TRANSFERENCIA DE CALOR, CAPÍTULO 4
J. P. HOLMAN



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

CAPITULO 4

CONDUCCION DE CALOR EN ESTADO TRANSITORIO

4-1 INTRODUCCION

Si un cuerpo sólido se sujeta repentinamente a un cambio en el ambiente, deberá pasar algún tiempo antes que una condición de equilibrio de temperatura prevalezca en el cuerpo. Nos referimos a las condiciones de equilibrio como el estado estable, y calculamos la distribución de temperatura y transferencia de calor por los métodos descritos en los Caps. 2 y 3. En el proceso de calentamiento o enfriamiento transitorio, el cual se lleva a cabo en el periodo intermedio antes que el equilibrio se establezca, el análisis debe ser modificado para tomar en cuenta los cambios en energía interna del cuerpo con el tiempo, y las condiciones de frontera deben ajustarse para igualar la situación física que prevalece en el problema de transferencia de calor en estado transitorio. El análisis de este tipo de transferencia es obviamente de gran interés práctico, debido al gran número de procesos de calentamiento y enfriamiento que deben calcularse en aplicaciones industriales.

Para analizar un problema de transferencia de calor en estado transitorio, podríamos proceder resolviendo la ecuación general de conducción de calor por el método de separación de variables, similar al tratamiento analítico usado para el problema bidimensional de estado estable discutido en la Sec. 3-2. Daremos una ilustración de este método de solución para un caso de geometría simple, y entonces referiremos al léctor a las referencias para el análisis de casos más complicados. Considérese la placa infinita de espesor $2L$ mostrada en la Fig. 4-1. Inicialmente, la placa está a una temperatura uniforme T_i, y en un tiempo cero las superficies se disminuyen en forma repentina a $T = T_1$. La ecuación diferencial es

Librodot

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-1}$$

La ecuación puede arreglarse en una forma más conveniente introduciendo la variable $\theta = T - T_1$. Entonces

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \theta}{\partial \tau} \tag{4-2}$$

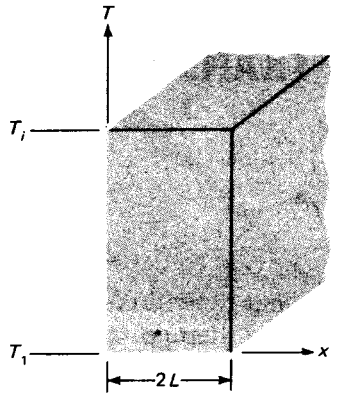


FIG. 4-1. Placa infinita sujeta a un enfriamiento repentino de las superficies

con las condiciones inicial y de frontera

$$\theta = \theta_i = T_i - T_1 \quad \text{en } \tau = 0,\ 0 \le x \le 2L \tag{a}$$
$$\theta = 0 \quad \text{en } x = 0,\ \tau > 0 \tag{b}$$
$$\theta = 0 \quad \text{en } x = 2L,\ \tau > 0 \tag{c}$$

Suponiendo una solución producto $\theta(x,\tau) = X(x)\mathcal{H}(\tau)$ produce las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0$$
$$\frac{d\mathcal{H}}{d\tau} - \lambda^2 \mathcal{H} = 0$$

donde λ^2 es la constante de separación. Para satisfacer las condiciones de frontera es necesario que $\lambda^2 > 0$, así que la forma de la solución será

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x)e^{-\lambda^2 \alpha \tau}$$

De la condición de frontera (b), $C_1 = 0$ para $\tau > 0$. Debido a que C_2 no puede ser cero también, encontramos de la condición de frontera (c) que sen $2L\lambda = 0$, o

Librodot

$$\lambda = \frac{n\pi}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La forma de la serie final de la solución es, por lo tanto,

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left[-(n\pi/2L)^2 \alpha\tau\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}$$

Esta ecuación puede ser reconocida como una expansión senoidal de Fourier, con las constantes C_n determinadas de la condición inicial (a) y la siguiente ecuación

$$C_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} \theta_i \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}\, dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}\,\theta_i \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$$

La serie final de la solución es, por lo tanto,

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_1}{T_i - T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-(n\pi/2L)^2 \alpha\tau} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \quad (4\text{-}3)$$

En la Sec. 4-4, esta solución se presentará en forma gráfica para propósitos de cálculo. Por ahora, nuestro propósito ha sido mostrar cómo la ecuación de conducción de calor en estado transitorio puede resolverse, cuando menos para un caso, con el método de separación de variables. En las referencias se da más información sobre métodos analíticos en problemas de estado transitorio.

4-2 SISTEMA DE CAPACIDAD TERMICA CONCENTRADA

Comenzaremos nuestra discusión de conducción de calor en estado transitorio analizando sistemas que pueden considerarse uniformes en temperatura. Este tipo de análisis se conoce como el método de capacidad térmica concentrada. Tales sistemas son obviamente idealizados, puesto que debe existir un gradiente de temperatura en un material, si el calor es conducido hacia dentro o fuera del material. En general, entre más pequeño sea el tamaño físico del cuerpo, la suposición de una temperatura uniforme en la totalidad de éste es más real; en el límite debe emplearse un volumen diferencial, como en la derivación de la ecuación general de conducción de calor.

Si una bola caliente de acero fuera sumergida en una vasija con agua fría, podría usarse el método de análisis de capacidad térmica concentrada si pudiéramos justificar la suposición de que la temperatura de la bola es uniforme durante el proceso de enfriamiento. Clarámente, la distribución de temperatura en la bola de-

Librodot

penderá de la conductividad térmica del material y de las condiciones de transferencia de calor de la superficie de la bola al fluido de los alrededores, esto es, el coeficiente de transferencia de calor por convección en la superficie. Debemos obtener una distribución de temperatura razonablemente uniforme en la bola, si la resistencia a la transferencia de calor por conducción fuera pequeña comparada con la resistencia de convección en la superficie, de tal manera que el gradiente mayor de temperatura ocurriría a través de la capa de fluido en la superficie. El análisis de capacidad térmica concentrada, entonces, es aquel que supone que la resistencia interna del cuerpo es despreciable en comparación con la resistencia externa.

Las pérdidas de calor por convección del cuerpo se manifiestan como un decrecimiento en la energía interna de éste, como se muestra en la Fig. 4-2. Así

$$q = hA(T - T_\infty) = -C\rho V \frac{dT}{d\tau} \tag{4-4}$$

donde A es el área de superficie para convección, y V es el volumen. La condición inicial se escribe como

$$T = T_0 \quad \text{en } \tau = 0$$

distribución de temperatura $T(x, \tau)$ es

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/\rho CV)\tau} \tag{4-5}$$

La red térmica para el sistema de una sola capacidad se muestra en la Fig. 4-2*b*. En esta red notamos que la capacidad térmica del sistema se "carga" inicialmente al potencial T_0 cerrando el interruptor S. Entonces, cuando el interruptor se abre, la energía almacenada en la capacitancia térmica se disipa a través de la resistencia

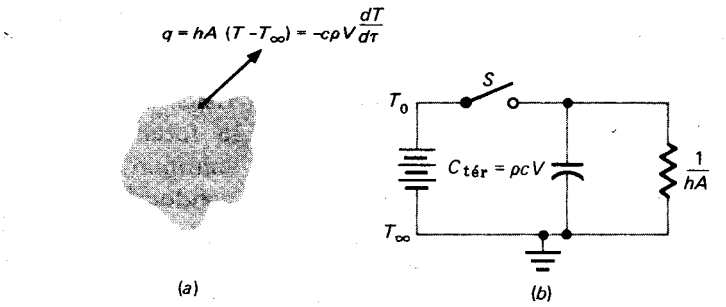


Fig. 4-2. Nomenclatura para el análisis de una sola capacidad térmica concentrada

$1/hA$. La analogía entre este sistema térmico y un sistema eléctrico es clara, y podríamos construir con facilidad un sistema eléctrico que se comportaría exactamente igual al sistema térmico si es que hacemos la relación

$$\frac{hA}{\rho CV} = \frac{1}{R_{\text{tér}}C_{\text{tér}}} \qquad R_{\text{tér}} = \frac{1}{hA} \qquad C_{\text{tér}} = \rho CV$$

igual a $1/R_eC_e$, donde R_e y C_e son la resistencia eléctrica y capacitancia, respectivamente. En el sistema térmico almacenamos energía, mientras que en el sistema eléctrico almacenamos carga eléctrica. El flujo de energía en el sistema térmico se llama calor, y el flujo de carga se llama corriente eléctrica. La cantidad $C\rho V/hA$ se llama la constante de tiempo del sistema, puesto que ésta tiene las dimensiones de tiempo. Cuando

$$\tau = \frac{C\rho V}{hA}$$

se puede notar que la diferencia de temperatura $T - T_\infty$ tiene un valor de 36.8% de la diferencia inicial $T_0 - T_\infty$.

Ejemplo 4-1

Una bola de acero de 2 plg de diámetro, inicialmente a una temperatura uniforme de 850°F, de repente se coloca en un ambiente controlado en el que la temperatura se mantiene a 200°F. El coeficiente de transferencia de calor por convección es igual a 2 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese el tiempo requerido para que la bola alcance una temperatura de 300°F usando el método de análisis de capacidad concentrada.

Solución. La Ec. (4-5) se aplica para este problema. Las propiedades y cantidades para usarse en esta ecuación son

$T = 300°\text{F}$ $\qquad h = 2$ Btu/hr-pie²-°F
$T_\infty = 200°\text{F}$ $\qquad \rho = 490$ lb$_m$/pie³
$T_0 = 850°\text{F}$ $\qquad C = 0.11$ Btu/lb$_m$-°F

$$\frac{hA}{\rho CV} = \frac{(2)(4\pi)(\frac{1}{12})^2}{(490)(0.11)(4\pi/3)(\frac{1}{12})^3} = 1.34 \text{ hr}^{-1}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-(hA/\rho CV)\tau}$$

$$\frac{300 - 200}{850 - 200} = e^{-1.34\tau}$$

$$\tau = 1.39 \text{ hr}$$

Librodot

Los sistemas de capacidad térmica concentrada múltiple pueden tratarse de una manera similar a los analizados anteriormente. Esos sistemas pueden encontrarse cuando materiales compuestos están sujetos a cambios en el ambiente. Si se conoce el tamaño y el tipo del material, es fácil determinar la capacidad térmica de cada "concentración" del sistema; pero para sistemas múltiples, la resistencia térmica que conecta a las concentraciones debe también determinarse. Si se fuera a considerar un sistema de doble concentración que consistiera en dos materiales sólidos unidos uno a otro, la resistencia que los conecta sería una resistencia de conducción determinada por la conductividad y tipo de cada material. Por otro lado, si el sistema de concentración doble consistiera en una cantidad de agua dentro de un recipiente metálico con paredes gruesas, la resistencia se debería a la convección entre el agua y el recipiente. Para cada problema en particular, un método diferente puede necesitarse para determinar la resistencia de conexión entre las concentraciones. Para propósitos de ilustración, un sistema de concentración doble tal como el recipiente de agua será analizado para mostrar el método de ataque.

Supóngase que se tiene un recipiente de agua (u otro líquido) como se muestra en la Fig. 4-3. El coeficiente de transferencia de calor entre el agua y el recipiente es h_1, y el que hay entre el reci-

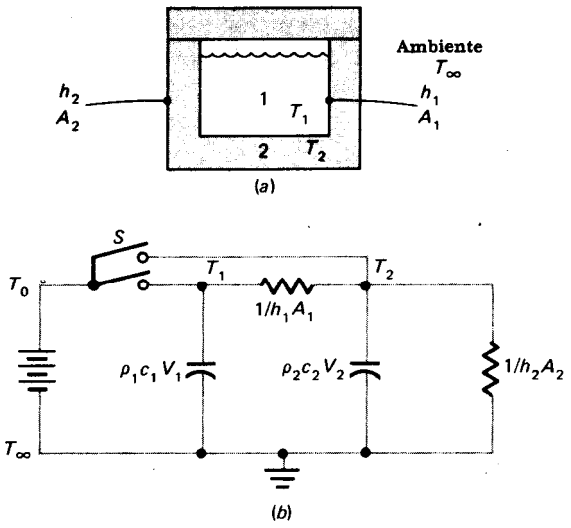


FIG. 4-3. Nomenclatura para el análisis de capacidad térmica de doble concentración

Librodot

piente y el ambiente es h_2. El agua y el recipiente están inicialmente a una temperatura T_0, y se enfrían en presencia de un ambiente a temperatura T_∞. Se hace un balance de energía en cada una de las concentraciones,

Cuerpo 1:
$$h_1A_1(T_1 - T_2) = -\rho_1C_1V_1\frac{dT_1}{d\tau} \tag{4-6}$$

Cuerpo 2:
$$h_1A_1(T_2 - T_1) + h_2A_2(T_2 - T_\infty) = -\rho_2C_2V_2\frac{dT_2}{d\tau} \tag{4-7}$$

Tenemos dos ecuaciones diferenciales lineales simultáneas las cuales pueden resolverse para determinar la historia de temperatura en cada uno de los cuerpos. Las condiciones de frontera para usarse con estas ecuaciones son

$$T_1 = T_2 = T_0 \quad \text{en } \tau = 0$$

lo cual implica que $dT_1/d\tau = 0$ en $\tau = 0$ de la Ec. (4-3).

Las Ecs. (4-3) y (4-4) pueden reescribirse en forma de operadores como

$$\left(D + \frac{h_1A_1}{\rho_1C_1V_1}\right)T_1 - \frac{h_1A_1}{\rho_1C_1V_1}T_2 = 0 \tag{4-6a}$$

$$-\frac{h_1A_1}{\rho_2C_2V_2}T_1 + \left(D + \frac{h_1A_1 + h_2A_2}{\rho_2C_2V_2}\right)T_2 = \frac{h_2A_2}{\rho_2C_2V_2}T_\infty \tag{4-7a}$$

donde el símbolo D denota diferenciación con respecto al tiempo. Por conveniencia, sea

$$K_1 = \frac{h_1A_1}{\rho_1C_1V_1}$$

$$K_2 = \frac{h_1A_1}{\rho_2C_2V_2}$$

$$K_3 = \frac{h_2A_2}{\rho_2C_2V_2}$$

Entonces
$$(D + K_1)T_1 - K_1T_2 = 0$$
$$-K_2T_1 + (D + K_2 + K_3)T_2 = K_3T_\infty$$

Resolviendo las ecuaciones simultáneamente, obtenemos para la ecuación diferencial que involucra únicamente T_1

$$[D^2 + (K_1 + K_2 + K_3)D + K_1K_3]T_1 = K_1K_3T_\infty \tag{4-8}$$

cuya solución general es

$$T = T_\infty + Me^{m_1\tau} + Ne^{m_2\tau} \tag{4-9}$$

donde m_1 y m_2 están dadas por

Librodot

$$m_1 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) + [(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1K_3]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (4\text{-}10)$$

$$m_2 = \frac{-(K_1 + K_2 + K_3) - [(K_1 + K_2 + K_3)^2 - 4K_1K_3]^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (4\text{-}11)$$

Las constantes arbitrarias M y N pueden obtenerse aplicando las condiciones iniciales

$$T_1 = T_0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

y

$$\frac{dT_1}{d\tau} = 0 \qquad \text{en } \tau = 0$$

así que

$$T_0 = T_\infty + M + N$$
$$0 = m_1M + m_2N$$

La solución final es

$$\frac{T_1 - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{m_2}{m_2 - m_1} e^{m_1\tau} - \frac{m_1}{m_2 - m_1} e^{m_2\tau} \quad (4\text{-}12)$$

La solución para T_2 puede obtenerse sustituyendo la relación para T_1 de la Ec. (4-12) en la Ec. (4-6).

Cuando un sistema de triple concentración está involucrado, se deben escribir tres ecuaciones diferenciales simultáneas; cuatro ecuaciones son necesarias para un sistema de cuatro concentraciones, y así sucesivamente. Además, pueden aplicarse condiciones de frontera variando con el tiempo. En esos casos más complejos el método de transformada de Laplace se usa frecuentemente para facilitar la obtención de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

La red análoga para el sistema de doble concentración se muestra en la Fig. 4-3*b*. Cuando el interruptor S se cierra, las dos capacitancias térmicas se cargan al potencial T_0. En tiempo cero el interruptor se abre, y esas capacitancias se descargan a través de las resistencias térmicas mostradas.

Para indicar la aplicación del análisis de la capacidad concentrada para sólidos, considérese el sistema mostrado en la Fig. 4-4. Con el fin de mostrar cómo se analiza éste, usamos únicamente dos nodos para indicar la resistencia que los conecta. En un problema práctico, habría nodos adicionales conectados y resistencias adicionales. Como en el ejemplo anterior, se escribe una ecuación diferencial para cada nodo, y el conjunto de ecuaciones resultantes se resuelve para obtener la respuesta de temperatura en estado transitorio. Si el número de nodos es muy grande, por lo general es mejor recurrir a una solución numérica, como se indicará en secciones posteriores de este capítulo.

Librodot

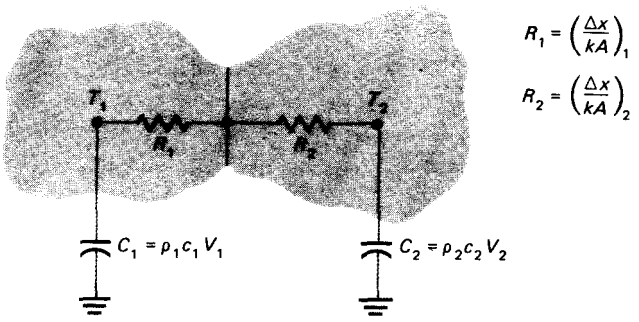


FIG. 4-4. Capacidades concentradas para sólidos en contacto

Aplicabilidad del análisis de capacidad concentrada

Hemos notado antes que el tipo de análisis de capacidad concentrada supone una distribución de temperatura uniforme a través del cuerpo sólido, y que la suposición es equivalente a decir que la resistencia de convección en la superficie es grande comparada con la resistencia de conducción interna. Se espera que tal análisis pueda dar estimaciones razonables cuando se satisface la siguiente condición:

$$\frac{h(V/A)}{k} < 0.1$$

donde k es la conductividad térmica del sólido. En las secciones que siguen examinaremos aquellas situaciones en que esta condición no se aplica.

4-3 FLUJO TRANSITORIO DE CALOR EN UN SOLIDO SEMIINFINITO

Considérese el sólido semiinfinito mostrado en la Fig. 4-5 el cual se mantiene a una temperatura inicial T_i. La temperatura de la superficie se disminuye repentinamente y se mantiene a una temperatura T_0, y se busca una expresión para la distribución de temperatura en la placa como una función del tiempo. Esta distribución de temperatura puede usarse subsecuentemente para calcular el flujo de calor en cualquier posición x en el sólido como una función del tiempo. Al suponer propiedades constantes, la ecuación diferencial para la distribución de temperatura $T(x, \tau)$ es

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-13}$$

Librodot

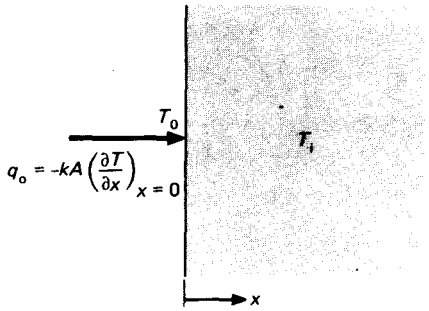


FIG. 4-5. Nomenclatura para flujo de calor transitorio en un sólido semiinfinito

Las condiciones de frontera e inicial son

$$T(x, 0) = T_i$$
$$T(0, \tau) = T_0 \quad \text{para } \tau > 0$$

Este es un problema que puede resolverse por la técnica de transformada de Laplace. La solución se da en la Ref. 1 como

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} \tag{4-14}$$

donde la función de error (erf) de Gauss se define como

$$\text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\,d\eta \tag{4-15}$$

Debe notarse que en esta definición η es una variable muda y la integral es una función de su límite superior. Al introducir la definición de la función de error en la Ec. (4-14), la expresión para la distribución de temperatura es

$$\frac{T(x, \tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\alpha\tau}} e^{-\eta^2}\,d\eta \tag{4-16}$$

El flujo de calor en cualquier posición x puede obtenerse de

$$q_x = -kA\,\frac{\partial T}{\partial x}$$

Ejecutando la diferenciación parcial de la Ec. (4-16),

$$\frac{\partial T}{\partial x} = (T_i - T_0)\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2/4\alpha\tau}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)$$
$$= \frac{T_i - T_0}{\sqrt{\pi\alpha\tau}}\,e^{-x^2/4\alpha\tau} \tag{4-17}$$

Librodot

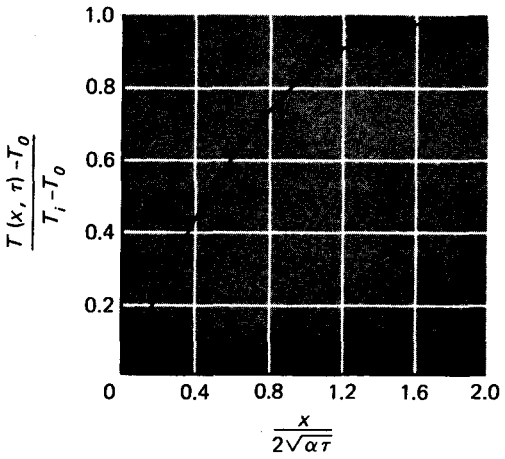


FIG. 4-6. Distribución de temperatura en el sólido semiinfinito

El flujo de calor en la superficie es

$$q_0 = \frac{kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha\tau}} \tag{4-18}$$

Y se determina evaluando el gradiente de temperatura en $x = 0$ de la Ec. (4-17). En la Fig. 4-6 se da una gráfica de la distribución de temperatura para el sólido semiinfinito. En la Ref. 3 se tabulan valores de la función error y en el Apéndice A se da una tabla abreviada.

Flujo de calor constante

Para la misma distribución de temperatura inicial uniforme, podríamos repentinamente exponer la superficie a un flujo de calor por unidad de área constante q_0/A. Las condiciones inicial y de frontera en la Ec. (4-13) serían

$$T(x,0) = T_i$$
$$\frac{q_0}{A} = -k\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0} \quad \text{para } \tau > 0$$

La solución para este caso es

$$T - T_i = \frac{2q_0\sqrt{\alpha\tau/\pi}}{kA}\exp\left(\frac{-x^2}{4\alpha\tau}\right) - \frac{q_0 x}{kA}\left[1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}\right)\right] \tag{4-19}$$

Ejemplo 4-2

A una placa grande de aluminio con una temperatura uniforme de 450°F, se le disminuye repentinamente la temperatura de su

Librodot

superficie a 150°F. Calcúlese el tiempo requerido para que la temperatura alcance 250°F a una profundidad de 1½ plg. ¿Cuál es la energía total por unidad de superficie quitada a la placa durante este tiempo?

Solución. Podemos usar ya sea la Ec. (4-14) o la Fig. 4-6 para calcular el tiempo, y la Ec. (4-18) para calcular el flujo total de calor. Las propiedades del aluminio son

$$\begin{aligned} \alpha &= 3.66 \text{ pie}^2/\text{hr} \\ k &= 120 \text{ Btu/hr-pie-°F} \\ T_i &= 450°\text{F} \\ T_0 &= 150°\text{F} \\ T(x,\tau) &= 250°\text{F} \end{aligned}$$

$$\frac{T(x,\tau) - T_0}{T_i - T_0} = \frac{250 - 150}{450 - 150} = 0.333 = \text{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$$

De la Fig. 4-6 o del Apéndice A,

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = 0.302$$

$$\tau = 0.0117 \text{ hr} = 0.702 \text{ min}$$

$$Q_0 = \int_0^\tau q_0\, d\tau = \frac{2kA(T_0 - T_i)}{\sqrt{\pi\alpha/\tau}} = \frac{(2)(120)(150 - 450)}{(\pi 3.66/0.0117)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 2290 \text{ Btu} = 2.416 \times 10^6 \text{ joules}$$

4-4 CONDICIONES DE FRONTERA CON CONVECCION

En muchas situaciones prácticas el problema de conducción en estado transitorio está conectado con una condición de frontera convectiva en la superficie del sólido. Naturalmente, las condiciones de frontera para la ecuación diferencial deben modificarse para tomar en cuenta esta transferencia de calor por convección en la superficie. Para el problema del sólido semiinfinito anterior, ésta se expresaría como

$$hA(T_\infty - T)_{x=0} = -kA\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} \tag{4-20}$$

La solución para este problema es bastante compleja, y se trabaja en detalle por Schneider [1]. El resultado es

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = 1 - \text{erf}\, X - \left[\exp\left(\frac{hx}{k} + \frac{h^2\alpha\tau}{k^2}\right)\right]\left[1 - \text{erf}\left(X + \frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}\right)\right] \tag{4-21}$$

Librodot

donde $X = x/(2\sqrt{\alpha\tau})$
T_i = temperatura inicial del sólido
T_∞ = temperatura ambiente

Esta solución se presenta en forma gráfica en la Fig. 4-7.

Se han obtenido soluciones para otras geometrías. Los casos más importantes son aquellos que tratan con (1) placas cuyo espesor es pequeño en relación con las otras dimensiones, (2) cilindros largos, y (3) esferas que están inicialmente a una temperatura uni-

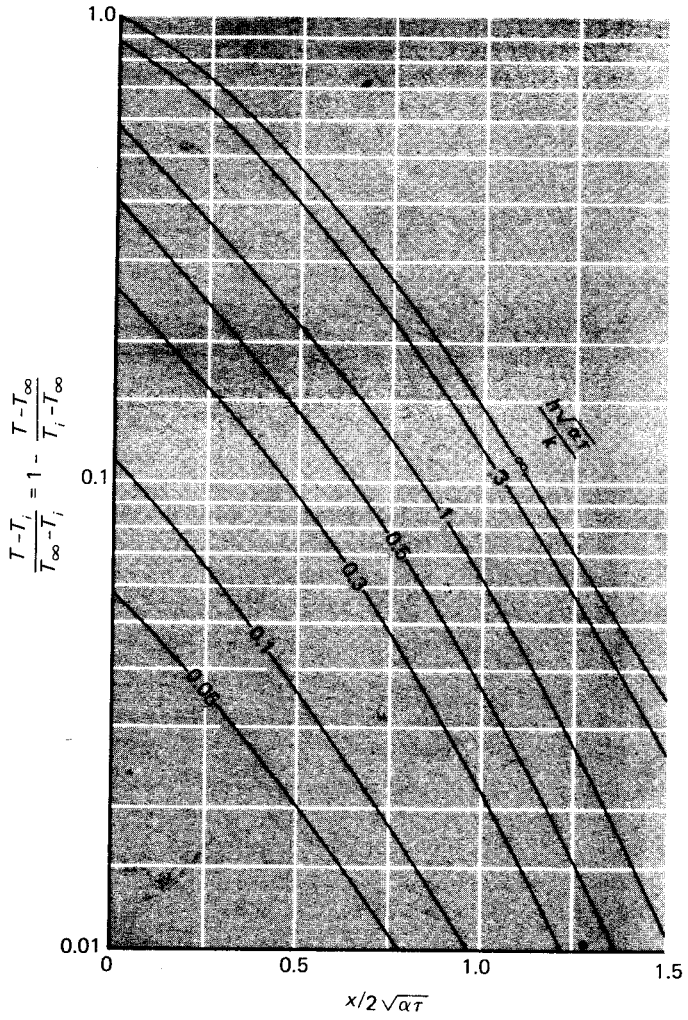


FIG. 4-7. Distribución de temperatura en el sólido semiinfinito con condición de frontera convectiva

Librodot

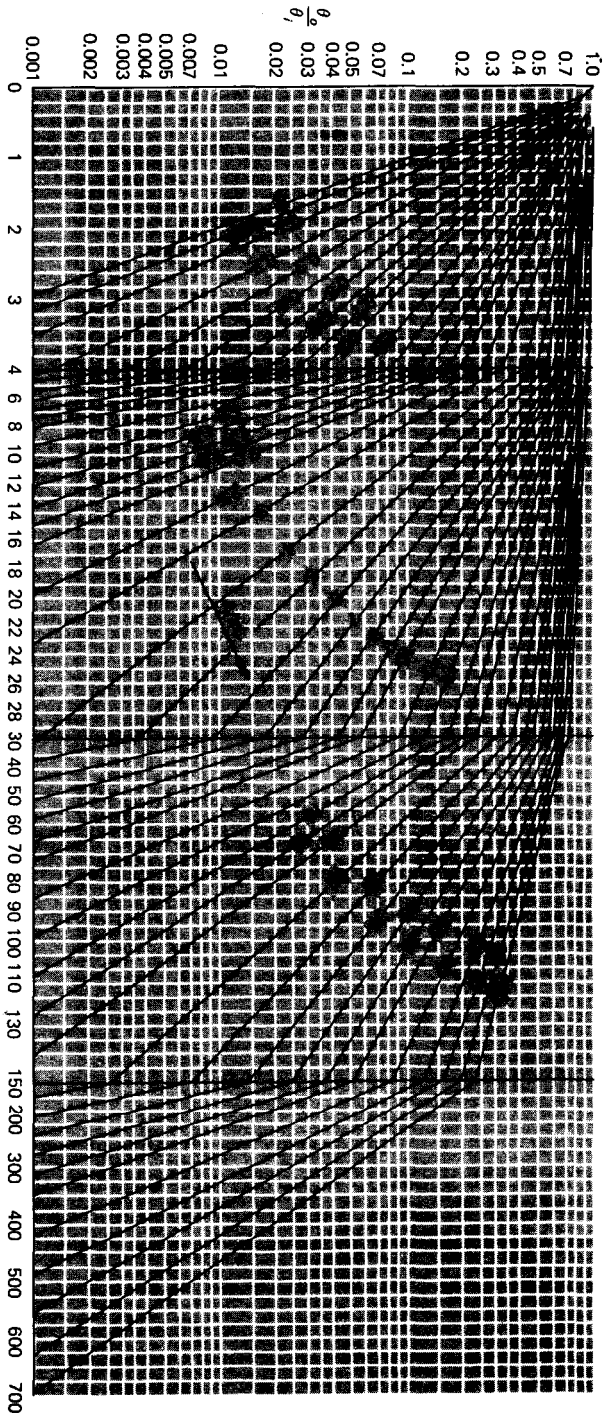


Fig. 4-8. Temperatura del plano medio para una placa infinita de espesor $2L$, de Heisler [2]

Librodot

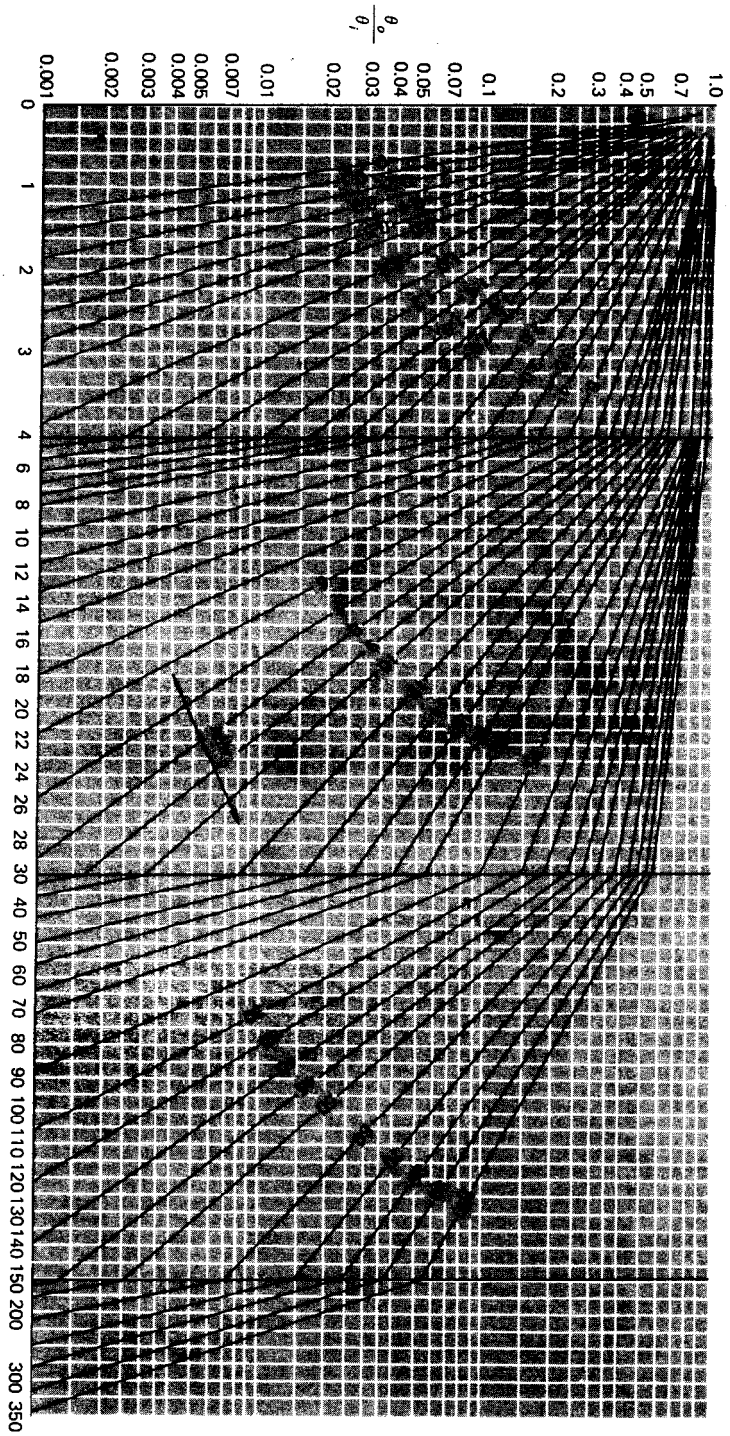


Fig. 4-9. Temperatura axial para un cilindro infinito de radio r_o, de Heisler [2]

Librodot

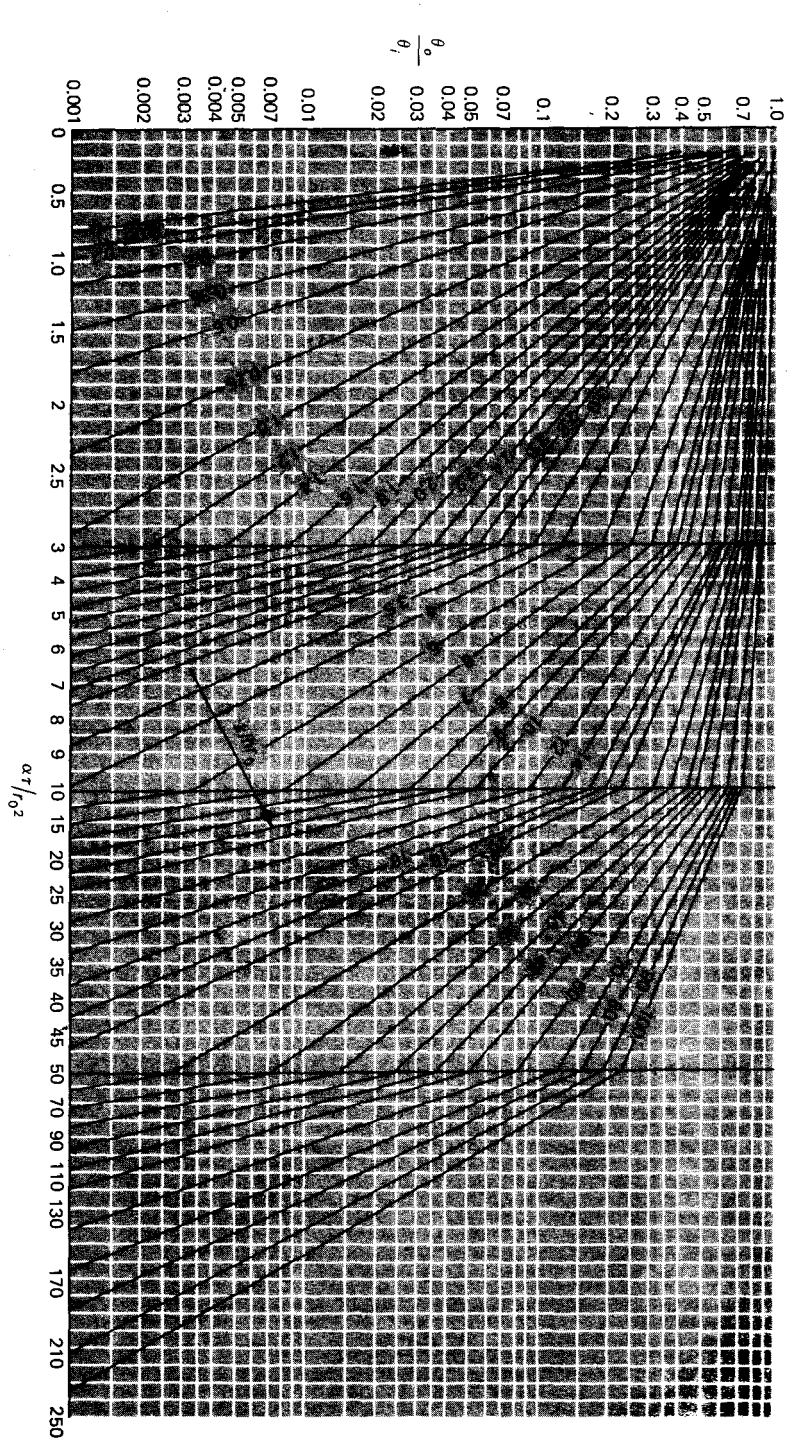


FIG. 4-10. Temperatura del centro para una esfera de radio r_o, de Heisler [2]

Librodot

forme T_i, y de repente se sumergen en un fluido a temperatura T_∞ con un coeficiente de transferencia de calor por convección h. Los resultados de estos análisis han sido presentados en forma gráfica por Heisler [2] y se dan en las Figs. 4-8 a 4-14. Las pérdidas de calor para estos tres casos se dan en las Figs. 4-15 a 4-17. En estas figuras, Q_0 representa la energía interna inicial del cuerpo en referencia a la temperatura ambiente. Así

$$Q_0 = \rho CV(T_i - T_\infty) = \rho CV\theta_i \tag{4-22}$$

Los Ejs. 4-3 a 4-5 ilustran el uso de las diferentes gráficas para la solución de problemas.

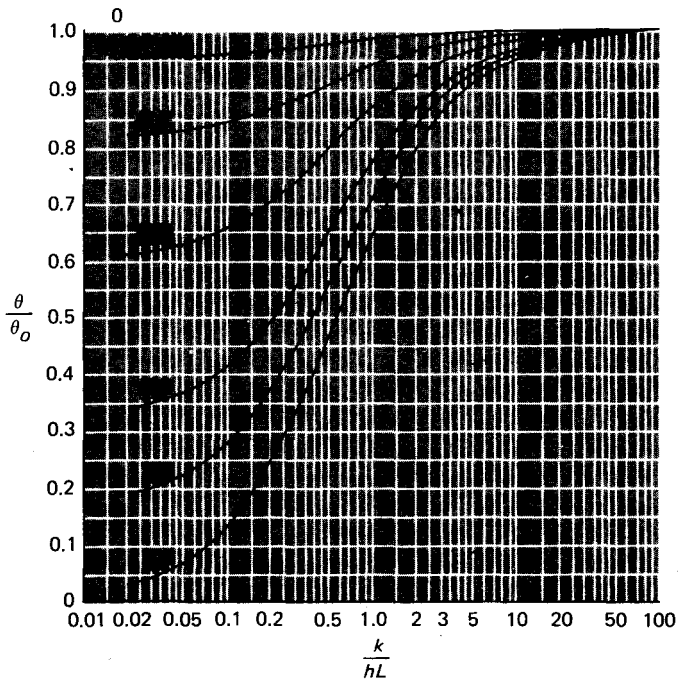


FIG. 4-11. La temperatura como una función de la temperatura del centro de una placa infinita de espesor $2L$, de Heisler [2]

Obviamente, hay muchos otros problemas de calentamiento y enfriamiento de interés práctico. Las soluciones para un gran número de casos se presentan en forma gráfica por Schneider [7], y los lectores interesados en tales cálculos encontrarán esta referencia de gran utilidad.

Librodot

Los módulos de Biot y de Fourier

Una inspección rápida de las Figs. 4-7 a 4-17 indica que los perfiles de temperatura adimensionales y los flujos de calor, pueden ser expresados en términos de dos parámetros adimensionales llamados módulos de Biot y de Fourier:

$$\text{Módulo de Biot} = \text{Bi} = \frac{hs}{k}$$

$$\text{Módulo de Fourier} = \text{Fo} = \frac{\alpha\tau}{s^2} = \frac{k\tau}{\rho c s^2}$$

En esos parámetros, s designa alguna dimensión característica del cuerpo; para la placa ésta es el semiespesor, mientras que para el cilindro y la esfera ésta es el radio. El módulo de Biot compara las magnitudes relativas de las resistencias de convección superficial y conducción interna a la transferencia de calor. El módulo de Fourier compara una dimensión característica del cuerpo con la profundidad de penetración aproximada para un tiempo dado τ.

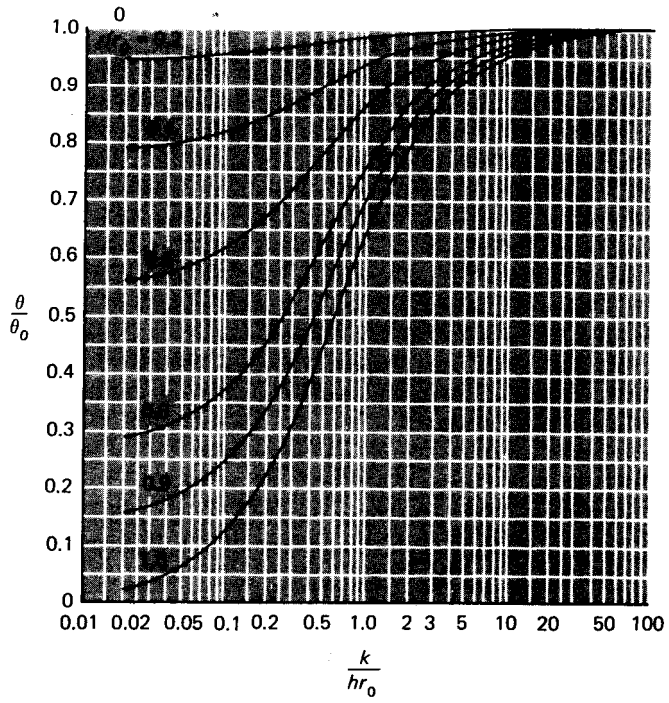


FIG. 4-12. La temperatura como una función de la temperatura del eje en un cilindro infinito de radio r_0, de Heisler [2]

Librodot

Un valor muy bajo del módulo de Biot significa que la resistencia de conducción interna es despreciable en comparación con la resistencia de convección superficial. Esto implica que la temperatura será casi uniforme a través del sólido, y su comportamiento puede ser aproximado por el método de análisis de capacidad concentrada. Es interesante notar que el exponente de la Ec. (4-5) puede expresarse en términos de los módulos de Biot y de Fourier, si uno toma en cuenta la razón V/A como la dimensión característica s. Entonces,

$$\frac{hA}{\rho c V}\tau = \frac{h\tau}{\rho c s} = \frac{hs}{k}\frac{k\tau}{\rho c s^2} = \text{BiFo}$$

Aplicabilidad de las gráficas de Heisler

Las gráficas de Heisler están restringidas a valores del módulo de Fourier ($\alpha\tau/s^2$) mayor que 0.2. Para valores más pequeños de este parámetro, el lector deberá consultar las soluciones y gráficas dadas en las diferentes referencias del final del capítulo.

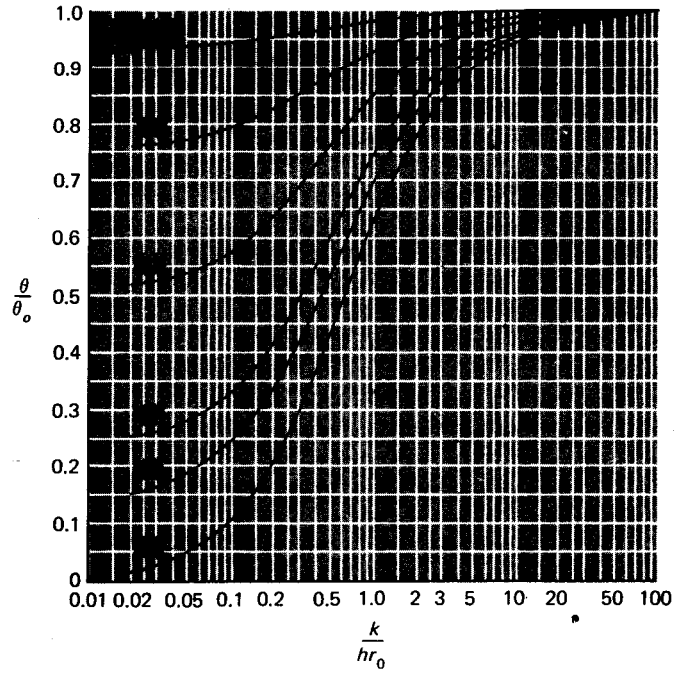


FIG. 4-13. La temperatura como una función de la temperatura del centro, para una esfera de radio r_0, de Heisler [2]

Librodot

Ejemplo 4-3

La placa del Ej. 4-2 de repente se expone superficialmente a un ambiente convectivo de 150°F. El coeficiente de transferencia de calor es de 100 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese el tiempo requerido para que la temperatura alcance 250°F a una profundidad de 1½ plg.

Solución. Podemos hacer uso de la Ec. (4-21) o de la Fig. 4-7 para la solución de este problema. La Fig. 4-7 es más fácil de aplicar, así que se utilizará. Nótese que se requiere una solución por el método de tanteos, debido a que el tiempo aparece en ambas variables $(h\sqrt{\alpha\tau})/k$ y $x/(2\sqrt{\alpha\tau})$. Por lo tanto, probaremos valores para τ hasta que obtengamos

$$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i} = \frac{250 - 450}{150 - 450} = 0.667$$

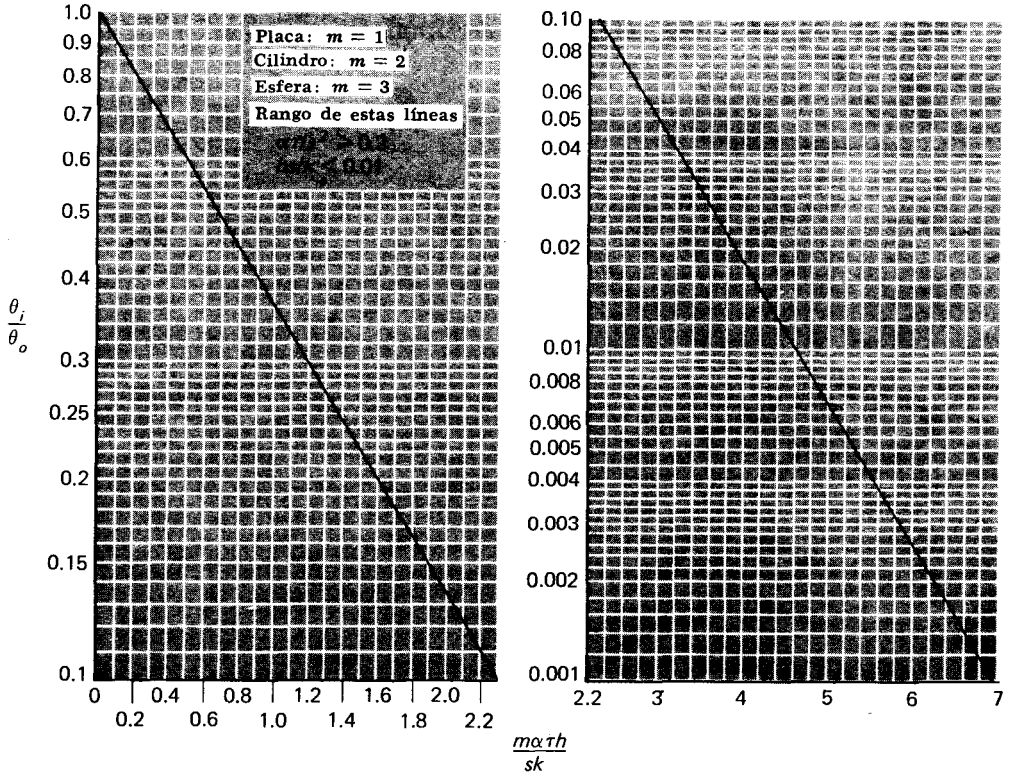


FIG. 4-14. Temperaturas en el centro de placas, cilindros y esferas, para valores pequeños de h, de acuerdo con Heisler [2]

Librodot

Los tanteos se listan en seguida:

τ, hr	$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k}$	$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}}$	$\frac{T - T_i}{T_\infty - T_i}$ (de la Fig. 4-7)
0.3	0.871	0.0597	0.475
1.0	1.59	0.0345	0.66

En consecuencia, el tiempo requerido es aproximadamente de 1 hr.

Ejemplo 4-4

Una placa grande de aluminio de 2 plg de espesor e inicialmente a 450°F, de repente se expone al ambiente convectivo del Ej 4-3. Calcúlese la temperatura a ½ plg de una de las caras, 1 min después de que la placa ha sido expuesta al ambiente. ¿Cuánta energía por unidad de área se ha eliminado de la placa en este tiempo?

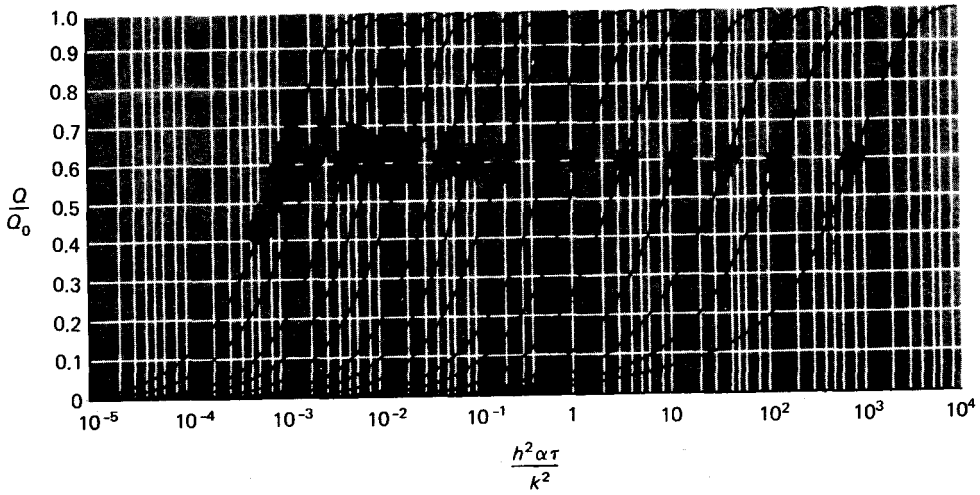


FIG. 4-15. Pérdida de calor adimensional Q/Q_0 con respecto al tiempo, en una placa infinita de espesor $2L$, de Gröber [6]

Solución. Las gráficas de Heisler de las Figs. 4-8 y 4-11 pueden usarse para la solución de este problema. Primero calculamos la temperatura del centro de la placa utilizando la Fig. 4-8, y en seguida la Fig. 4-11 para calcular la temperatura en la posición especificada x. De las condiciones del problema tenemos

Librodot

$\theta_i = T_i - T_\infty = 450 - 150 = 300$
$\alpha = 3.66$ pie²/hr
L = 1 plg = 0.0833 pie
τ = 1 min = 0.0167 hr
$k = 120$ Btu/hr-pie-°F
$h = 100$ Btu/hr-pie²-°F

$$\frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(3.66)(0.0167)}{(0.0833)^2} = 8.79$$
$$\frac{k}{hL} = \frac{120}{(100)(0.0833)} = 14.4$$
$$\frac{x}{L} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = 0.5$$

De la Fig. 4-8

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.6$$
$$\theta_0 = T_0 - T_\infty = (0.6)(300) = 180$$

De la Fig. 4-11, en $x/L = 0.5$,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$
$$\theta = T - T_\infty = (0.98)(180) = 176$$
$$T = 176 + 150 = 326°F$$

Calculamos la energía perdida por la placa utilizando la 4-15. Para este cálculo

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(100)^2(3.66)(0.0167)}{(120)^2} = 0.043$$
$$\frac{hL}{k} = \frac{(100)(0.0833)}{120} = 0.0695$$

Por unidad de área

$$Q_0 = \rho CV\theta_i = \rho CA2L\theta_i$$
$\rho = 169$ lb$_m$/pie³
$C = 0.21$ Btu/lb$_m$-°F
$$Q_0 = (169)(0.21)(1)(\tfrac{2}{12})(300) = 1\,770 \text{ Btu}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.47$$

así que $Q = (0.47)(1\,770) = 833$ Btu $(8.79 \times 10^5$ J)

Librodot

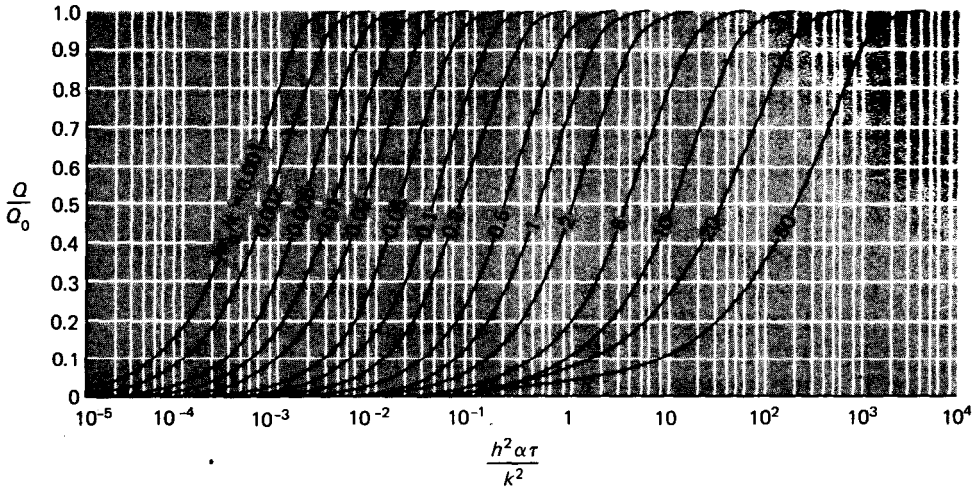


FIG. 4-16. Pérdida de calor adimensional Q/Q_0 con respecto al tiempo, en un cilindro infinito de radio r_0, de Gröber [6]

Ejemplo 4-5

Un cilindro largo de aluminio de 2 plg de diámetro e inicialmente a 450°F, de repente se expone a un ambiente convectivo, donde $h = 100$ Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese la temperatura a un radio de ½ plg, y el calor perdido por unidad de longitud del cilindro, 1 min después que éste se ha expuesto al ambiente a 150°F.

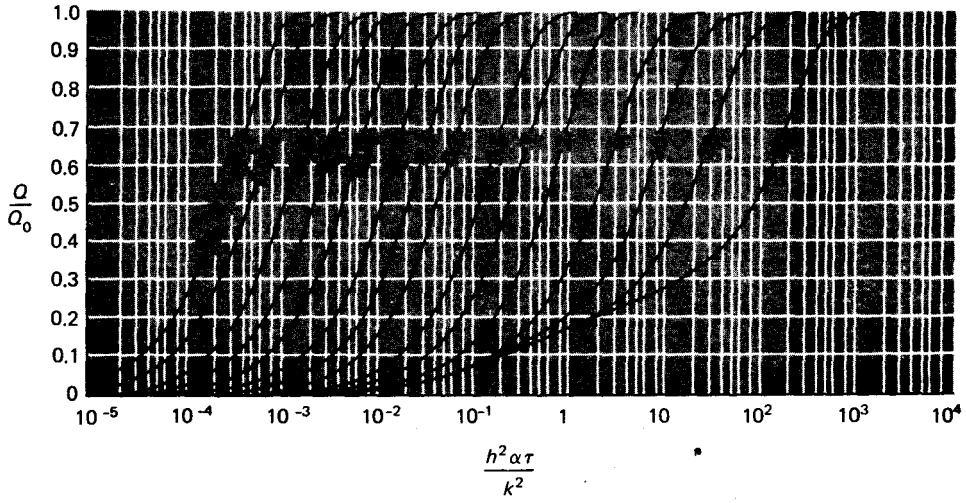


FIG. 4-17. Pérdida de calor adimensional Q/Q_0 con respecto al tiempo, en una esfera de radio r_0, de Gröber [6]

Librodot

Solución. Las gráficas de Heisler de las Figs. 4-9 y 4-12 se usan en la solución (similar al Ej. 4-4) de este problema. Primero usamos la Fig. 4-9 para calcular la temperatura del eje del cilindro, y en seguida la Fig. 4-12 para calcular la temperatura en la posición radial especificada. De las condiciones del problema,

$$\theta_i = T_i - T_\infty = 450 - 150 = 300$$
$$\alpha = 3.66 \text{ pie}^2/\text{hr}$$
$$r_o = 1 \text{ plg} = 0.0833 \text{ pie}$$
$$\tau = 1 \text{ min} = 0.0167 \text{ hr}$$
$$k = 120 \text{ Btu/hr-pie-°F}$$
$$h = 100 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{-°F}$$

$$\frac{\alpha\tau}{r_o^2} = \frac{(3.66)(0.0167)}{(0.0833)^2} = 8.79$$
$$\frac{k}{hr_o} = \frac{120}{(100)(0.0833)} = 14.4$$
$$\frac{r}{r_o} = \frac{0.5}{1.0} = 0.5$$

De la Fig. 4-9

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.3$$
$$\theta_0 = T_0 - T_\infty = (0.3)(300) = 90$$

De la Fig. 4-12, en $r/r_o = 0.5$,

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$
$$\theta = T - T_\infty = (0.98)(90) = 88$$
$$T = 88 + 150 = 238°\text{F}$$

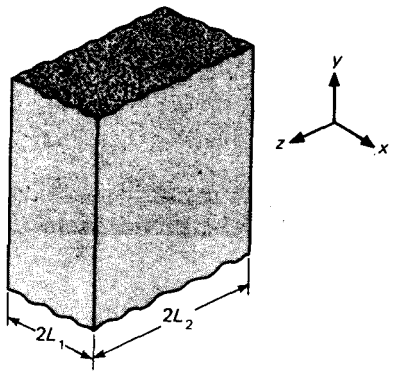


FIG. 4-18. Barra rectangular infinita

Librodot

Calculamos la energía disipada por el cilindro usando la Fig. 4-16. Para este cálculo

$$\frac{h^2\alpha\tau}{k^2} = \frac{(100)^2(3.66)(0.0167)}{(120)^2} = 0.043$$
$$\frac{hr_o}{k} = \frac{(100)(0.0833)}{120} = 0.0695$$

Por unidad de longitud

$$Q_0 = \rho C V \theta_i = \rho C \pi r_o^2 L \theta_i$$
$$Q_0 = (169)(0.21)\pi(0.0833)^2(1)(300) = 233 \text{ Btu}$$

De la Fig. 4-16

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.71$$

así que $Q = (0.71)(233) = 165$ Btu $\quad (1.74 \times 10^6$ J)

4-5 SISTEMAS DE DIMENSIONES MULTIPLES

Las gráficas de Heisler discutidas anteriormente pueden usarse para obtener la distribución de temperatura en la placa infinita de espesor $2L$, en el cilindro largo o en la esfera. Cuando una pared cuyas dimensiones de altura y profundidad no son grandes comparadas con el espesor, o cuando un cilindro cuya longitud no es grande comparada con su diámetro, se requieren coordenadas en el espacio adicionales para especificar la temperatura, y dado que las gráficas anteriores no son aplicables, estamos forzados a buscar otro método de solución. Afortunadamente, es posible combinar las soluciones para los sistemas unidimensionales en una forma muy directa, con el objeto de obtener soluciones para los problemas de dimensiones múltiples.

Es claro que la barra rectangular infinita de la Fig. 4-18, puede estar formada por dos placas infinitas de espesor $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente. La ecuación diferencial que gobierna esta situación sería

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-23}$$

y para usar el método de separación de variables con el objeto de efectuar una solución, debemos suponer una solución producto de la forma

$$T(x, z, \tau) = X(x)Z(z)\Theta(\tau)$$

Librodot

Puede mostrarse que la distribución de temperatura adimensional es posible expresarla como un producto de las soluciones para las dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente,

$$\left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{\text{barra}} = \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{2L_1\ \text{placa}} \left(\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)_{2L_2\ \text{placa}} \tag{4-24}$$

donde T_i es la temperatura inicial de la barra, y T_∞ es la temperatura ambiente.

Para dos placas infinitas, las ecuaciones diferenciales respectivas serían

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_1}{\partial \tau} \qquad \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T_2}{\partial \tau} \tag{4-25}$$

y las soluciones producto supuestas serían

$$T_1 = T_1(x,\tau) \qquad T_2 = T_2(z,\tau) \tag{4-26}$$

Ahora, mostraremos que la solución producto a la Ec. (4-23) puede formarse de un producto simple de las funciones (T_1,T_2), esto es

$$T(x,z,\tau) = T_1(x,\tau)T_2(z,\tau) \tag{4-27}$$

Las derivadas apropiadas para sustituir en la Ec. (4-23) se obtienen de la Ec. (4-27) como

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = T_1\frac{\partial T_2}{\partial \tau} + T_2\frac{\partial T_1}{\partial \tau}$$

Usando las Ecs. (4-25), tenemos que

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \alpha T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

Al sustituir esas relaciones en la Ec. (4-23), se obtiene

$$T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha}\left[\alpha T_1\frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} + \alpha T_2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}\right]$$

lo que indica que la solución producto supuesta de la Ec. (4-27) realmente satisface la ecuación diferencial original (4-23). Esto significa que la distribución de temperatura adimensional para la barra rectangular infinita, puede expresarse como un producto de las soluciones para los problemas de las dos placas de espesores $2L_1$ y $2L_2$, respectivamente, como se indica en la Ec. (4-24).

En una forma semejante a la descrita anteriormente, la solución para un bloque tridimensional puede expresarse como un producto

Librodot

de las soluciones de las tres placas infinitas que tienen los espesores de los tres lados del bloque. Similarmente, una solución para un cilindro de longitud finita podría expresarse como un producto de soluciones, de un cilindro infinito y una placa infinita con un espesor igual a la longitud del cilindro. Podrían combinarse también las soluciones del cilindro infinito y el sólido semiinfinito para obtener distribuciones de temperatura en cilindros y barras semiinfinitos. Algunas de las combinaciones se resumen en la Fig. 4-19, donde

$C(\theta)$ = solución para el cilindro infinito
$P(X)$ = solución para la placa infinita
$S(X)$ = solución para el sólido semiinfinito

Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las diferentes gráficas para calcular temperaturas en sistemas multidimensionales.

Ejemplo 4-6

Un cilindro pequeño de aluminio de 2 plg de diámetro y 4 plg de longitud, está inicialmente a una temperatura uniforme de 450°F. En forma repentina se expone a un ambiente convectivo a 150°F, donde h = 100 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese la temperatura a una posición radial de ½ plg y a una distancia de ¼ plg de uno de los extremos del cilindro, 1 min después de que se expone al ambiente.

Solución. Para resolver este problema, combinamos las soluciones de las gráficas de Heisler para un cilindro infinito y una placa infinita, de acuerdo con la combinación mostrada en la Fig. 4-19.

Para el problema de la placa infinita correspondiente

$$L = 2 \text{ plg} = 0.167 \text{ pie}$$

La posición x se mide del centro de la placa, así que

$$x = 2 - 0.25 = 1.75 \text{ plg}$$

y

$$\frac{x}{L} = \frac{1.75}{2.0} = 0.875$$

Las propiedades del aluminio son

$\alpha = 3.66$ pie²/hr
$k = 120$ Btu/hr-pie-°F

Librodot

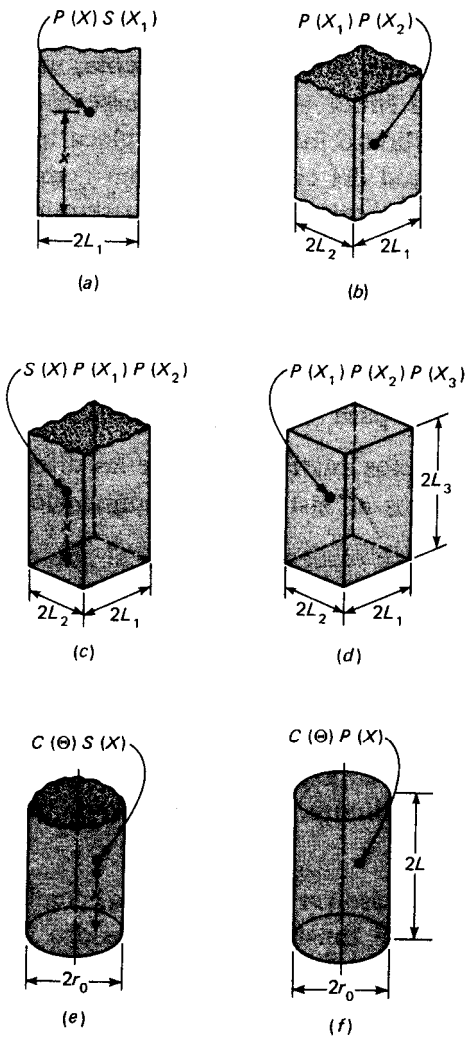


FIG. 4-19. Producto de soluciones para temperaturas en sistemas de dimensiones múltiples. (a) Placa semiinfinita; (b) barra rectangular infinita; (c) barra rectangular semiinfinita; (d) paralelepípedo rectangular; (e) cilindro semiinfinito; (f) cilindro corto

así que los parámetros para usarse con las Figs. 4-8 y 4-11 son

$$\frac{k}{hL} = \frac{120}{(100)(0.167)} = 7.2$$

$$\frac{\alpha\tau}{L^2} = \frac{(3.66)(0.0167)}{(0.167)^2} = 2.19$$

De la Fig. 4-8

Librodot

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.8$$

y de la Fig. 4-11

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.95$$

así que

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{placa}} = (0.8)(0.95) = 0.76 = P(X)$$

Para el cilindro

$$r_o = 1\,\text{plg} = 0.0833\,\text{pie}$$
$$\frac{r}{r_o} = \frac{0.5}{1.0} = 0.5$$
$$\frac{k}{hr_o} = \frac{120}{(100)(0.0833)} = 14.4$$
$$\frac{\alpha\tau}{r_o^2} = \frac{(3.66)(0.0167)}{(0.0833)^2} = 8.79$$

De la Fig. 4-9

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.3$$

y de la Fig. 4-12

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.98$$

así que

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\text{cilindro}} = (0.3)(0.98) = 0.294 = C(\Theta)$$

Al combinar las soluciones para la placa y el cilindro,

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{cilindro}\\\text{corto}}} = C(\Theta)P(X) = (0.294)(0.76) = 0.223$$

Por consiguiente

$$T = T_\infty + 0.223(T_i - T_\infty)$$
$$T = 150 + (0.223)(450 - 150) = 217°\text{F}$$

Ejemplo 4-7

Un cilindro semiinfinito de 2 plg de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 450°F. En forma repentina se sujeta a una condición de frontera de convección a 150°F, donde

Librodot

$h = 100$ Btu/hr-pie²-°F. Calcúlense las temperaturas en el eje y en la superficie del cilindro a 6 plg del extremo, 1 min después de que se expone al ambiente.

Solución. Para resolver este problema combinamos las soluciones para el cilindro infinito y la placa semiinfinita, de acuerdo con la combinación mostrada en la Fig. 4-19.

Para el problema correspondiente a la placa semiinfinita

$$x = 6 \text{ plg} = 0.5 \text{ pie}$$

Las propiedades del aluminio son

$\alpha = 3.66$ pie²/hr
$k = 120$ Btu/hr-pie-°F

así que los parámetros para usarse con la Fig. 4-7 son

$$\frac{h\sqrt{\alpha\tau}}{k} = \frac{100\sqrt{(3.66)(0.0167)}}{120} = 0.206$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha\tau}} = \frac{0.5}{2\sqrt{(3.66)(0.0167)}} = 1.01$$

De la Fig. 4-7

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{placa}\\ \text{semiinfinita}}} = 1 - 0.016 = 0.984 = S(X)$$

Para la solución del cilindro infinito, buscamos las razones de la temperatura del eje y de la superficie. Los parámetros significativos para usarse con la Fig. 4-9 son

$$r_o = 1 \text{ plg} = 0.0833 \text{ pie}$$

$$\frac{k}{hr_o} = 14.4$$

$$\frac{\alpha\tau}{r_o^2} = 8.79$$

De la Fig. 4-9

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.3$$

Esta es la razón de la temperatura del eje. Para encontrar la razón de la temperatura de la superficie entramos a la Fig. 4-12, usando

$$\frac{r}{r_o} = 1.0$$

así que

$$\frac{\theta}{\theta_0} = 0.97$$

Librodot

Por lo tanto,

$$C(\Theta) = 0.3 \qquad \text{en } r = 0$$
$$C(\Theta) = (0.3)(0.97) = 0.29 \qquad \text{en } r = r_o$$

Al combinar las soluciones para la placa semiinfinita y el cilindro infinito,

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_{\substack{\text{placa}\\ \text{semiinfinita}}} = C(\Theta)S(X)$$
$$= (0.3)(0.984) = 0.295 \qquad \text{en } r = 0$$
$$= (0.29)(0.984) = 0.285 \qquad \text{en } r = r_o$$

Las temperaturas correspondientes son

$$T = 150 + (0.295)(450 - 150) = 239°\text{F} \qquad r = 0,\ x = 6\ \text{plg}.$$
$$T = 150 + (0.285)(450 - 150) = 235°\text{F} \qquad r = 1\ \text{plg},\ x = 6\ \text{plg}.$$

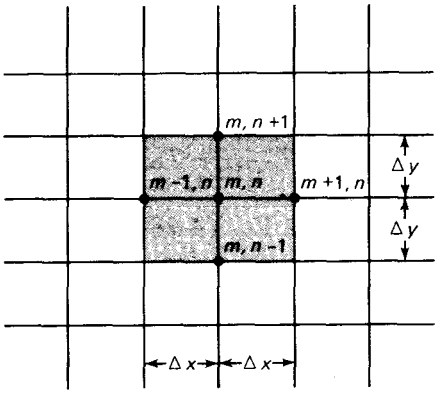


FIG. 4-20. Nomenclatura para la solución numérica de problemas de conducción bidimensional en estado transitorio

4-6 METODO NUMERICO TRANSITORIO

Las gráficas descritas arriba son muy útiles para calcular temperaturas en ciertos sólidos de forma regular, en condiciones de flujo de calor en estado transitorio. Desafortunadamente, muchas formas geométricas de interés práctico no caen en esas categorías y, además, con frecuencia uno se enfrenta a problemas en los cuales las condiciones de frontera varían con el tiempo. Estas condiciones de frontera transitoria, así como la forma geométrica del cuerpo, pueden ser de tal forma que una solución matemática no es posible. En estos casos, los problemas son tratados en forma más eficaz con una

Librodot

técnica numérica, con calculadoras manuales o computadoras, dependiendo de la exactitud requerida y las situaciones económicas involucradas. Indistintamente de que se use una calculadora manual o una computadora, el planteamiento del problema es el mismo y es el que queremos ahora describir. Por conveniencia, en la discusión limitamos el análisis a sistemas bidimensionales por lo pronto. Una extensión a tres dimensiones puede hacerse entonces fácilmente.

Considérese un cuerpo bidimensional dividido en incrementos, como se muestra en la Fig. 4-20. El subíndice m denota la posición x, y el subíndice n denota la posición y. Dentro del cuerpo sólido, la ecuación diferencial que gobierna el flujo de calor es

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} \tag{4-28}$$

suponiendo propiedades constantes. Recordamos del Cap. 3 que las segundas derivadas parciales pueden aproximarse por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{(\Delta x)^2}(T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}) \tag{4-29}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{1}{(\Delta y)^2}(T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}) \tag{4-30}$$

La derivada del tiempo en la Ec. (4-28) es aproximada por

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau} \tag{4-31}$$

En esta relación, los subíndices indican el incremento de tiempo. Al combinar las relaciones anteriores, la ecuación en diferencias equivalente a la Ec. (4-28) es

$$\frac{T^{p}_{m+1,n} + T^{p}_{m-1,n} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p}_{m,n+1} + T^{p}_{m,n-1} - 2T^{p}_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^{p}_{m,n}}{\Delta \tau} \tag{4-32}$$

Por lo tanto, si las temperaturas de los diferentes nodos son conocidas en cualquier tiempo particular, las temperaturas después de un incremento de tiempo $\Delta\tau$ pueden calcularse escribiendo una ecuación como la Ec. (4-32) para cada nodo, obteniéndose así los valores de

$$T^{p+1}_{m,n}.$$

El procedimiento puede repetirse para obtener la distribución después de cualquier número de incrementos de tiempo deseados. Si los incrementos en las coordenadas del espacio se escogen de modo que

Librodot

$$\Delta x = \Delta y$$

la ecuación resultante para $T_{m,n}^{p+1}$ dará

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\,(T_{m+1,n}^{p} + T_{m-1,n}^{p} + T_{m,n+1}^{p} + T_{m,n-1}^{p}) + \left[1 - \frac{4\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] T_{m,n}^{p} \tag{4-33}$$

Si los incrementos de tiempo y distancia se escogen convenientemente, de tal manera que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = 4 \tag{4-34}$$

se ve que la temperatura del nodo (m, n), después de un incremento de tiempo, es simplemente el promedio aritmético de las cuatro temperaturas nodales de los alrededores al comienzo del incremento de tiempo.

Cuando un sistema unidimensional se involucra, la ecuación dará

$$T_m{}^{p+1} = \frac{\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\,(T_{m+1}^{p} + T_{m-1}^{p}) + \left[1 - \frac{2\alpha\,\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\right] T_m{}^{p} \tag{4-35}$$

y si los incrementos de tiempo y distancia se escogen de tal manera que

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = 2 \tag{4-36}$$

la temperatura del nodo m después del incremento de tiempo, está dada como el promedio aritmético de las dos temperaturas nodales adyacentes al comienzo del incremento de tiempo.

En este punto se harán algunas observaciones generales concernientes al uso de métodos numéricos para la solución de problemas de conducción en estado transitorio. Hemos ya notado que la selección del valor del parámetro

$$M = \frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau}$$

gobierna la facilidad con la que procedemos a efectuar la solución numérica; el escoger un valor de 4 para un sistema bidimensional o un valor de 2 para un sistema unidimensional, hace los cálculos particularmente fáciles.

Una vez que los incrementos de distancia y el valor de M se establecen, el incremento de tiempo queda determinado; y no se puede alterar esto sin cambiar el valor de Δx o de M, o ambos. Claramente, entre mayores sean los valores de Δx y $\Delta\tau$, nuestra solución se obten-

Librodot

drá más rápidamente. Por otro lado, entre más pequeños sean esos incrementos en las variables independientes, mayor exactitud se alcanzará. A primera vista, uno podría suponer que se podrían usar incrementos pequeños de distancia para tener mayor exactitud en combinación con incrementos grandes de tiempo a fin de acelerar la solución. Este no es el caso, puesto que las ecuaciones de diferencias finitas limitan los valores de $\Delta\tau$ que pueden usarse una vez que se escoge Δx. Nótese que si $M < 2$ en la Ec. (4-35), el coeficiente de T_m^p se hace negativo, y se genera una condición que violará la segunda ley de la termodinámica. Supóngase, por ejemplo, que los nodos adyacentes son iguales en temperatura, pero menores que T_m^p. Después de un incremento de tiempo $\Delta\tau$, T_m^p no puede ser menor que esas temperaturas adyacentes; de otra manera, el calor tendría que fluir hacia arriba en la escala de temperatura, y esto es imposible. Un valor de $M < 2$ produciría justamente este efecto; así que debemos restringir los valores de M a

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = M \geq 2 \qquad \text{sistemas unidimensionales}$$

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = M \geq 4 \qquad \text{sistemas bidimensionales}$$

Esta restricción automáticamente limita el que seleccionemos un valor $\Delta\tau$, una vez que Δx está establecido.

Las restricciones anteriores, las cuales son impuestas en un sentido físico, pueden también derivarse a partir de fundamentos matemáticos. Es posible mostrar que las soluciones de diferencias finitas no convergirán, a menos que esas condiciones sean satisfechas. Los problemas de estabilidad y convergencia de las soluciones numéricas se discuten en las Refs. 7, 13 y 15, en detalle.

Las ecuaciones en diferencias dadas arriba, son útiles para determinar la temperatura interna en un sólido como una función del espacio y del tiempo. En las fronteras del sólido, una resistencia de convección al flujo de calor está involucrada por lo general, así que las relaciones anteriores no son aplicables. En general, cada condición de frontera de convección debe trabajarse por separado, dependiendo de la forma geométrica particular que se esté considerando. El caso de la pared plana se tomará como ejemplo.

Para el sistema unidimensional mostrado en la Fig. 4-21, podemos hacer un balance de energía en la frontera convectiva, de modo que

$$-kA\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{pared}} = hA(T_w - T_\infty) \tag{4-37}$$

Librodot

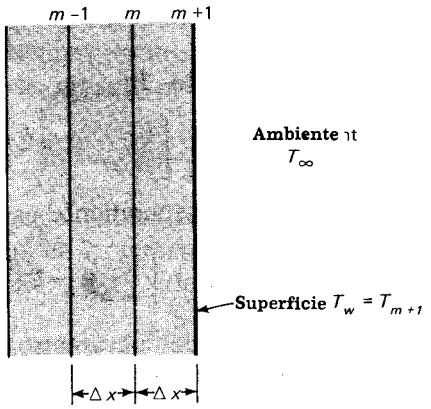


FIG. 4-21. Nomenclatura para la solución numérica del problema de conducción en estado transitorio, con condición de frontera de convección

La aproximación en diferencias finitas deberá estar dada por

$$-k\frac{\Delta y}{\Delta x}(T_{m+1} - T_m) = h\,\Delta y\,(T_{m+1} - T_\infty)$$

o

$$T_{m+1} = \frac{T_m + (h\,\Delta x/k)T_\infty}{1 + (h\,\Delta x/k)}$$

Para aplicar esta condición, debemos calcular la temperatura de la superficie T_{m+1} en cada incremento de tiempo y entonces usar esta temperatura en la ecuación nodal para los puntos interiores del sólido. Esto es sólo una aproximación porque hemos despreciado la capacidad térmica del elemento de la pared en la frontera. Esta aproximación trabajará perfectamente bien cuando se usa un número grande de incrementos en x, debido a que la porción de la capacidad térmica despreciada es pequeña en comparación con el total. Podemos tomar en cuenta la capacidad térmica en una forma general, considerando la pared bidimensional de la Fig. 3-7 expuesta a una condición de frontera de convección. Hacemos un balance de energía en estado transitorio en el nodo (m, n), igualando la suma de la energía de conducción y de convección, en el nodo, al incremento en la energía interna de éste. Así

$$k\,\Delta y\,\frac{T^p_{m-1,n} - T^p_{m,n}}{\Delta x} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^p_{m,n+1} - T^p_{m,n}}{\Delta y} + k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T^p_{m,n-1} - T^p_{m,n}}{\Delta y} + h\,\Delta y(T_\infty - T^p_{m,n}) = \rho C\,\frac{\Delta x}{2}\,\Delta y\,\frac{T^{p+1}_{m,n} - T^p_{m,n}}{\Delta \tau}$$

Librodot

Si $\Delta x = \Delta y$, la relación para $T_{m,n}^{p+1}$ dará

$$T_{m,n}^{p+1} = \frac{\alpha \Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty + 2T_{m-1,n}^{p} + T_{m,n+1}^{p} + T_{m,n-1}^{p} + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} - 2\frac{h\,\Delta x}{k} - 4\right]T_{m,n}^{p}\right\} \quad (4\text{-}38a)$$

La relación unidimensional correspondiente es

$$T_m^{p+1} = \frac{\alpha \Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left\{2\frac{h\,\Delta x}{k}T_\infty + 2T_{m-1}^{p} + \left[\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} - 2\frac{h\,\Delta x}{k} - 2\right]T_m^{p}\right\} \quad (4\text{-}38b)$$

Nótese ahora que la selección del parámetro $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ no es tan simple como para los puntos nodales interiores, debido a que el coeficiente de transferencia de calor tiene influencia para escogerlo. Es todavía mejor seleccionar el valor de este parámetro de modo que los coeficientes de T_m^p o $T_{m,n}^p$ sean cero. Estos valores deberán ser entonces

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) \quad \text{para el caso unidimensional}$$

y

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} = 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) \quad \text{para el caso bidimensional}$$

Para asegurar la convergencia de la solución numérica, todas las selecciones del parámetro $(\Delta x)^2/\alpha\Delta\tau$ deben estar restringidas de acuerdo a

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} \geq 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 1\right) \quad \text{para el caso unidimensional}$$

y

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\,\Delta\tau} \geq 2\left(\frac{h\,\Delta x}{k} + 2\right) \quad \text{para el caso bidimensional}$$

Diferencias hacia adelante y hacia atrás

Las ecuaciones anteriores han sido desarrolladas sobre la base de una técnica de *diferencias hacia adelante*, en que la temperatura de un nodo en un incremento de tiempo futuro se expresa en términos de las temperaturas nodales de los alrededores en el comienzo del incremento de tiempo. Las expresiones se llaman fórmulas *explícitas* debido a que es posible escribir las temperaturas nodales $T_{m,n}^{p+1}$ de manera explícita en términos de las temperaturas nodales previas $T_{m,n}^{p}$. En esta formulación, los cálculos proceden directamente de un incremento de tiempo al próximo, hasta que la distribución de temperatura se calcula en el estado final deseado.

Librodot

La ecuación en diferencias puede formularse también, moviéndonos hacia atrás en tiempo en la aproximación de la derivada con respecto a éste, es decir, en lugar de la Ec. (4-31) escribiríamos

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} \approx \frac{T^{p}_{m,n} - T^{p+1}_{m,n}}{\Delta \tau}$$

Las derivadas del espacio deben entonces expresarse en términos de las temperaturas en el incremento de tiempo $p + 1$, y la ecuación equivalente a la Ec. (4-32) deberá ser

$$\frac{T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta x)^2} + \frac{T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1} - 2T^{p+1}_{m,n}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T^{p}_{m,n} - T^{p+1}_{m,n}}{\Delta \tau} \tag{4-39}$$

La equivalente a la Ec. (4-33) es

$$T^{p}_{m,n} = \frac{\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2} (T^{p+1}_{m+1,n} + T^{p+1}_{m-1,n} + T^{p+1}_{m,n+1} + T^{p+1}_{m,n-1}) + \left[1 - \frac{4\alpha \Delta \tau}{(\Delta x)^2}\right] T^{p+1}_{m,n} \tag{4-40}$$

Podemos ahora notar que esta formulación de diferencia hacia atrás no permite el cálculo explícito de las T^{p+1} en términos de T^{p}. Tal vez debe escribirse un conjunto total de ecuaciones para el sistema nodal entero y resolverlas simultáneamente para determinar las temperaturas T^{p+1}. Así, decimos que el método de diferencias hacia atrás produce una *formulación implícita* para las temperaturas futuras en el análisis transitorio. La solución al conjunto de ecuaciones puede obtenerse con los métodos discutidos en el Cap. 3.

La ventaja de un procedimiento explícito de diferencias hacia adelante, es el cálculo directo de las temperaturas nodales futuras; sin embargo, la estabilidad de este cálculo se gobierna por la selección de los valores de Δx y $\Delta \tau$. Una selección de un valor pequeño de Δx, automáticamente fuerza la selección de algún valor máximo de $\Delta \tau$. Por otra parte, ninguna restricción se impone en la solución de ecuaciones que se obtienen de la formulación implícita. Esto significa que incrementos de tiempo mayores pueden seleccionarse para acelerar los cálculos. La desventaja evidente del método implícito es el mayor número de cálculos para cada incremento de tiempo.

Para una discusión de muchas aplicaciones de análisis numérico a problemas de conducción de calor en estado transitorio, se refiere al lector a las Refs. 4, 8, 13, 14 y 15.

Deberá ser obvio al lector, por ahora, que las técnicas de diferencias finitas pueden aplicarse a casi cualquier situación con un poco de paciencia y cuidado. Problemas muy complicados serán completamente sencillos de resolver cuando se cuenta con grandes

Librodot

facilidades de una computadora digital. Los programas de computadora para algunos problemas interesantes de transferencia de calor, son dados por Schenck [8]. En las Refs. 9 a 13 se discuten métodos de elementos finitos para usarse en problemas de transferencia de calor por conducción.

4-7 ANALISIS GRAFICO — GRAFICA DE SCHMIDT

Una técnica gráfica muy útil puede usarse para establecer las distribuciones de temperaturas transitorias, cuando el problema es unidimensional. El método se basa en la selección del parámetro

$$\frac{(\Delta x)^2}{\alpha\, \Delta\tau} = 2 \qquad (4\text{-}36)$$

así que la temperatura en cualquier nodo después de un incremento de tiempo $\Delta\tau$, es el promedio aritmético de las temperaturas de los nodos adyacentes al comienzo del incremento de tiempo. Tal promedio aritmético es muy fácil de construir gráficamente, como se muestra en la Fig. 4-22. El valor de T_m^{p+1} se obtiene dibujando una línea entre T_{m-1}^p y T_{m+1}^p. Así, para encontrar la distribución de temperatura en un sólido después de algún tiempo específico, el sólido se divide en incrementos Δx. Entonces, mediante la Ec. (4-36), se obtiene el valor de $\Delta\tau$. Este valor de $\Delta\tau$, cuando se divide por el tiempo total, da el número de incrementos de tiempo necesarios para establecer la distribución de temperatura deseada. La construcción gráfica se repite hasta que se obtenga la distribución de temperatura final. Por lo general, se requiere un número no entero de incrementos de tiempo, y probablemente será necesario interpolar entre los dos últimos incrementos para obtener la distribución de temperatura final.

Un ejemplo del método se muestra en la Fig. 4-23, donde se da una distribución de temperatura inicial y la construcción se lleva a cabo con cuatro incrementos de tiempo. Los valores en las temperaturas de las fronteras se mantienen constantes a través del proceso de enfriamiento indicado en este ejemplo. Nótese que la construcción se aproxima a la distribución de temperatura lineal de estado estable al incrementarse el tiempo.

Cuando una condición de frontera convectiva está involucrada, la construcción en las fronteras debe modificarse. Reescribiendo la Ec. (4-30), tenemos que

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{\text{pared}} = \frac{T_w - T_\infty}{k/h} \qquad (4\text{-}41)$$

Librodot

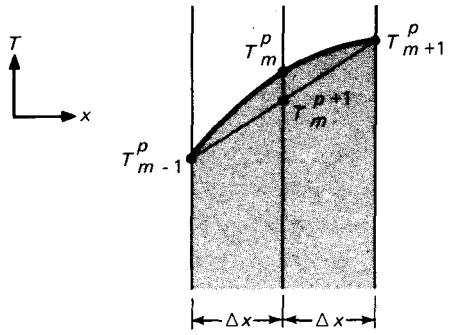


FIG. 4-22. Construcción gráfica para problemas de conducción en estado transitorio unidimensional

y el gradiente de temperatura en la superficie es aproximada por la construcción mostrada en la Fig. 4-24. Se dibuja una línea entre la temperatura T_{m+1} y la temperatura ambiente T_∞. La intersección de esta línea con la superficie determina la temperatura de ésta en ese tiempo particular. Este tipo de construcción se usa en cada incremento de tiempo para establecer la temperatura de la superficie. Una vez que esta temperatura se establece, la construcción para determinar las temperaturas internas en el sólido procede como se describió anteriormente. En la Fig. 4-25 se muestra un ejemplo de la construcción para problemas con condición de frontera convectiva con cuatro incrementos de tiempo. En este ejemplo, la temperatura de la cara derecha y la temperatura ambiente T_∞ se mantienen constantes. Si la temperatura ambiente cambia con el tiempo, de acuerdo con alguna variación conocida, ésta podrá fácilmente incorporarse en la construcción moviendo T_∞ hacia arriba o abajo como se requiera. En forma similar, un coeficiente de transferencia de calor variable podría considerarse cambiando el valor de k/h según alguna variación específica, moviendo el punto ambiente hacia adentro o hacia afuera una distancia correspondiente.

Jakob [5] discute algunos refinamientos en el método gráfico de Schmidt, particularmente las técnicas para proporcionar exactitud en las fronteras, ya sea para convección u otras condiciones de frontera. La exactitud del método se mejora cuando se toman incrementos Δx más pequeños, pero esto requiere un número mayor de incrementos de tiempo para obtener una distribución de temperatura después de un intervalo de tiempo dado. El problema particular bajo consideración dictará la exactitud requerida y el esfuerzo que debe hacerse para hallar la solución.

Librodot

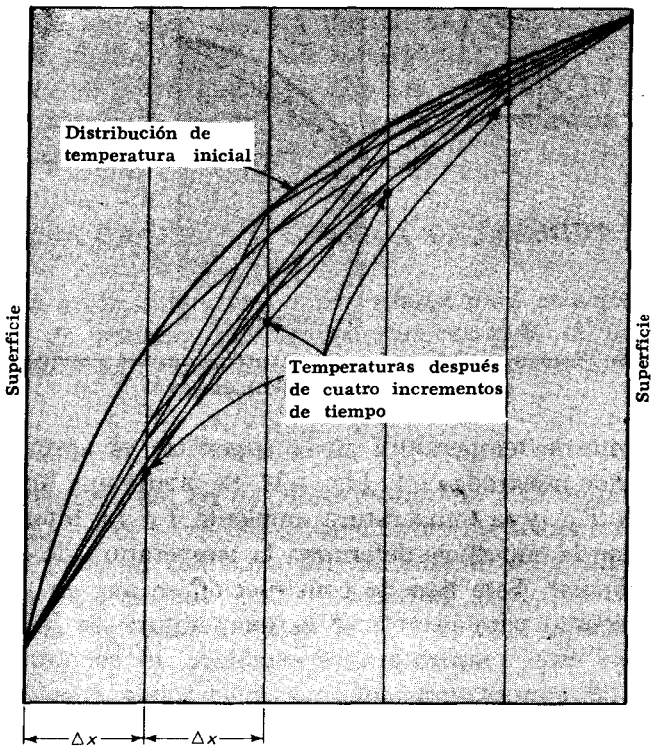


FIG. 4-23. Construcción de la gráfica de Schmidt para cuatro incrementos de tiempo

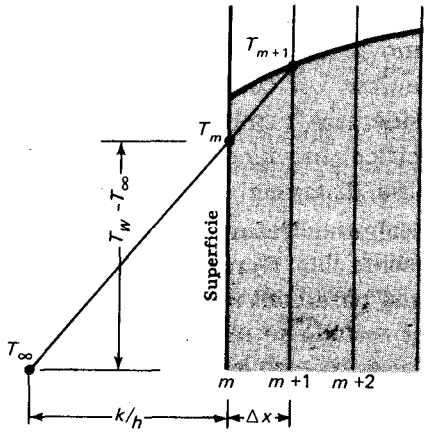


FIG. 4-24. Técnica gráfica para representar condiciones de frontera de convección con la gráfica de Schmidt

Librodot

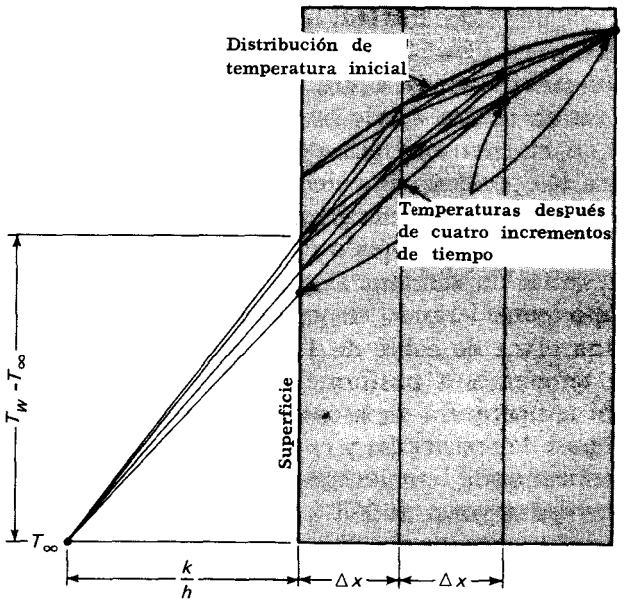


FIG. 4-25. Gráfica de Schmidt para incrementos de cuatro tiempos, incluyendo condición de frontera de convección

PREGUNTAS DE REPASO

1. ¿Qué se entiende por capacidad concentrada? ¿Cuáles son las suposiciones necesarias para que un análisis en estado transitorio de capacidad concentrada sea aplicable?
2. ¿Qué se entiende por un sólido semiinfinito?
3. ¿Cuáles son las condiciones iniciales que se imponen en las soluciones transitorias presentadas en forma gráfica en este capítulo?
4. ¿Qué condiciones de frontera se aplican a los problemas en este capítulo?
5. Defínase la función error.
6. Defínanse los números de Biot y de Fourier.
7. Descríbase cómo una solución transitoria unidimensional puede usarse para la solución de problemas bi y tridimensionales.
8. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de las formulaciones de diferencias hacia adelante y hacia atrás en el método numérico en estado transitorio? ¿En qué condiciones deberá usted escoger un método en lugar del otro?

Librodot

PROBLEMAS

4-1. Un cuerpo sólido a una temperatura inicial T_0 se coloca de repente en un cuarto donde la temperatura del aire es T_∞, y las paredes del cuarto son muy grandes. El coeficiente de transferencia de calor para las pérdidas de calor por convección es h, y la superficie del sólido puede suponerse negra. Con base en la suposición de que la temperatura del sólido es uniforme en cualquier instante, escríbase la ecuación diferencial para la variación de temperatura con el tiempo, considerando tanto radiación como convección.

4-2. Una placa de cobre de 1 pie por 1 pie y 2 plg de espesor está a una temperatura uniforme de 500°F, y repentinamente se disminuye la temperatura de su superficie a 100°F. Mediante el uso de los conceptos de resistencia y capacitancia térmica y el análisis de capacidad concentrada, encuéntrese el tiempo en el cual la temperatura del centro alcanza 200°F, $\rho = 558$ lb_m/pie^3, $C_p = 0.091$ Btu/lb_m-°F, y $k = 215$ Btu/hr-pie-°F.

4-3. Una pieza de aluminio que pesa 12 lb y tiene una temperatura inicial de 550°F, de repente se sumerge en un fluido a 60°F. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 10 Btu/hr-pie^2-°F. Al suponer al aluminio como una esfera del mismo peso que el que se da, estímese el tiempo requerido para enfriar el aluminio a 200°F, usando el método de análisis de capacidad concentrada.

4-4. Una esfera de cobre inicialmente a una temperatura uniforme T_0, se sumerge en un fluido. Se colocan calentadores eléctricos en éste, de tal manera controlados que la temperatura del mismo sigue una variación periódica dada por

$$T_\infty - T_m = A \operatorname{sen} \omega\tau$$

donde T_m = temperatura promedio del fluido con respecto al tiempo.
A = amplitud de la onda de temperatura
ω = frecuencia

Derívese una expresión para la temperatura de la esfera como una función del tiempo, y del coeficiente de transferencia de calor del fluido a la esfera. Supóngase que las temperaturas de la esfera y del fluido son uniformes en cualquier instante de tiempo, para que el método de análisis de capacidad concentrada pueda usarse.

4-5. Dos cubos idénticos de cobre de 3 plg, a 800 y 100°F, se ponen en contacto. Suponiendo que los bloques intercambian calor únicamente uno con otro, y que no hay resistencia al flujo de calor como resultado del contacto de los bloques, grafíquese la

Librodot

temperatura de cada uno de éstos como una función del tiempo usando el método de análisis de capacidad concentrada. Esto es, supóngase que la resistencia a la transferencia de calor es la resistencia de conducción de los dos bloques, y que todas las superficies están aisladas, excepto aquellas que están en contacto.

4-6. Repítase el Prob. 4-5 para un cubo de cobre de 3 plg, a 800°F, en contacto con un cubo de acero de 3 plg, a 100°F. Hágase un esquema del circuito térmico.

4-7. Si se impone una distribución senoidal de temperatura sobre la superficie de un sólido semiinfinito, la distribución de temperatura está dada por

$$T_{x,\tau} - T_m = Ae^{-x\sqrt{\pi n/\alpha}} \operatorname{sen}\left(2\pi n\tau - x\sqrt{\frac{\pi n}{\alpha}}\right)$$

donde $T_{x,\tau}$ = temperatura a una profundidad x y a un tiempo τ después de empezar la onda de temperatura en la superficie
T_m = temperatura media de la superficie
n = frecuencia de la onda, ciclos por unidad de tiempo
A = amplitud de la onda de temperatura en la superficie

Cuando se impone una distribución senoidal de temperatura sobre la superficie de una placa grande de concreto, de modo que la temperatura varía de 100 a 200°F, y se efectúa un ciclo completo en 15 min, encuéntrese el flujo de calor a través de un plano a 2 plg de la superficie y a 2 hr después de haber empezado la onda inicial.

4-8. Usando la distribución de temperatura del Prob. 4-7, múestrese que el retraso de tiempo entre los puntos máximos en la onda de temperatura en la superficie y a una profundidad x, está dado por

$$\Delta\tau = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha\pi n}}$$

4-9. Un asado que pesa 5 lb, inicialmente a 70°F, se coloca en un horno a 350°F. Suponiendo que el coeficiente de transferencia de calor es de 2.5 Btu/hr-pie²-°F y que las propiedades térmicas del asado pueden ser aproximadas a las del agua, estímese el tiempo requerido para que aquél, en su centro, alcance una temperatura de 200°F.

4-10. Una pared de concreto pesado con una temperatura uniforme de 130°F, se expone de repente a un flujo de aire a 50°F. El coeficiente de transferencia de calor es de 1.5 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese la temperatura en la pared de concreto a una profundidad de 3 plg después de 30 min.

Librodot

4-11. Una esfera de acero de 4 plg de diámetro se sumerge de repente en un tanque de aceite de 50°F. La temperatura inicial de la esfera es de 500°F. $h = 50$ Btu/hr-pie²-°F. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes que el centro de la esfera se enfríe a 300°F?

4-12. Una placa muy grande de cobre está inicialmente a una temperatura de 600°F. La temperatura de la superficie de repente se hace descender a 100°F. ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de 3 plg, 4 min después de cambiar la temperatura de la superficie?

4-13. En un día caluroso de verano, una carretera de concreto puede alcanzar una temperatura de 130°F. Supóngase que se hace pasar una corriente de agua sobre aquélla, de tal manera que la temperatura de la superficie desciende repentinamente a 60°F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para enfriar el concreto a 80°F, a una profundidad de 2 plg de la superficie?

4-14. Una barra larga de acero de 2 por 4 plg se mantiene inicialmente a una temperatura uniforme de 500°F. De repente se sujeta a un cambio tal que la temperatura ambiente disminuye a 100°F. Suponiendo un coeficiente de transferencia de calor de 4 Btu/hr-pie²-°F, úsese el método de relajación para estimar el tiempo requerido para que la temperatura del centro llegue a 200°F. Verifíquese este resultado con un cálculo, usando las gráficas de Heisler.

4-15. Un cilindro de acero de 4 plg de diámetro y 4 plg de longitud está inicialmente a 500°F. De repente se sumerge en un baño de aceite el cual se mantiene a 100°F. $h = 50$ Btu/hr-pie²-°F. Encuéntrese, (a) la temperatura en el centro del sólido después de 2 min, y (b) la temperatura en el centro de alguna de las caras circulares después de 2 min.

4-16. Una barra de acero de 1 plg² y 3 plg de longitud está inicialmente a una temperatura de 500°F. Se sumerge aquélla en un tanque de aceite que se mantiene a 100°F. El coeficiente de transferencia de calor es de 100 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese la temperatura en el centro de la barra después de 2 min.

4-17. Un cubo de aluminio de 4 plg en cada lado está inicialmente a una temperatura de 700°F, y se sumerge en un fluido a 200°F. El coeficiente de transferencia de calor es de 200 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlese la temperatura en el centro de una de las caras después de 1 min.

4-18. Un cilindro corto de concreto de 6 plg de diámetro y de 12 plg de longitud, está inicialmente a 80°F. Se le deja enfriar en un ambiente atmosférico en el que la temperatura es de 30°F. Calcúlese el tiempo requerido para que la temperatura en el centro alcance

Librodot

40°F, si también el coeficiente de transferencia de calor es de 3 Btu/hr-pie²-°F.

4-19. Trabájese el Prob. 4-13 usando el método de relajación.

4-20. Trabájese el Prob. 4-10 usando el método de relajación.

4-21. Una barra de acero de ½ plg de diámetro y 8 plg de longitud, tiene un extremo adherido a una fuente de calor a 500°F. Toda la barra inicialmente se mantiene a esta temperatura. Se expone entonces a una corriente de aire a 100°F, de modo que el coeficiente de transferencia de calor por convección es de 6 Btu/hr-pie²-°F. Estímese el tiempo requerido para que la temperatura a la mitad de la longitud de la barra alcance un valor de 380°F.

4-22. Una placa semiinfinita de cobre está expuesta a un flujo de calor constante en la superficie de 10^5 Btu/hr-pie². Supóngase que la placa está en el vacío, así que no hay convección en la superficie. ¿Cuál es la temperatura de la superficie después de 5 min, si la inicial de la placa es de 100°F? ¿Cuál es la temperatura a una distancia de 6 plg de la superficie después de 5 min?

4-23. Trabájese el Prob. 4-13 usando la gráfica de Schmidt.

4-24. Trabájese el Prob. 4-10 usando la gráfica de Schmidt.

4-25. Una placa de concreto de 6 plg de espesor, con una conductividad térmica de 0.5 Btu/hr-pie-°F, tiene una cara aislada y la otra cara expuesta a un ambiente. La placa tiene inicialmente una temperatura uniforme de 600°F, y la temperatura ambiente desciende de repente a 200°F. El coeficiente de transferencia de calor es proporcional a la raíz cuarta de la diferencia de temperatura entre la superficie y el ambiente, y tiene un valor de 2 Btu/hr-pie²-°F en tiempo cero. La temperatura ambiente aumenta linealmente con el tiempo y tiene un valor de 400°F después de 20 min. Mediante el uso de la gráfica de Schmidt, obténgase la distribución de temperatura en la placa después de 5, 10, 15 y 20 min.

4-26. Una placa infinita de espesor $2L$ se expone de repente a una fuente o resumidero de calor a temperatura constante T_s. La placa tiene una temperatura inicial uniforme T_i. Las pérdidas de calor por radiación en cada lado de la placa están dadas por

$$q = \sigma \epsilon A (T^4 - T_s^4)$$

donde σ y ϵ son constantes y A es el área de superficie. Suponiendo que la placa se comporta con capacidad concentrada, esto es, $k \to \infty$, derívese una expresión para la temperatura de la placa como una función del tiempo.

4-27. Una barra de acero inoxidable (18% Cr, 8% Ni) de ¼ plg de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 100°F, y de repente se sumerge en un líquido a 300°F, con $h =$

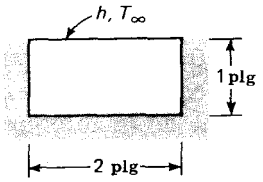
Librodot

25 Btu/hr-pie²-°F. Mediante el uso del método de análisis de capacidad concentrada, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura de la barra alcance una temperatura de 250°F.

4-28. Una placa grande de cobre está inicialmente a una temperatura uniforme de 200°F. La temperatura de superficie se hace descender de repente a 100°F. Calcúlese la razón de transferencia de calor a través de un plano a 3 plg de la superficie, 5 seg después de que descendió la temperatura de ésta.

4-29. Una esfera de cobre de 2 plg de diámetro está inicialmente a una temperatura uniforme de 500°F. De repente se expone a un ambiente a 100°F, teniendo un coeficiente de transferencia de calor $h = 5$ Btu/hr-pie²-°F. Por el uso del método de análisis de capacidad concentrada, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura de la esfera llegue a 200°F.

4-30. La placa de acero inoxidable mostrada, está inicialmente a una temperatura uniforme de 300°F, y se expone de repente a un ambiente convectivo a 100°F con $h = 3$ Btu/hr-pie²-°F. Por el uso de técnicas numéricas, calcúlese el tiempo necesario para que la temperatura a una profundidad de 0.25 plg alcance 150°F. Empléese una computadora digital, de ser posible.



4-31. Una placa infinita con un espesor de 1.0 plg, está inicialmente a una temperatura de 300°F, y la temperatura de su superficie se hace descender de repente a 100°F. La difusividad térmica del material es de 0.07 pie²/hr. Calcúlese la temperatura en el plano central después de un tiempo de 1 min, sumando los primeros cuatro términos de la Ec. (4-3). Verifíquese la respuesta usando las gráficas de Heisler.

4-32. ¿Qué error deberá resultar al usar los primeros cuatro términos de la Ec. (4-3) para calcular la temperatura en $\tau = 0$ y $x = L$?

4-33. Una placa grande de aluminio a una temperatura uniforme de 100°F, se expone de repente a un flujo de calor por unidad de área constante de 5000 Btu/hr-pie². ¿Cuál es la temperatura a la profundidad de 1 plg, después de un tiempo de 2 min?

4-34. Para la placa en el Prob. 4-33, ¿cuánto tiempo pasará para que la temperatura alcance 300°F a una profundidad de 1 plg?

Librodot

4-35. El cuerpo bidimensional de la Fig. 3-6 tiene la temperatura inicial de la superficie y la interna, como se muestra y se calcula en la Tabla 3-2. A un tiempo cero, la temperatura de la cara a 500°F se hace descender de repente a 100°F. Tomando $\Delta x = \Delta y =$ 0.5 pie, y $\alpha = 0.5$ pie²/hr, calcúlense las temperaturas en los nodos 1, 2, 3, 4, después de 30 min. Háganse los cálculos usando el método de diferencias hacia adelante y hacia atrás. Para el método de diferencias hacia atrás usénse solamente dos incrementos de tiempo.

4-36. Desarróllese una fórmula de diferencia hacia atrás para un nodo de frontera sujeto a un ambiente convectivo.

4-37. Una esfera de cuarzo fundido tiene una difusividad térmica de 0.037 pie²/hr, diámetro de 1 plg y conductividad térmica de 0.88 Btu/hr-pie-°F. La esfera está inicialmente a una temperatura uniforme de 80°F, y de repente se expone a un ambiente de convección a 400°F. El coeficiente de transferencia de calor por convección es de 20 Btu/hr-pie²-°F. Calcúlense las temperaturas en el centro y a un radio de ¼ plg, después de un tiempo de 4 min.

REFERENCIAS

1. Schneider, P. J.: "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1955.
2. Heisler, M. P.: Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating, *Trans. ASME*, Vol. 69, Págs. 227-236, 1947.
3. Jahnke, E., y F. Emde: "Tables of Functions", Dover Publications, Inc., New York, 1945.
4. Dusinberre, G. M.: "Heat Transfer Calculations by Finite Differences", International Textbook Company, Scranton, Pa., 1961.
5. Jakob, M.: "Heat Transfer", Vol. 1, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1949.
6. Gröber, H., S. Erk y U. Grigull: "Fundamentals of Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.
7. Schneider, P. J.: "Temperature Response Charts", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
8. Schenck, H.: "Fortran Methods in Heat Flow", The Ronald Press Company, New York, 1963.
9. Richardson, P. D. y Y. M. Shum: Use of Finite-Element Methods in Solution of Transient Heat Conduction Problems, *ASME Paper* 69-WA/HT-36.
10. Emery, A. F. y W. W. Carson: "Evaluation of Use of the Finite Element Method in Computation of Temperature, *ASME Paper* 69-WA/HT-38.
11. Wilson, E. L. y R. E. Nickell: Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, *Nucl. Eng. Design*, Vol. 4, Págs. 276-286, 1966.
12. Zienkiewicz, O. C.: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
13. Myers, G. E.: "Conduction Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
14. Arpaci, V. S.: "Conduction Heat Transfer", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1966.
15. Ozisik, M. N.: "Boundary Value Problems of Heat Conduction", International Textbook Company, Scranton, Pa., 1968.

Librodot