primero considérense las condiciones de frontera con una distribución de temperatura de onda senoidal impuesta en el lado superior de la placa. Así

$$\begin{aligned} T &= T_1 && \text{en } y = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = 0 \\ T &= T_1 && \text{en } x = W \\ T &= T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} + T_1 && \text{en } y = H \end{aligned} \tag{3-5}$$

donde T_m es la amplitud de la función seno. Sustituyendo la Ec. (3-4) en la (3-1),

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \tag{3-6}$$

Obsérvese que cada lado de la Ec. (3-6) es independiente del otro, ya que x y y son variables independientes. Esto requiere que cada lado sea igual a alguna constante. Así podemos obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias en términos de esta constante.

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \tag{3-7}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \tag{3-8}$$

Librodot

donde λ^2 se llama la constante de separación y su valor debe ser determinado de las condiciones de frontera. Nótese que la forma de la solución a las Ecs. (3-7) y (3-8) dependerá del signo de λ^2; una forma diferente resultaría también si λ^2 fuera igual a cero. La única manera en que puede determinarse la forma correcta, es a través de una aplicación de las condiciones de frontera del problema. Así que escribiremos primero todas las soluciones posibles y entonces veremos cuál se ajusta al problema bajo consideración.

Para $\lambda^2 = 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_1 + C_2 x \\ Y &= C_3 + C_4 y \\ T &= (C_1 + C_2 x)(C_3 + C_4 y) \end{aligned} \tag{3-9}$$

Esta función no puede ajustarse a la condición de frontera de la función seno, así que la solución $\lambda^2 = 0$ puede ser excluida.

Para $\lambda^2 < 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x} \\ Y &= C_7 \cos \lambda y + C_8 \operatorname{sen} \lambda y \\ T &= (C_5 e^{-\lambda x} + C_6 e^{\lambda x})(C_7 \cos \lambda y + C_8 \operatorname{sen} \lambda y) \end{aligned} \tag{3-10}$$

De nuevo, la condición de frontera de la función seno no puede satisfacerse, y esta solución se excluye también.

Para $\lambda^2 > 0$:

$$\begin{aligned} X &= C_9 \cos \lambda x + C_{10} \operatorname{sen} \lambda x \\ Y &= C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y} \\ T &= (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \operatorname{sen} \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \end{aligned} \tag{3-11}$$

Ahora es posible satisfacer la condición de frontera de la función seno; así que intentaremos hacerlo también con las otras condiciones. El álgebra es algo más fácil de manipular cuando se hace la sustitución

$$\theta = T - T_1$$

La ecuación diferencial y la solución retienen la misma forma con la nueva variable θ, y necesitamos únicamente transformar las condiciones de frontera. Así

$$\begin{aligned} \theta &= 0 && \text{en } y = 0 \\ \theta &= 0 && \text{en } x = 0 \\ \theta &= 0 && \text{en } x = W \\ \theta &= T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} && \text{en } y = H \end{aligned} \tag{3-12}$$

Aplicando esas condiciones,

$$0 = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \operatorname{sen} \lambda x)(C_{11} + C_{12}) \tag{a}$$

$$0 = C_9 (C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \tag{b}$$

$$0 = (C_9 \cos \lambda W + C_{10} \operatorname{sen} \lambda W)(C_{11} e^{-\lambda y} + C_{12} e^{\lambda y}) \tag{c}$$

$$T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} = (C_9 \cos \lambda x + C_{10} \operatorname{sen} \lambda x)(C_{11} e^{-\lambda H} + C_{12} e^{\lambda H})$$

Librodot

Por consiguiente, $C_{11} = -C_{12}$

$C_9 = 0$

y de (c), $0 = C_{10}C_{12}\operatorname{sen} \lambda W(e^{\lambda y} - e^{-\lambda y})$

Esto requiere que

$$\operatorname{sen} \lambda W = 0 \tag{3-13}$$

Se recordará que λ fue una constante de separación indeterminada. Existen varios valores que satisfacen la Ec. (3-13), y éstos pueden ser escritos como

$$\lambda = \frac{n\pi}{W} \tag{3-14}$$

donde n es un entero. La solución de la ecuación diferencial puede, por consiguiente, escribirse como una suma de las soluciones para cada valor de n. Esta es una suma infinita, de tal manera que la solución final es la serie infinita

$$\theta = T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{W} \tag{3-15}$$

donde las constantes han sido combinadas y los términos exponenciales convertidos a la función hiperbólica. La condición de frontera final puede aplicarse ahora.

$$T_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{W} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi H}{W}$$

la cual requiere que $C_n = 0$ para $n > 1$. La solución final es, por lo tanto,

$$T = T_m \frac{\operatorname{senh} (\pi y/W)}{\operatorname{senh} (\pi H/W)} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{W}\right) + T_1 \tag{3-16}$$

El campo de temperatura para este problema se muestra en la Fig. 3-2. Note que las líneas de flujo de calor son perpendiculares a las isotermas.

Consideremos ahora el conjunto de condiciones de frontera

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{en } y = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{en } x = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{en } x = W \\ T &= T_2 \quad \text{en } y = H \end{aligned}$$

Usando las primeras tres condiciones de frontera, se obtiene la solución en la forma de la Ec. (3-15).

$$T - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{W} \tag{3-17}$$

Librodot

Aplicando la cuarta condición de frontera,

$$T_2 - T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \operatorname{senh} \frac{n\pi H}{W} \tag{3-18}$$

Esta es una serie de Fourier senoidal, y los valores de las C_n pueden determinarse expandiendo la diferencia de temperatura constante $T_2 - T_1$ en una serie de Fourier sobre el intervalo $0 < x < W$. Esta serie es

$$T_2 - T_1 = (T_2 - T_1) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \tag{3-19}$$

Comparando la Ec. (3-18) con la Ec. (3-19), se encuentra que

$$C_n = \frac{2}{\pi} (T_2 - T_1) \frac{1}{\operatorname{senh} (n\pi H/W)} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}$$

y la solución final se expresa como

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{W} \frac{\operatorname{senh} (n\pi y/W)}{\operatorname{senh} (n\pi H/W)} \tag{3-20}$$

Un estudio extenso de técnicas analíticas usadas en transferencia de calor por conducción requiere un conocimiento de teoría de funciones ortogonales. Las series de Fourier son un ejemplo de funciones ortogonales, como son las funciones de Bessel y otras funciones especiales aplicables a geometrías y condiciones de frontera diferentes. Para mayor información sobre la materia, el lector interesado puede consultar uno o más textos de transferencia de calor por conducción de los listados en las referencias.

3-3 ANALISIS GRAFICO

Considérese el sistema bidimensional mostrado en la Fig. 3-3. La superficie interior se mantiene a una temperatura T_1, y la exterior se mantiene a T_2. Deseamos calcular la transferencia de calor. Las líneas isotermas y de flujo de calor se muestran esquemáticamente para ayudar en este cálculo. Las líneas de isotermas y de flujo de calor forman agrupamientos de figuras curvilíneas, como la que se muestra en la Fig. 3-3*b*. El flujo de calor a través de esta sección curvilínea está dado por la ley de Fourier, suponiendo profundidad unitaria de material.

$$q = -k \Delta x \, (1) \frac{\Delta T}{\Delta y} \tag{3-21}$$

Librodot

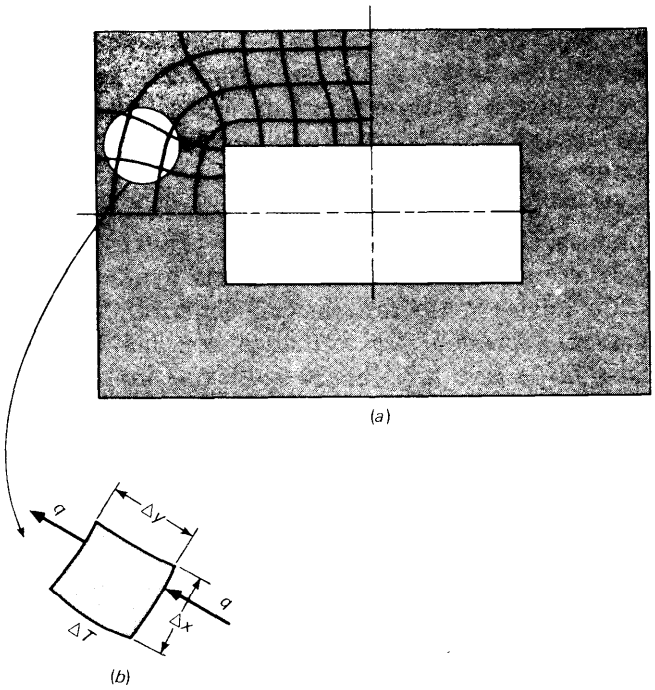


FIG. 3-3. Esquema mostrando el elemento usado para análisis de cuadros curvos de flujo de calor bidimensional

Este flujo de calor será el mismo a través de todo el ducto correspondiente, y el calor total será igual a la suma de todos ellos. Si se dibuja la gráfica de modo que $\Delta x = \Delta y$, el flujo de calor es proporcional a la ΔT a través del elemento y, como este flujo de calor es constante, la ΔT a través de cada elemento debe ser la misma dentro del mismo ducto de flujo de calor. Así, la ΔT a través de un elemento se da por

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{\text{total}}}{N}$$

donde N es el número de incrementos de temperatura entre las superficies interior y exterior. Más aún, el flujo de calor a través de cada ducto es el mismo, pues es independiente de las dimensiones Δx y Δy cuando se construyen iguales. En consecuencia, escribimos para la transferencia de calor total

$$q = \frac{M}{N} k \, \Delta T_{\text{total}} = \frac{M}{N} k(T_2 - T_1) \qquad (3\text{-}22)$$

Librodot

donde M es el número de ductos de flujo de calor. Así, para calcular la transferencia de calor necesitamos únicamente construir esas gráficas de cuadros curvos y contar el número de incrementos de temperatura y ductos de flujo de calor. Debe tenerse cuidado para construir la gráfica de tal manera que $\Delta x \approx \Delta y$, y que las líneas sean perpendiculares.

La exactitud de este método depende totalmente de la habilidad de la persona para graficar las curvilíneas cuadradas. Sin embargo, aun una gráfica burda puede con frecuencia ayudar a dar una buena estimación de las temperaturas que ocurrirán en un cuerpo; y esas estimaciones pueden ser refinadas con las técnicas numéricas discutidas en la Sec. 3-5. Puede emplearse una analogía eléctrica para graficar las curvilíneas cuadradas como se discutirá en la Sec. 3-6.

3-4 EL FACTOR DE FORMA EN CONDUCCION

En un sistema bidimensional donde únicamente dos temperaturas límites son involucradas, podemos definir un factor de forma de conducción S tal que

$$q = kS\,\Delta T_{\text{total}} \tag{3-23}$$

Los valores de S han sido obtenidos para algunas geometrías, y éstos se encuentran resumidos en la Tabla 3-1.

Para una pared tridimensional, como en un horno, se usan factores de forma separados para calcular el flujo de calor a través

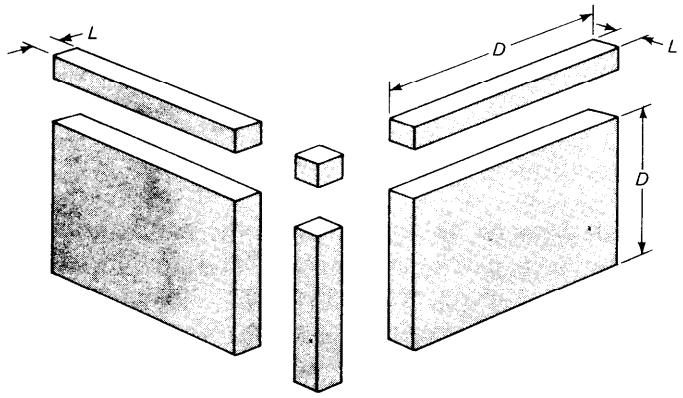


FIG. 3-4. Gráfica que ilustra dimensiones para uso en el cálculo de factores de forma tridimensionales

Librodot

de los extremos y esquinas. Cuando todas las dimensiones interiores son mayores que un quinto del espesor de la pared,

$$S_{\text{pared}} = \frac{A}{L}$$
$$S_{\text{extremo}} = 0.54D$$
$$S_{\text{esquina}} = 0.15L$$

donde A = área de la pared
L = espesor de la pared
D = longitud del extremo

Esas dimensiones se ilustran en la Fig. 3-4. Nótese que el factor de forma por unidad de profundidad está dado por la razón M/N cuando se usa el método de cuadros curvos en el cálculo. El uso del factor de forma para propósitos de cálculo se ilustra en los ejemplos 3-1 y 3-2.

Ejemplo 3-1. Una tubería horizontal de 6 plg de diámetro y 6 pies de longitud se entierra a una profundidad de 6 plg. La temperatura en la pared del tubo es de 150°F y la temperatura de la superficie de la tierra es de 42°F. Suponiendo que la conductividad térmica de la tierra es de 0.5 Btu/hr-pie-°F, calcúlese el calor perdido por el tubo.

Solución. Podemos calcular el factor de forma para esta situación usando la ecuación dada en la Tabla 3-1. Ya que $D < 3r$,

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)} = \frac{2\pi(6)}{\cosh^{-1}(\frac{6}{3})} = 28.5$$

El flujo de calor se calcula de

$$q = kS\,\Delta T = (0.5)(28.5)(150 - 42) = 1\,540 \text{ Btu/hr} \qquad (451 \text{ W})$$

Ejemplo 3-2. Se construye un horno cúbico pequeño de 1 por 1 por 1 pies de interior de ladrillo refractario (k = 0.6 Btu/hr-pie-°F) con un espesor de pared de 4 plg. El interior del horno se mantiene a 800°F y el exterior a 100°F. Calcúlese el calor perdido a través de las paredes.

Solución. Calculamos el factor de forma total sumando los factores de forma de las paredes, extremos y esquinas.

Paredes: $S = \frac{A}{L} = \frac{(1)(1)}{\frac{4}{12}} = 3$

Extremos: $S = 0.54D = 0.54(1) = 0.54$

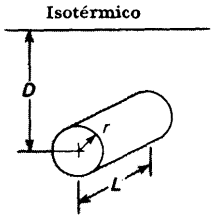
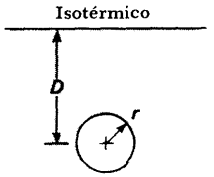
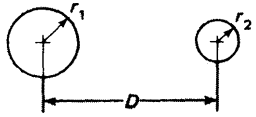
Esquinas: $S = 0.15L = 0.15 \times \frac{4}{12} = 0.05$

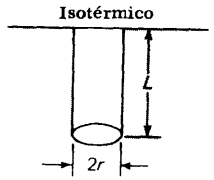
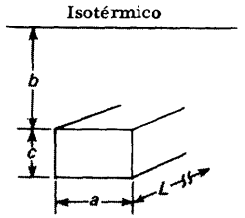
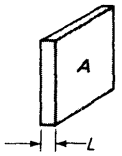
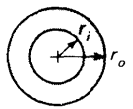
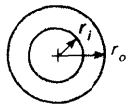
Hay seis secciones de pared, doce extremos y ocho esquinas, así que el factor de forma total es

$$S = (6)(3) + (12)(0.54) + (8)(0.05) = 24.88$$

Librodot

Tabla 3-1. Factores de Forma en Conducción†

Sistema físico	Diagrama	Factor de forma	Restricciones
Cilindro isotérmico de radio r enterrado en un medio semiinfinito que tiene su superficie isotérmica		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(D/r)}$	$L \gg r$
		$\frac{2\pi L}{\ln(2D/r)}$	$L \gg r$ $D > 3r$
		$\frac{2\pi L}{\ln(L/r)\left[1 - \frac{\ln(L/2D)}{\ln(L/r)}\right]}$	$D \gg r$ $L \gg D$
Esfera isotérmica de radio r enterrada en un medio infinito		$4\pi r$	
Esfera isotérmica de radio r enterrada en un medio semiinfinito que tiene una superficie isotérmica		$\frac{4\pi r}{1 - r/2D}$	
Conducción entre dos cilindros isotérmicos enterrados en un medio infinito		$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}\right)}$	$L \gg r$ $L \gg D$

Cilindro isotérmico de radio r colocado en un medio semiinfinito como se muestra		$\frac{2\pi L}{\ln (2L/r)}$	$L \gg 2r$
Paralelepípedo rectangular isotérmico enterrado en un medio semiinfinito que tiene una superficie isotérmica		$1.685L\left[\log\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^{-0.59}\left(\frac{b}{c}\right)^{-0.078}$	(ver Ref. 7)
Pared plana		$\frac{A}{L}$	**Flujo de calor unidimensional**
Cilindro hueco, longitud L		$\frac{2\pi L}{\ln (r_o/r_i)}$	$L \gg r$
Esfera hueca		$\frac{4\pi r_o r_i}{r_o - r_i}$	

† **Resumidos de acuerdo a las Referencias 6 y 7.**

El flujo de calor se calcula de

$$q = kS\,\Delta T = (0.6)(24.88)(800 - 100) = 10\,450 \text{ Btu/hr} \qquad (3\,062 \text{ W})$$

3-5 ANALISIS MEDIANTE METODO NUMERICO

Un inmenso número de soluciones analíticas para problemas de transferencia de calor por conducción se ha acumulado en la literatura en los últimos 100 años. Aun así, hay muchas situaciones prácticas donde la geometría o condiciones de frontera son tales que no se ha obtenido una solución analítica o, si la solución ha sido desarrollada, ésta involucra una solución por series tan complejas que la evaluación numérica es extremadamente difícil. Para tales situaciones, la aproximación más útil al problema se basa en técnicas de diferencias finitas, cuyos principios básicos expondremos en esta sección. De hecho, el rápido desarrollo de las computadoras digitales de alta velocidad ha facilitado a los especialistas en transferencia de calor el obtener soluciones numéricas que en otros tiempos se pensaba que eran imposibles.

Considérese un cuerpo bidimensional el cual se divide en incrementos iguales en las direcciones x y y como se muestra en la Fig. 3-5. Los nodos son designados como se muestra, donde las localizaciones m indican el incremento en x y las localizaciones n indican el incremento en y. Deseamos establecer las temperaturas en cualquiera de esos nodos dentro del cuerpo, usando la Ec. (3-1) como condición de gobierno. Las diferencias finitas se emplean para aproximar incrementos diferenciales en la temperatura, y en las coordenadas en el espacio; entre más pequeños se puedan seleccionar esos incrementos finitos, más aproximada será la distribución de temperatura a la verdadera.

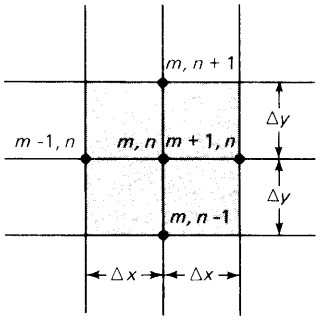


FIG. 3-5. Esquema que ilustra la nomenclatura usada en análisis numérico bidimensional de conducción de calor

Librodot

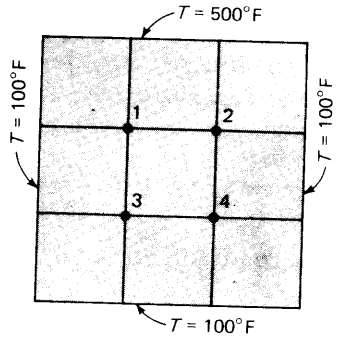


FIG. 3-6

Los gradientes de temperatura pueden escribirse como sigue:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{m,n} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} = \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

Por lo tanto, la aproximación para diferencias finitas de la Ec. (3-1) será

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} = 0$$

Si $\Delta x = \Delta y$, entonces

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0 \qquad (3\text{-}24)$$

Ya que estamos considerando el caso de conductividad térmica constante, el flujo de calor puede expresarse en términos de diferenciales de temperatura. La Ec. (3-24) establece simplemente que el flujo neto de calor hacia cualquier nodo es cero en condiciones de estado estable. En efecto, la aproximación numérica de diferencias finitas reemplaza a la distribución de temperatura continua

Librodot

por barras ficticias conduciendo calor entre nodos pequeños, los cuales no generan calor.

También podemos hacer una técnica de diferencias finitas para tomar en cuenta la generación de calor. Unicamente añadimos el término $\dot{q}/k$ en la ecuación general y obtenemos

$$\frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Entonces, para una malla cuadrada en la cual $\Delta x = \Delta y$,

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + \frac{\dot{q}(\Delta x)^2}{k} - 4T_{m,n} = 0 \quad (3\text{-}24a)$$

Al utilizar el método numérico, la Ec. (3-24) debe escribirse para cada nodo dentro del material, y el sistema de ecuaciones resultantes debe ser resuelto para las temperaturas en los diversos nodos. Si se usan pequeñas subdivisiones, el número de nodos puede ser en realidad grande, las ecuaciones pueden ser difíciles de manejar, y una solución simultánea podría consumir mucho tiempo si se hiciera a mano. Para un número modesto de nodos, una calculadora manual puede ser razonablemente útil en estas circunstancias, y ahora consideraremos la llamada técnica de relajación para resolver el sistema de ecuaciones en estas circunstancias. En este método, el lado derecho de la Ec. (3-24) se hace igual a algún residuo $q_{m,n}$, el cual deseamos "relajar" a cero. El proceso de relajación se lleva a cabo de acuerdo a los siguientes pasos:

1. Se suponen valores para las temperaturas en los diferentes nodos. Se intenta suponer esos valores tan cerca como sea posible a los verdaderos. La gráfica de cuadros curvos puede ser un medio útil para obtener la primera suposición.
2. Se calculan los residuos en cada nodo, usando las temperaturas supuestas.
3. Se relaja a cero el residuo mayor cambiando la temperatura del nodo correspondiente por una cantidad apropiada. Para el sistema bidimensional será necesario cambiar la temperatura del nodo por un cuarto del cambio efectuado en el residuo, y en el sentido opuesto. Por ejemplo, si el residuo en el punto (m, n) es $+100$, la temperatura del nodo (m, n) deberá *incrementarse* por 25 para relajar aquél a cero.
4. Se cambian los residuos de los nodos de los alrededores, para corresponder al cambio de temperatura en el paso 3.
5. Se continúa relajando los residuos hasta que todos estén tan cercanos a cero como se desee. Nótese que un residuo

Librodot

de 4 significa un error en temperatura de únicamente 1°F. Esta exactitud es suficiente para la mayoría de los propósitos.

Tabla 3-2. Tabla de Relajación para el Sistema de la Fig. 3-6

T_1	$\tilde{q}_1$	T_2	$\tilde{q}_2$	T_3	$\tilde{q}_3$	T_4	$\tilde{q}_4$
300	−100	300	−100	200	−100	200	−100
275	0		−125		−125		
	−30	270	−5				−130
			−45		−165	160	30
	−70			160	−5		−10
255	10		−65		−25		
	0	260	−25				−20
	−5			155	−5		−25
	−15	250	15				−35
			5		−15	150	5
	−20			150	5		0
250	0		0		0		

Un ejemplo de la técnica de relajación se muestra en la Fig. 3-6 y en la Tabla 3-2. Obsérvese que los residuos pueden ser sobrerrelajados o subrelajados para hacer los cálculos más fáciles.

Una vez que las temperaturas han sido determinadas, el flujo de calor puede calcularse de

$$q = \sum k\,\Delta x \frac{\Delta T}{\Delta y}$$

donde la ΔT se toma en las fronteras. En el ejemplo, el flujo de calor puede calcularse indistintamente en la cara a 500°F o en las tres caras a 100°F. Si se usa una malla de relajación suficientemente fina, los dos valores deberán ser casi iguales. Como una cosa de práctica general, por lo común es mejor tomar el promedio aritmético de los dos valores para su uso en cálculos. En el ejemplo, los dos cálculos dan

Cara a 500°F:

$$q = -k\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250 - 500) + (250 - 500)] = 500k$$

Cara a 100°F:

$$q = -k\frac{\Delta y}{\Delta x}[(250 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (150 - 100) + (250 - 100)] = -500k$$

Librodot

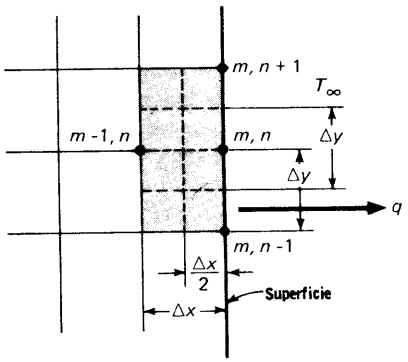


FIG. 3-7. Nomenclatura para la solución por relajación con condiciones de frontera convectivas

y los dos valores concuerdan en este caso. El cálculo del flujo de calor en casos en que haya fronteras curvas o se involucren formas complicadas, se trata por Dusinberre [3], Schneider [2] y Myers [15].

En el ejemplo anterior sólo cuatro nodos fueron empleados, y las ecuaciones correspondientes a la Ec. (3-24) podían fácilmente resolverse simultáneamente; sin embargo, este simple ejemplo muestra la técnica general del método de relajación que puede aplicarse a problemas más complejos.

Cuando el sólido se expone a una condición de frontera de convección, las temperaturas de la superficie deben calcularse en forma diferente del método dado arriba. Considérese la frontera mostrada en la Fig. 3-7. El balance de energía en el nodo (m, n) es

$$-k\,\Delta y\,\frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} - k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{m,n} - T_{m,n+1}}{\Delta y} - k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{n,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} = h\,\Delta y\,(T_{m,n} - T_\infty)$$

Si $\Delta x = \Delta y$, la temperatura en la frontera se expresa en la ecuación

$$T_{m,n}\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) - \frac{h\,\Delta x}{k}\,T_\infty - \tfrac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) = 0 \quad (3\text{-}25)$$

Debe escribirse una ecuación de este tipo para cada nodo a lo largo de la superficie mostrada en la Fig. 3-7. Así, cuando una condición de frontera de convección está presente, se usa una ecuación como la (3-25) en la frontera y una como la (3-24) para los puntos interiores. La solución aún procedería en la misma forma haciendo la Ec. (3-25) igual a algún residuo, aplicando la técnica de relajación; sin embargo, la naturaleza más complicada de la ecuación residual en la frontera trae como consecuencia un cálculo aritmético más elaborado en la solución por relajación.

Librodot

La Ec. (3-25) se aplica a una superficie plana expuesta a una condición de frontera de convección. Esta no se aplicará a otras situaciones, tales como una pared aislada o una esquina expuesta a una condición de frontera de convección. Considérese la esquina mostrada en la Fig. 3-8. El balance de energía para aquélla es

$$-k\frac{\Delta y}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m-1,n}}{\Delta x}-k\frac{\Delta x}{2}\frac{T_{m,n}-T_{m,n-1}}{\Delta y}=h\frac{\Delta x}{2}(T_{m,n}-T_\infty)+h\frac{\Delta y}{2}(T_{m,n}-T_\infty)$$

Si $\Delta x = \Delta y$,

$$2T_{m,n}\left(\frac{h\,\Delta x}{k}+1\right)-2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty-(T_{m-1,n}+T_{m,n-1})=0 \qquad (3\text{-}26)$$

Se pueden tratar en forma similar otras condiciones de frontera.

Ejemplo 3-3. Considérese el cuadrado del ejemplo previo. La cara izquierda se mantiene a 100°F y la cara superior a 500°F, mientras las otras dos caras se exponen a un ambiente a 100°F.

$$h = 10 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{-°F y } k = 10 \text{ Btu/hr-pie-°F}$$

El bloque es de 1 pie cuadrado. Calcúlense las temperaturas de los diferentes nodos como se indica en la Fig. 3-9.

Solución. La ecuación residual para los nodos 1, 2, 4 y 5 es

$$T_{m+1,n}+T_{m-1,n}+T_{m,n+1}+T_{m,n-1}-4T_{m,n}=\tilde{q}_{m,n}$$

El residuo para los nodos 3, 6, 7 y 8 está dado por la Ec. (3-25), y el residuo para el nodo 9, por la Ec. (3-26):

$$\frac{h\,\Delta x}{k}=\frac{(10)(1)}{(3)(10)}=\frac{1}{3}$$

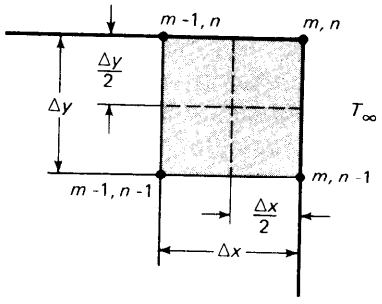


FIG. 3-8. Nomenclatura para la solución por relajación con convección en una esquina

Librodot

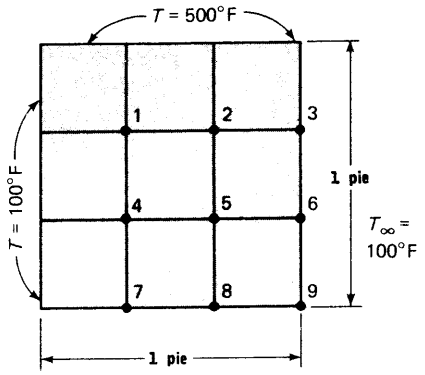


FIG. 3-9. Nomenclatura para el Ej. 3-3

Las ecuaciones residuales para los nodos 3 y 6 se escriben, por consiguiente, como

$$2T_2 + T_6 + 567 - 4.67T_3 = \bar{q}_3$$
$$2T_5 + T_3 + T_9 + 67 - 4.67T_6 = \bar{q}_6$$

Los residuos para los nodos 7 y 8 son dados por

$$2T_4 + T_8 + 167 - 4.67T_7 = \bar{q}_7$$
$$2T_5 + T_7 + T_9 + 67 - 4.67T_8 = \bar{q}_8$$

y la ecuación residual para el nodo 9 es

$$T_6 + T_8 + 67 - 2.67T_9 = \bar{q}_9$$

Nótese que el efecto de un cambio en una temperatura de frontera sobre el residuo en ese punto, no es el mismo que para un punto interior. El proceso de relajación para este problema se muestra en la Tabla 3-3. Nótese otra vez que los residuos pueden sobrerrelajarse o subrelajarse para hacer más rápida la solución. El proceso de relajación ha sido detenido cuando algunos de los residuos todavía tienen valores diferentes de cero; sin embargo, una inspección de las ecuaciones residuales muestran que todas las temperaturas deberán estar dentro de 1°F de su valor correcto con los residuos mostrados. Esta exactitud es aceptable.

Una característica atractiva del método de relajación es que los errores en los cálculos no necesitan corregirse directamente. Si se hace una verificación de los residuos a la mitad del cálculo y se descubre una discrepancia, no necesitamos regresar y encontrar nuestro error. Simplemente recalculamos los residuos correspondientes a las temperaturas en ese punto del cálculo, y procedemos con el método

Librodot

de relajación. Para problemas de relajación que involucren un número grande de nodos, es buena práctica recalcular los residuos periódicamente en el cálculo para descubrir cualquier error numérico. El proceso de relajación puede entonces continuarse sobre la base de los valores correctos de los residuos, si se descubre un error.

Un resumen conveniente de ecuaciones residuales se da en la Tabla 3-4, para diferentes geometrías y condiciones de frontera. Las situaciones (f) y (g) son de particular interés, puesto que proveen las ecuaciones de cálculo que pueden emplearse con fronteras curvas, usándose aún incrementos uniformes en Δx y Δy.

De la discusión anterior debe ser obvio que la técnica de relajación es meramente un método para obtener soluciones de un conjunto de ecuaciones simultáneas. En cuanto concierne a la aproximación numérica de diferencias finitas, esas soluciones pueden obtenerse por cualquier otro medio conveniente. Para muchas personas el "otro medio" será a través del uso de una computadora digital. La mayoría de las grandes computadoras tienen subrutinas estándar para obtener la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas, y la programación es totalmente directa. Para problemas muy complicados que involucren un número grande de nodos o problemas que serán resueltos una y otra vez, con únicamente condiciones de frontera diferentes, la computadora es la herramienta obvia. Para problemas de modesta importancia, como los ejemplos anteriores, no vale la pena considerar el tiempo y esfuerzo para programar la solución. Un cálculo manual dará la respuesta en mucho menos tiempo y a menor costo.

Para acelerar los cálculos en una solución de relajación, con frecuencia es ventajoso construir una tabla que muestre los efectos de los cambios en las temperaturas de los nodos sobre los residuos de los nodos de los alrededores. En la Tabla 3-5 se muestra tal grupo de números para las ecuaciones del Ej. 3-3. Utilizando esta tabla, vemos que un aumento en la temperatura del nodo 3 por un grado, resulta en una reducción del residuo de ese nodo por 4.67, y un aumento en los residuos de los nodos adyacentes 2 y 6 por 1.0.

Para aquellos problemas que requieren una solución en computadora, hay un número importante de referencias disponibles para el lector. El método de relajación delineado anteriormente, casi es seguro que *no* se empleará en tales soluciones. El método seleccionado bien puede ser un análisis transitorio (véase el Cap. 4) llevado hasta el límite de estado estable o eliminación directa (eliminación de Gauss [9]) o pueden emplearse técnicas iterativas [14]

Librodot

Tabla 3-3. Método de Relajación para la Frontera Convectiva de la Fig. 3-9

T_1	$\bar{q}_1$	T_2	$\bar{q}_2$	T_3	$\bar{q}_3$	T_4	$\bar{q}_4$	T_5	$\bar{q}_5$	T_6	$\bar{q}_6$	T_7	$\bar{q}_7$	T_8	$\bar{q}_8$	T_9	$\bar{q}_9$
300	−100	300	0	200	383	200	−50	200	0	150	117	150	17	150	67	150	−33
			100	300	−84						217						
					−34				50	200	−16						17
			75				−75										
275	0								75								
	25	325	−25		16				85				27	160	20		27
									65				−13				
	5					180	5		−15		24				60		
			−5				25	220			44				80	170	−27
									−5				7				
	15					190	−15		5	210	−3				41		−17
					26				15				17	170	33		−7
				5							7						
				310	−21		−11	224	−1		15		−6		41		
				9			−6					155			46		
											10						
			4	305	2		−2										
	−1		8						1								−5
279					6				3	212	1						
	1	327	0		8						3						
				307	−1							154	−1		45		
			2				−3		13				9	180	−2		5
											9				4		
			5				0	227	1			156	0		6		
							2				0						7
					1				3	214					9	173	−1
											3						1
									5				2	182	0		
Valores finales 279	1	327	5	307	1	190	2	227	5	214	3	156	2	182	0	173	1

Tabla 3-4. Resumen de Fórmulas de Residuos para Cálculos por Diferencias Finitas

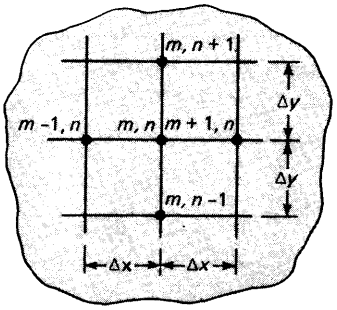
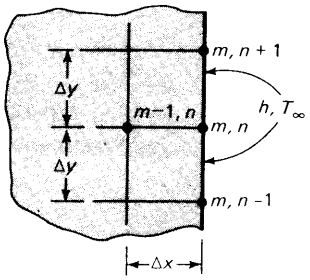
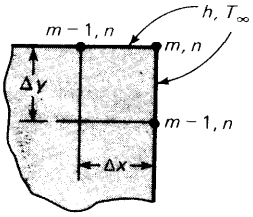
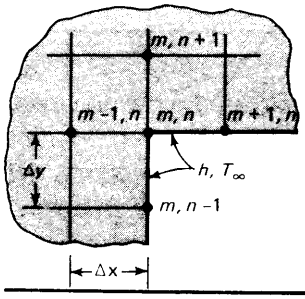
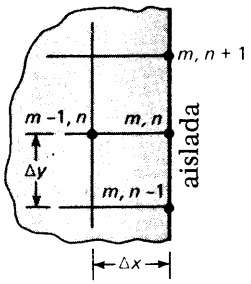
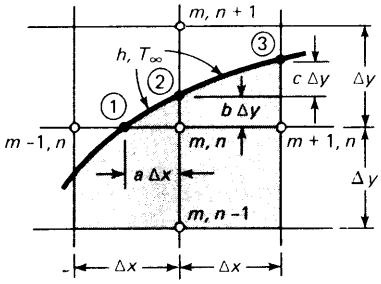
Situación física	Ecuaciones nodales para incrementos iguales en x y y
(*a*) Nodo interior 	$\bar{q}_{m,n} = T_{m+1,n} + T_{m,n+1} + T_{m-1,n} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n}$
(*b*) Nodo en frontera convectiva 	$\bar{q}_{m,n} = \frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + \frac{1}{2}(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - \left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) T_{m,n}$
(*c*) Esquina exterior con frontera convectiva 	$\bar{q}_{m,n} = 2\frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + (T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) - 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) T_{m,n}$
(*d*) Esquina interior con frontera convectiva 	$\bar{q}_{m,n} = 2\frac{h\,\Delta x}{k} T_\infty + 2T_{m-1,n} + 2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} - 2\left(3 + \frac{h\,\Delta x}{k}\right) T_{m,n}$

Tabla 3-4. Resumen de Fórmulas de Residuos para Cálculos por Diferencias Finitas. (*Continuación*)

Situación física	Ecuaciones nodales para incrementos iguales en x y y
(*e*) Frontera aislada 	$\bar{q}_{m,n} = T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n}$
(*f*) Nodo interior cerca de frontera curva 	$\bar{q}_{m,n} = \frac{2}{b(b+1)} T_2 + \frac{2}{a+1} T_{m+1,n} + \frac{2}{b+1} T_{m,n-1} + \frac{2}{a(a+1)} T_1 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) T_{m,n}$
(*g*) Nodo de frontera con convección a lo largo de frontera curva-nodo 2 para (*f*) de arriba	$\bar{q}_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} T_1 + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} T_3 + \frac{a+1}{b} T_{m,n} + \frac{h\,\Delta x}{k}(\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2}) T_\infty - \left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+1}} + \frac{a+1}{b} + (\sqrt{c^2+1} + \sqrt{a^2+b^2})\frac{h\,\Delta x}{k}\right] T_2$

para resolver el conjunto de ecuaciones simultáneas. Se da un breve resumen de técnicas numéricas disponibles, por Ozisik [12].

La exactitud de una solución numérica obviamente depende del tamaño de las divisiones seleccionadas en las coordenadas del espacio, y del cuidado que debe tenerse para resolver el conjunto de ecuaciones simultáneas. Cuando se emplea una solución por compu-

Librodot

Tabla 3-5. Efectos de Cambios en Temperaturas de Nodos de 1°F Sobre los Residuos de los Alrededores, para Ecuaciones del Ej. 3-3

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9
$\bar{q}_1$	−4	+1		+1					
$\bar{q}_2$	+1	−4	+1		+1				
$\bar{q}_3$	0	+2	−4.67			+1			
$\bar{q}_4$	+1			−4	+1		+1		
$\bar{q}_5$	0	+1		+1	−4	+1		+1	
$\bar{q}_6$	0		+1		+2	−4.67			+1
$\bar{q}_7$	0			+2			−4.67	+1	
$\bar{q}_8$	0				+2		+1	−4.67	+1
$\bar{q}_9$	0					+1		+1	−2.67

tadora, rara vez se emplea el método de relajación. En lugar de esto, las ecuaciones se expresan en forma matricial y se usan rutinas estándar para efectuar la inversión. Básicamente, el conjunto de ecuaciones de temperatura toma la forma

$$\begin{Bmatrix} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \cdots + a_{1n}T_n = C_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \cdots = C_2 \\ a_{31}T_1 + \quad\quad\quad\quad = C_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}T_1 + a_{n2}T_2 + \cdots + a_{nn}T_n = C_n \end{Bmatrix} \tag{3-27}$$

donde $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son las temperaturas desconocidas en los diferentes nodos. Usando la notación matricial,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \cdots \\ a_{31} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n \end{bmatrix} \qquad [T] = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n \end{bmatrix}$$

La Ec. (3-27) puede expresarse como

$$[A][T] = [C] \tag{3-28}$$

Librodot

y el problema es encontrar la inversa de [A] tal que

$$[T] = [A]^{-1}[C] \tag{3-29}$$

Designando $[A]^{-1}$ por

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11}b_{12} \cdots b_{1n} \\ b_{21} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}b_{n2} \cdots b_{nn} \end{bmatrix}$$

las soluciones finales para las temperaturas desconocidas se escriben en forma desarrollada como

$$\begin{aligned} T_1 &= b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + \cdots + b_{1n}C_n \\ T_2 &= b_{21}C_1 + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_n &= b_{n1}C_1 + b_{n2}C_2 + \cdots + b_{nn}C_n \end{aligned} \tag{3-30}$$

Claramente, al aumentar el número de nodos la solución es más compleja y lleva más tiempo, aun con una computadora de alta velocidad. Para la mayoría de los problemas de conducción, la matriz contiene un número grande de elementos cero, por lo que se puede hacer alguna simplificación en el procedimiento. Por ejemplo, la notación matricial para el sistema del Ej. 3-3 sería

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -4.67 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4.67 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -4.67 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600 \\ -500 \\ -567 \\ -100 \\ 0 \\ -67 \\ -167 \\ -67 \\ -67 \end{bmatrix}$$

Iteración de Gauss-Seidel

Cuando el número de nodos es muy grande, una técnica iterativa puede frecuentemente dar una solución más eficiente a las ecuaciones de nodos. De nuestras ecuaciones de nodos anteriores, notamos que es posible resolver para las temperaturas $T_{m,n}$ en términos de las temperaturas de los nodos adyacentes, y ciertas resistencias que los conectan. Designando la temperatura del nodo central por T_i y las temperaturas adyacentes por T_j, podemos mostrar que las ecuaciones de nodos pueden expresarse en la forma

$$T_i = \frac{\sum_j T_j/R_{ij}}{\sum_j 1/R_{ij}} \tag{3-31}$$

Librodot

donde R_{ij} es la resistencia térmica entre los nodos i y j. Si un calor adicional q_i es cedido al nodo i (por generación de calor, radiación, etc.), la Ec. (3-31) debe tomar la forma

$$T_i = \frac{q_i + \sum_j T_j/R_{ij}}{\sum_j 1/R_{ij}} \tag{3-32}$$

El procedimiento de iteración de Gauss-Seidel hace uso de las ecuaciones de diferencias en la forma de (3-32), a través del siguiente procedimiento:

1. Se supone un conjunto inicial de valores para las T_i. Esta suposición inicial puede obtenerse a través de cualquier método conveniente, incluyendo una relajación burda o un cálculo de la matriz inversa.
2. A continuación se calculan nuevos valores de las temperaturas de los nodos, de acuerdo a la Ec. (3-32).
3. El proceso se repite hasta que cálculos sucesivos difieran por una pequeña cantidad. En términos de un programa de computadora esto significa que una prueba será intercalada para detener los cálculos cuando

$$T_{i_{n+1}} - T_{i_n} \leq \delta \qquad \text{para toda } T_i$$

donde δ es alguna constante seleccionada y n es el número de iteraciones. Obviamente, entre más pequeño sea el valor de δ, mayor será el tiempo de cálculo requerido para obtener el resultado deseado. El lector deberá notar, sin embargo, que la *exactitud* de la solución al problema físico no depende del valor que se dé a δ solamente. Esta constante gobierna la exactitud de la solución al conjunto de ecuaciones en diferencias. La solución al problema físico depende también de la selección del incremento Δx.

Por ahora, el lector deberá haber percibido el potencial de los métodos numéricos aplicados a problemas de conducción, particularmente cuando se acoplan con técnicas de computadora eficientes. Para más información, deberán consultarse las Refs. 3, 9, 10 y 12.

3-6 ANALOGIA ELECTRICA PARA CONDUCCION BIDIMENSIONAL

La conducción eléctrica en estado estable y en un material homogéneo de resistividad constante, es análoga a la conducción de

Librodot

calor en estado estable en un cuerpo de forma geométrica similar. Para conducción eléctrica bidimensional, se aplica la ecuación de Laplace.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0$$

donde E es el potencial eléctrico. Una forma muy simple de resolver un problema de conducción de calor bidimensional, es construir una analogía eléctrica y determinar experimentalmente los factores de forma geométricos para usarse en la Ec. (3-23). Un modo de realizar esto, es usar un papel disponible comercialmente el cual está cubierto con una película conductora delgada. Este papel puede cortarse igual que el modelo geométrico exacto del sistema de conducción de calor bidimensional. En los extremos apropiados del papel, se adhieren buenos conductores eléctricos para simular las condiciones de frontera de temperatura en el problema. Una diferencia de potencial eléctrico se crea en el modelo. Puede notarse que el papel tiene una resistencia muy alta en comparación con los conductores adheridos a los extremos, así que una condición de potencial constante puede mantenerse en las regiones de contacto.

Una vez que se coloca el potencial eléctrico en el papel, puede usarse un voltímetro ordinario para graficar líneas de potencial eléctrico constante. Con esas líneas de potencial constante disponibles, las líneas de flujo pueden construirse con facilidad, puesto que éstas son ortogonales a las líneas de potencial. Esas líneas equipotenciales y de flujo tienen precisamente el mismo arreglo que las líneas isotermas y de flujo de calor en el correspondiente problema de conducción de calor. El factor de forma se calcula luego usando el método que se aplicó a los cuadros curvos.

Puede notarse que la analogía de la hoja conductora no se aplica a problemas donde la generación de calor está presente; sin embargo, la adición de resistencias apropiadas, las condiciones de frontera convectivas pueden manipularse con poco problema. Schneider [2] y Ozisik [12] discuten el método de hoja conductora, así como otras analogías para tratar problemas de transferencia de calor por conducción, y Kayan [4, 5] da una discusión detallada del método de la hoja conductora.

PREGUNTAS DE REPASO

1. ¿Cuál es la suposición principal en el método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace?

Librodot

2. Defínase el factor de forma para conducción.

3. ¿Cuál es el procedimiento básico para establecer una solución numérica en un problema de conducción bidimensional?

4. Una vez que se obtienen las ecuaciones de diferencias finitas para un problema de conducción, ¿qué métodos están disponibles para efectuar una solución? ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada método, y cuándo debe aplicarse cada técnica?

5. Investigue las rutinas de la computadora que están disponibles en su centro de cálculo para la solución de problemas de transferencia de calor por conducción.

PROBLEMAS

3-1. Empezando con las soluciones de separación de variables para $\lambda^2 = 0$ y $\lambda^2 < 0$ [Ecs. (3-9) y (3-10)], muéstrese que no es posible satisfacer las condiciones de frontera para la temperatura constante en $y = H$ con cualquiera de esas dos formas de solución. Esto es, muéstrese que para satisfacer las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{en } y = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{en } x = 0 \\ T &= T_1 \quad \text{en } x = W \\ T &= T_2 \quad \text{en } y = H \end{aligned}$$

resulta una solución trivial o sin sentido físico cuando se usan las Ecs. (3-9) o (3-10).

3-2. Escriba los primeros cuatro términos de la solución por series dada en la Ec. (3-20). ¿Qué porcentaje de error resulta al usar únicamente los primeros cuatro términos en $y = H$ y $x = W/2$?

3-3. Un tubo de 3 plg de diámetro cuya temperatura en la superficie se mantiene a 400°F, pasa a través del centro de una losa de concreto de 18 plg de espesor. Las temperaturas de las superficies exteriores de la losa se mantienen a 60°F. Usando la gráfica de flujo, estímense las pérdidas de calor por unidad de longitud del tubo.

3-4. Se construye un horno de dimensiones interiores de 1 por 2 por 3 pies de un material que tiene conductividad termica de 0.5 Btu/hr-pie-°F. El espesor de las paredes es de 6 plg. Las temperaturas de las superficies interior y exterior son 1 000 y 200°F, respectivamente. Calcúlense las pérdidas de calor a través de las paredes del horno.

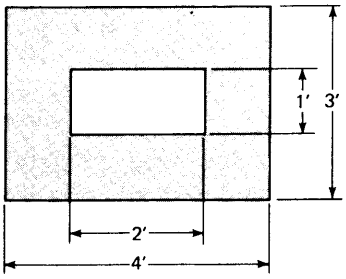
3-5. Se construye un cubo de ladrillo refractario de 14 plg en cada lado externo. El espesor de las paredes es de 2 plg. La temperatura de la superficie interior es de 1 000°F y la temperatura en

Librodot

la superficie exterior es de 200°F. Calcúlese el flujo de calor en Btu por hora.

3-6. La superficie de un tubo resistente de Monel de 1 plg de diámetro interior y 2 plg de diámetro exterior, se cubre con una capa de lana de vidrio de 1 plg. La temperatura interior del tubo es de 500°F, y la temperatura en el exterior del aislante es de 100°F. ¿Qué cantidad de calor se disipa por pie de longitud?

3-7. Una pared de horno simétrica tiene las dimensiones mostradas. Mediante el uso de la gráfica de flujo, obténgase el factor de forma para esta pared.



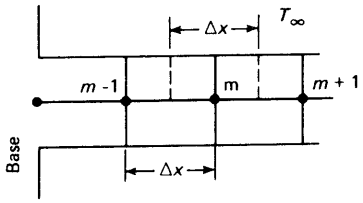
3-8. Derívese una ecuación equivalente a la Ec. (3-24) para un nodo interior en un problema de flujo de calor tridimensional.

3-9. Derívese una ecuación equivalente a la Ec. (3-24) para un nodo interior en un problema de flujo de calor unidimensional.

3-10. Derívese una ecuación equivalente a la Ec. (3-25) para una condición de frontera convectiva unidimensional.

3-11. Considerando los problemas de aletas unidimensionales del Cap. 2, muéstrese que una ecuación residual para los nodos a lo largo de la aleta mostrada en la figura anexa puede expresarse como

$$T_m\left[\frac{hP(\Delta x)^2}{kA}+2\right]-\frac{hP(\Delta x)^2}{kA}T_\infty-(T_{m-1}+T_{m+1})=\bar{q}_m$$



3-12. Una barra de aluminio de 1 plg de diámetro y 6 plg de longitud sale de una pared que se mantiene a 600°F. La temperatura ambiente es de 100°F. El coeficiente de transferencia de calor es de 3 Btu/hr-pie²-°F. Usando una técnica numérica de acuerdo

Librodot

con el resultado del Prob. 3-11, obténganse valores para la temperatura a lo largo de la barra. A continuación, obténgase el flujo de calor de la pared en $x = 0$. SUGERENCIA: La condición de frontera en el extremo de la barra puede expresarse como

$$T_m\left[\frac{h\,\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA} + 1\right] - T_\infty\left[\frac{h\,\Delta x}{k} + \frac{hP(\Delta x)^2}{2kA}\right] - T_{m-1} = \bar{q}_m$$

donde m denota el nodo en el extremo libre de la aleta. El flujo de calor en la base es

$$q_{x=0} = \frac{-kA}{\Delta x}(T_{m+1} - T_m)$$

donde T_m es la temperatura de la base y T_{m+1} es la temperatura en el primer incremento.

3-13. Repítase el Prob. 3-12 usando una variación lineal del coeficiente de transferencia de calor entre la temperatura de la base y el extremo aislado de la aleta. Supóngase que $h = 5$ Btu/hr-pie²-°F en la base, y $h = 2$ Btu/hr-pie²-°F en el extremo libre.

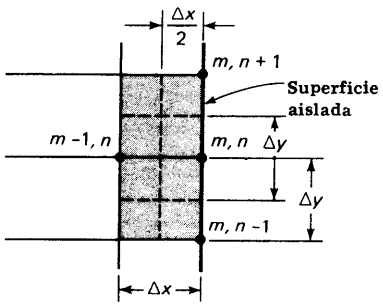
3-14. Para la pared de que se trata en el Prob. 3-7 se usa un material con $k = 0.8$ Btu/hr-pie-°F. Las temperaturas interior y exterior de la pared son 1 200 y 300°F, respectivamente. Mediante el uso de la técnica de relajación, calcúlese el flujo de calor a través de la pared.

3-15. Repítase el Prob. 3-14 suponiendo que la pared exterior está expuesta a un ambiente a 100°F y el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 3 Btu/hr-pie²-°F. Supóngase que la temperatura de la superficie interior se mantiene a 1 200°F.

3-16. Repítase el Prob. 3-3 usando la técnica de relajación.

3-17. Muéstrese que la ecuación residual correspondiente a la pared aislada mostrada en la figura anexa es

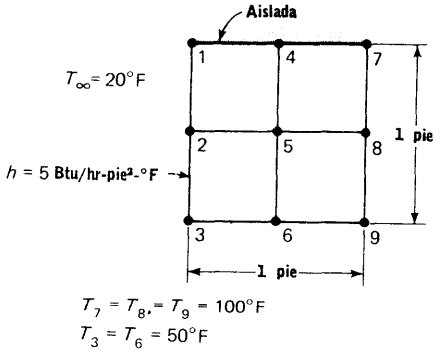
$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = \bar{q}_{m,n}$$



3-18. En la sección que se muestra en seguida, la superficie 1-4-7 está aislada. El coeficiente de transferencia de calor por con-

Librodot

vección en la superficie 1-2-3 es de 5 Btu/hr-pie²-°F. La conductividad térmica del material sólido es de 2 Btu/hr-pie-°F. Con la técnica



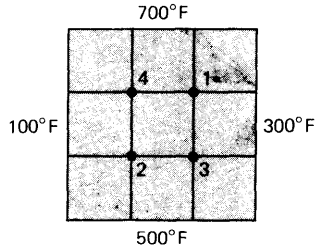
de relajación, calcúlense las temperaturas en los nodos 1, 2, 4 y 5.

3-19. Una placa de vidrio de 3 por 12 por 12 plg (k = 0.4) está orientada con la cara de 12 por 12 en una posición vertical. Una cara pierde calor por convección a los alrededores a 70°F. La otra cara vertical se coloca en contacto con un bloque a temperatura constante de 400°F. Las otras cuatro caras están aisladas. El coeficiente de transferencia de calor por convección varía aproximadamente como

$$h_x = 0.22(T_s - T_\infty)^{\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{4}} \quad \text{Btu/hr-pie}^2\text{-°F}$$

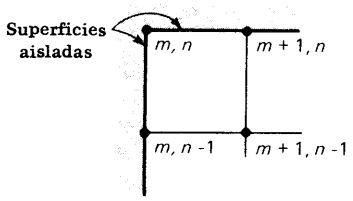
donde T_s es la temperatura local de la superficie, y x es la distancia vertical desde el fondo de la placa. Determínense las pérdidas de calor por convección de la placa usando un análisis numérico apropiado. Empléese una computadora digital para la solución, si se cuenta con una disponible.

3-20. Calcúlense las temperaturas en los puntos 1, 2, 3 y 4 usando el método de relajación.



3-21. Para la sección mostrada con esquina aislada, derívese una expresión para el residuo del nodo (m, n) bajo condiciones de estado estable.

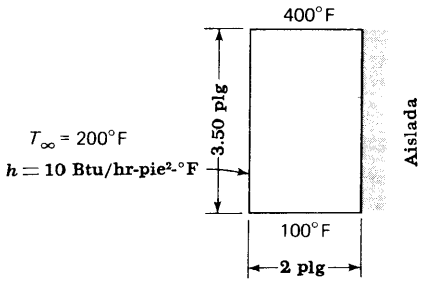
Librodot



3-22. Dos cilindros largos de 3 plg y 1 plg de diámetro están completamente rodeados por un medio con k = 0.8 Btu/hr-pie-°F. La distancia entre centros es de 4 plg y los cilindros se mantienen a 400 y 100°F. Calcúlese la razón de transferencia de calor por unidad de longitud.

3-23. Una esfera de 3 pies de diámetro se mantiene a 100°F y se entierra en un lugar donde k = 1.0 Btu/hr-pie-°F. La profundidad a la línea de centros es de 8 pies y la temperatura de la superficie del suelo es de 40°F. Calcúlese el calor disipado por la esfera.

3-24. Para el bloque mostrado, calcúlese la distribución de temperatura de estado estable en los nodos apropiados usando el método de relajación. Empléese una computadora digital para la solución, si esto es posible, y aprovéchese la biblioteca de subrutinas disponible en el centro de cálculo.



3-25. Derívese la ecuación nodal dada en la Tabla 3-4 (f).

3-26. Derívese una expresión para el residuo de un nodo fronterizo sujeto a un flujo de calor constante del ambiente. Usese la nomenclatura de la Fig. 3-7.

3-27. Una esfera de 8 plg de diámetro está totalmente encerrada por una gran masa de lana de vidrio. Un calentador en el interior de la esfera mantiene su temperatura de la superficie exterior a 350°F, mientras que la temperatura en el extremo exterior de la lana de vidrio es de 70°F. ¿Qué cantidad de potencia debe suministrarse al calentador para mantener condiciones de equilibrio?

Librodot

3-28. Trabájese el ejemplo de la Fig. 3-6 usando el método iterativo de Gauss-Seidel.

3-29. Trabájese el Ej. 3-3 usando el método iterativo de Gauss-Seidel.

3-30. Trabájese el Prob. 3-18 usando el método iterativo de Gauss- Seidel.

3-31. Se proyecta una técnica para medir la conductividad térmica del suelo, introduciendo en la tierra una barra larga calentada eléctricamente. Para propósitos de diseño, la barra se toma de 1 plg de diámetro con una longitud de 3 pies. Para evitar alteraciones extrañas en el suelo, la temperatura máxima en la superficie de la barra es de 135°F, mientras que la temperatura del suelo es de 55°F. Suponiendo una conductividad para el suelo de 1.0 Btu/hr-pie-°F, ¿cuál será la potencia requerida del calentador eléctrico en watts?

REFERENCIAS

1. Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger: "Conduction of Heat in Solids", 2a. Ed., Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1959.
2. Schneider, P. J.: "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
3. Dusinberre, G. M.: "Heat Transfer Calculations by Finite Differences", International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.
4. Kayan, C. F.: An Electrical Geometrical Analogue for Complex Heat Flow, *Trans. ASME,* Vol. 67, Pág. 713, 1945.
5. Kayan, C. F.: Heat Transfer Temperature Patterns of a Multicomponent Structure by Comparative Methods, *Trans. ASME*, Vol. 71, Pág. 9, 1949.
6. Rudenberg, R.: Die Ausbreitung der Luft-und Erdfelder um Hochspannungsleitungen, besonders bei Erd-und Kurzschlussen, *Elecktrotech. z.*, Vol. 46, Pág. 1342, 1925.
7. Andrews, R. V.: Solving Conductive Heat Transfer Problems with Electri-Cal-analogue Shape Factors, *Chem. Eng. Progr.*, Vol. 51, No. 2, Pág. 67, 1955.
8. Sunderland, J. E. y K. R. Johnson: Shape Factors for Heat Conduction through Bodies with Osothermal or Convective Boundary Conditions, *Trans. ASHAE*, Vol. 70, Págs. 237-241, 1964.
9. Richtmeyer, R. D.: "Difference Methods for Initial Value Problems", Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
10. Cranck, J. y P.Nicolson: A Practical Method for Numerical Evaluation of Solutions of P.D.E. of the Heat Conduction Type, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 43, Pág. 50, 1947.
11. Barakat, H. Z. y J. A. Clark: On the Solution of Diffusion Equation by Numerical Methods, *J. Heat Transfer*, Pág. 421, noviembre, 1966.

Librodot

12. Ozisik, M. N.: "Boundary Value Problems of Heat Conduction", International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.
13. Arpaci, V. S.: "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
14. Ames, W. F.: "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering", Academic Press, Inc., New York, 1965.
15. Myers, R. F.: "Conduction Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.

Librodot