TRANSFERENCIA DE CALOR, CAPITULO 5
J. P. HOLMAN



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

CAPITULO 5

PRINCIPIOS DE CONVECCION

5-1 INTRODUCCION

Los capítulos anteriores han considerado el mecanismo y cálculo de transferencia de calor por conducción. La convección fue considerada únicamente hasta ahora en su relación con las condiciones de frontera impuestas en un problema de conducción. Ahora deseamos examinar los métodos para calcular la transferencia de calor por convección y, en particular, las formas de predecir el valor del coeficiente h para este tipo de transferencia. La materia de transferencia de calor por convección requiere de un balance de energía, junto con un análisis de la dinámica de fluidos en los problemas concernientes. Nuestra discusión en este capítulo primero tratará algunas de las relaciones sencillas de dinámica de fluidos y análisis de capa límite, las cuales son importantes para un entendimiento básico de la transferencia de calor por convección. A continuación, haremos un balance de energía sobre el sistema de flujo y determinaremos la influencia de éste sobre los gradientes de temperatura en el fluido. Finalmente, habiendo obtenido un conocimiento de la distribución de temperatura, se obtendrá la razón de transferencia de calor de una superficie calentada hacia un fluido que es forzado sobre ésta.

Nuestro desarrollo en este capítulo es principalmente de carácter analítico, y se tratará sólo con sistemas de flujo de convección forzada. En capítulos subsecuentes se presentarán relaciones empíricas para el cálculo de transferencia de calor por convección forzada, así como también se tratarán los tópicos de convección natural y la transferencia de calor por ebullición y condensación.

5-2 FLUJO VISCOSO

Considérese el flujo sobre una placa plana como se muestra en las Figs. 5-1 y 5-2. Comenzando en el extremo de la placa por donde

Librodot

incide el fluido, se desarrolla una región donde se siente la influencia de las fuerzas viscosas. Estas se describen en términos de un esfuerzo de corte τ entre las capas de fluido. Si se supone este esfuerzo proporcional al gradiente de velocidad normal, tenemos la ecuación que define la viscosidad,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{5-1}$$

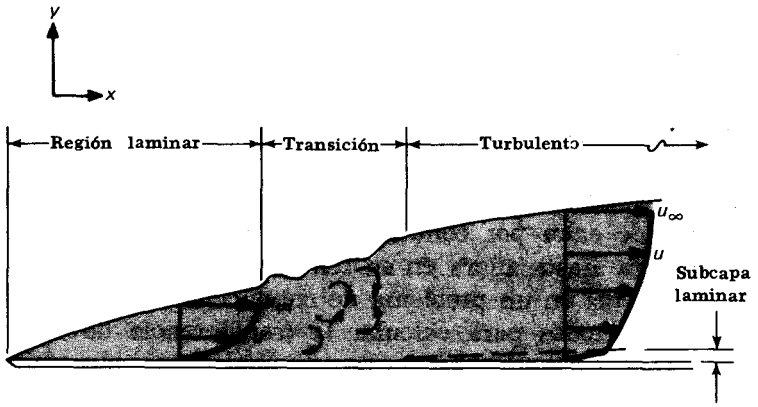


FIG. 5-1. Diagrama que muestra los diferentes regímenes de flujo de capa límite en una placa plana

La constante de proporcionalidad μ se llama la viscosidad dinámica. Un conjunto típico de unidades es lb_f-seg/pie^2; sin embargo, existen muchos conjuntos de unidades usados para la viscosidad, y debe tenerse cuidado para seleccionar el grupo apropiado que deberá ser consistente con la formulación hecha.

La región de flujo que se desarrolla a partir del extremo de la placa por donde incide el fluido, y en la que se observan los efectos de viscosidad, se llama la capa límite. Algún punto arbitrario se usa para designar la posición y donde la capa límite termina; este punto por lo general se selecciona como la coordenada y, en donde la velocidad es el 99% del valor del flujo libre.

Inicialmente, el desarrollo de la capa límite es laminar, pero a cierta distancia crítica del extremo por donde el fluido incide, dependiendo del campo de flujo y de las propiedades del fluido, comenzarán a amplificarse pequeñas perturbaciones en el flujo, y un proceso de transición toma lugar hasta que el flujo se hace turbulento. La región de flujo turbulento puede describirse como una acción agitada al azar, con porciones de flujo moviéndose hacia y de todas direcciones. La transición de flujo laminar a turbulento ocurre cuando

Librodot

$$\frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{\rho u_\infty x}{\mu} > 5 \times 10^5$$

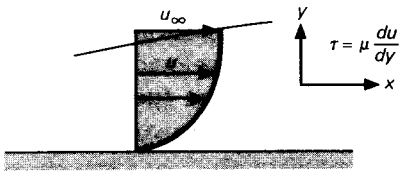


FIG. 5-2. Perfil de velocidad laminar en una placa plana

donde u_∞ = velocidad del flujo libre
x = distancia del extremo por donde el fluido incide
$v = \mu/\rho$ = viscosidad cinemática

Este agrupamiento particular de términos se llama el número de Reynolds y es adimensional si se usa un conjunto de unidades consistente para todas las propiedades.

$$\mathrm{Re}_x \doteq \frac{u_\infty x}{\nu} \tag{5-2}$$

Aun cuando el número de Reynolds crítico para transición en una placa plana se toma por lo general como 5×10^5 para la mayoría de los propósitos de análisis, el valor crítico en una situación práctica es fuertemente dependiente de las condiciones rugosas de la superficie y del "nivel de turbulencia" del flujo libre. El rango normal para el comienzo de transición es entre 5×10^5 y 10^6. Con la presencia de perturbaciones muy grandes en el flujo, la transición puede comenzar con números de Reynolds tan bajos como 10^5, y para flujos que están muy libres de fluctuaciones, éste no puede comenzar hasta valores de $\mathrm{Re} = 2 \times 10^6$ o más. En realidad, el proceso de transición cubre un rango de números de Reynolds, y se observa completa y el flujo turbulento desarrollado, hasta números de Reynolds dos veces mayores que el valor en el cual comienza la transición.

Las formas relativas para los perfiles de velocidad en flujo laminar y turbulento se indican en la Fig. 5-1. El perfil laminar es más o menos de forma parabólica, mientras que el perfil turbulento tiene una porción prácticamente lineal en la vecindad de la pared. La porción lineal se dice que es debida a una subcapa laminar, la cual se encuentra muy cerca de la superficie. Fuera de esta subcapa, el perfil de velocidad es relativamente plano en comparación con el perfil laminar.

Librodot

El mecanismo físico de viscosidad es de intercambio de momentum. Considérese la situación de flujo laminar. Las moléculas pueden moverse de una lámina a otra, llevando con ellas un momentum correspondiente a la velocidad del flujo. Hay un transporte neto de momentum de regiones de alta velocidad a regiones de baja velocidad, creando por consiguiente una fuerza en la dirección del flujo. Esta fuerza es el esfuerzo viscoso de corte, el cual se calcula con la Ec. (5-1).

La razón a la cual la transferencia de momentum se lleva a cabo depende de la razón con la que las moléculas se mueven a través de las capas de fluido. En un gas, las moléculas se mueven con una velocidad promedio proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta, ya que, en la teoría cinética de los gases, se identifica la temperatura con la energía cinética media de una molécula. Entre más rápido se mueven las moléculas, mayor momentum transportarán. De aquí que debemos esperar que la viscosidad de un gas sea aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura, y esta expectación se corrobora bastante bien con la experimentación. En el Apéndice A se dan las viscosidades de algunos fluidos típicos.

En la región de flujo turbulento ya no se observan distintas capas de fluido, y estamos forzados a buscar algún concepto diferente

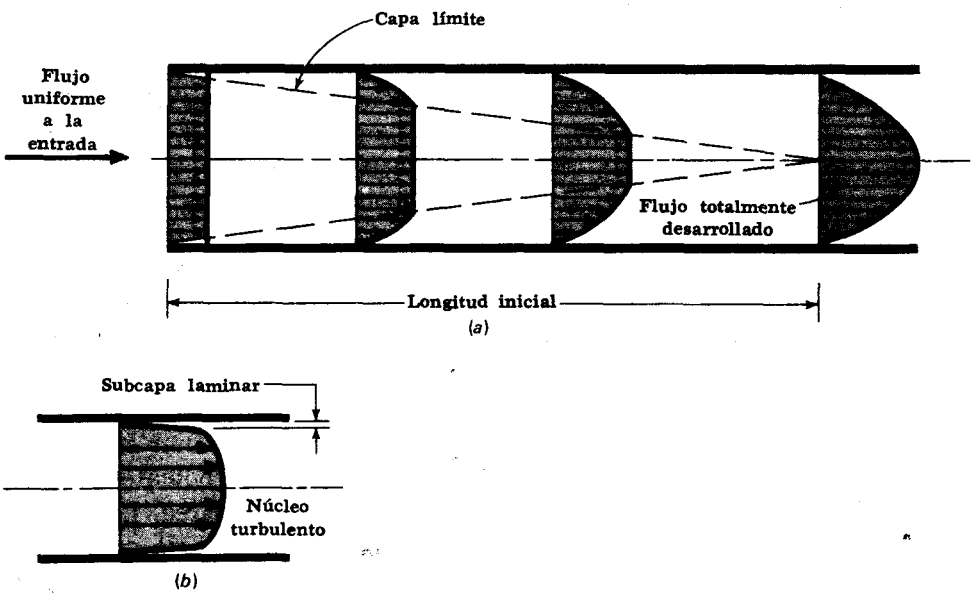


FIG. 5-3. (a) Perfil de velocidad para flujo laminar en un tubo. (b) Perfil de velocidad para flujo turbulento en un tubo

Librodot

para la acción viscosa. Una descripción cualitativa del proceso de flujo turbulento puede obtenerse imaginando porciones macroscópicas de fluido transportando energía y momentum, en lugar del transporte microscópico sobre la base de moléculas individuales. Naturalmente que debemos esperar que las masas mayores de los elementos macroscópicos de fluido, transportarán más energía y momentum que las moléculas individuales, y debemos también esperar una mayor fuerza viscosa de corte en flujo turbulento que en flujo laminar (y una mayor conductividad térmica también). Esta expectación se verifica por la experimentación, y es esta acción viscosa mayor en flujo turbulento la que causa el perfil de velocidad plano indicado en la Fig. 5-1.

Considérese el flujo en un tubo como se muestra en la Fig. 5-3. Una capa límite se desarrolla en la entrada, como se muestra. Eventualmente la capa límite llena todo el tubo, y se dice que el flujo se ha desarrollado en forma total. Si el flujo es laminar, se experimenta un perfil de velocidad parabólico como se muestra en la Fig. 5-3*a*. Cuando el flujo es turbulento, se observa un perfil un poco plano, como se muestra en la Fig. 5-3*b*. En un tubo, el número de Reynolds se usa nuevamente como un criterio para flujo laminar y turbulento. Para

$$\mathrm{Re}_d = \frac{u_m d}{\nu} > 2\,300 \tag{5-3}$$

se observa, por lo general, que el flujo es turbulento.

De nuevo, se observa un rango de números de Reynolds para transición, dependiendo de la rugosidad del tubo y la suavidad del flujo. El rango generalmente aceptado para transición es

$$2\,000 < \mathrm{Re}_d < 4\,000$$

aunque el flujo laminar se ha mantenido hasta números de Reynolds de 25 000 en condiciones de laboratorio cuidadosamente controladas.

La relación de continuidad para flujo unidimensional en un tubo es

$$\dot{m} = \rho u_m A \tag{5-4}$$

donde $\dot{m}$ = flujo másico
u_m = velocidad media
A = área de sección transversal

Definimos la velocidad másica como

$$\text{Velocidad másica} = G = \frac{\dot{m}}{A} = \rho u_m \tag{5-5}$$

Librodot

así que el número de Reynolds puede escribirse como

$$\mathrm{Re}_d = \frac{Gd}{\mu} \tag{5-6}$$

Algunas veces es más conveniente usar la Ec. (5-6) que la Ec. (5-3).

5-3 FLUJO NO VISCOSO

Aun cuando ningún fluido real es no viscoso, hay casos en que puede ser tratado como tal, y es conveniente presentar algunas de las ecuaciones que se aplican en estas circunstancias. Por ejemplo, en el problema de la placa plana discutida antes, el flujo a una distancia suficientemente grande de la placa se comportará como un sistema de flujo no viscoso. La razón para este comportamiento es que los gradientes de velocidad normales a la dirección del flujo son muy pequeños y, por lo tanto, las fuerzas viscosas de corte también lo son.

Si se hace un balance de fuerzas en un elemento de fluido incompresible, y esas fuerzas se hacen iguales al cambio en momentum del elemento de fluido, la ecuación de Bernoulli para el flujo a lo largo de una línea de corriente da como resultado que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{V^2}{g_c} = \text{const} \tag{5-7a}$$

o en forma diferencial,

$$\frac{dp}{\rho} + \frac{V\,dV}{g_c} = 0 \tag{5-7b}$$

donde ρ = densidad del fluido
p = presión en un punto particular del flujo
V = velocidad del flujo en ese punto

La ecuación de Bernoulli se considera algunas veces una ecuación de energía debido a que el término $V^2/2g_c$ representa la energía cinética, y la presión representa energía potencial; sin embargo, debe recordarse que estos términos se derivan sobre las bases de un análisis dinámico, así que la ecuación es fundamentalmente una ecuación dinámica. De hecho, el concepto de energía cinética está basado sobre un análisis dinámico.

Cuando el fluido es compresible, debe escribirse una ecuación de energía que tome en cuenta los cambios en energía térmica interna del sistema y los correspondientes cambios en temperatura.

Librodot

Para un sistema de flujo unidimensional, esta ecuación es la de energía de flujo estable para un volumen de control,

$$i_1 + \frac{1}{2g_c} V_1^2 + Q = i_2 + \frac{1}{2g_c} V_2^2 + Wk \tag{5-8}$$

donde i es la entalpía definida por

$$i = e + pv \tag{5-9}$$

y donde e = energía interna
Q = calor añadido al volumen de control
Wk = trabajo externo neto hecho en el proceso
v = volumen específico del fluido

(El símbolo i se usa para denotar la entalpía, en lugar de la acostumbrada h, para evitar la confusión con el coeficiente de transferencia de calor.) Los subíndices 1 y 2 se refieren a las condiciones de entrada y salida del volumen de control. Para calcular la caída de presión en flujo compresible, es necesario especificar la ecuación de estado del fluido, por ejemplo, para un gas ideal,

$$p = \rho RT$$
$$\Delta e = c_v \Delta T$$
$$\Delta i = c_p \Delta T$$

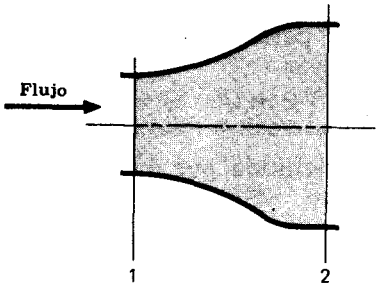
Adicionalmente, el proceso debe especificarse. Por ejemplo, el flujo adiabático reversible a través de una tobera da las siguientes expresiones familiares, que relacionan las propiedades en algún punto en el flujo, con el número de Mach y las propiedades de estancamiento, es decir, las propiedades donde la velocidad es cero:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$
$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$
$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{1/(\gamma-1)}$$

donde T_0, p_0, ρ_0 = propiedades de estancamiento
γ = razón de calores específicos c_p/c_v
M = número de Mach

$$M = \frac{V}{a}$$

Librodot



donde a es la velocidad local del sonido, la cual puede calcularse de

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT}$$

para un gas ideal*.

Ejemplo 5-1

Ochenta galones por minuto de agua a 70°F, fluyen a través del difusor mostrado en la figura. El diámetro en la sección 1 es de 1¼ plg, y el diámetro en la sección 2 es de 3 plg. Determínese el incremento en presión estática entre las secciones 1 y 2. Supóngase flujo sin fricción.

Solución. Primero determinamos el flujo másico

$$\dot{m} = \frac{(80)(8.33)}{60} = 11.1 \text{ lb}_m/\text{seg}$$

ya que hay 8.33 lb_m de agua por galón. El área de sección transversal del flujo en la sección 1 es

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(1.25)^2}{(4)(144)} = 0.0085 \text{ pie}^2$$

y en la sección 2

$$A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(3)^2}{(4)(144)} = 0.0492 \text{ pie}^2$$

Las velocidades del flujo son

$$u = \frac{\dot{m}}{\rho A}$$

$$u_1 = \frac{11.1}{(62.4)(0.0085)} = 20.9 \text{ pie/seg}$$

$$u_2 = \frac{11.1}{(62.4)(0.0492)} = 3.62 \text{ pie/seg}$$

* Las fórmulas de flujo isoentrópico están derivadas en la Ref. 5, Pág. 53.

Librodot

Podemos obtener la diferencia de presión de la ecuación de Bernoulli.

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{1}{2g_c}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{62.4}{(2)(32.2)}[(20.9)^2 - (3.62)^2]$$

$$= 411 \text{ lb}_f/\text{pie}^2 = 2.85 \text{ lb}_f/\text{plg}^2 \quad (1.97 \times 10^4 \text{ N/m}^2)$$

Ejemplo 5-2

Aire a 500°F y 100 lb/plg² absolutas, se expande isoentrópicamente de un tanque hasta que su velocidad es de 800 pies/seg. Determínese la temperatura estática del aire en la condición de alta velocidad. Supóngase para el aire $c_p = 0.24$ Btu/lb$_m$-°F y $\gamma = 1.4$.

Solución. Podemos escribir la ecuación de energía de flujo estable [Ec. (5-8)] como

$$i_1 = i_2 + \frac{u_2^2}{2g_c}$$

ya que la velocidad inicial es muy pequeña y el proceso es adiabático. En términos de la temperatura

$$c_p(T_1 - T_2) = \frac{u_2^2}{2g_c}$$

$$(0.24)(500 - T_2) = \frac{(800)^2}{(2)(32.2)(778)}$$

$$T_2 = 447°\text{F}$$

Si se desea la presión de salida, podemos usar la relación isoentrópica entre la presión y la temperatura.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$p_2 = 100 \times \left(\frac{907}{960}\right)^{3.5} = 82 \text{ lb}_f/\text{plg}^2 \qquad (5.65 \times 10^5 \text{ N/m}^2)$$

5-4 CAPA LIMITE LAMINAR EN UNA PLACA PLANA

Considérese el volumen de control elemental mostrado en la Fig. 5-4. Derivaremos la ecuación de movimiento para la capa límite, haciendo un balance de fuerza y momentum sobre este elemento. Para simplificar el análisis supondremos que:

1. El fluido es incompresible y el flujo es estable.
2. No hay variaciones de presión en la dirección perpendicular a la placa.

Librodot

3. La viscosidad es constante.
4. Las fuerzas viscosas de corte en la dirección y son despreciables.

Aplicando la segunda ley de Newton del movimiento,

$$\sum F_x = \frac{d(mV)_x}{d\tau}$$

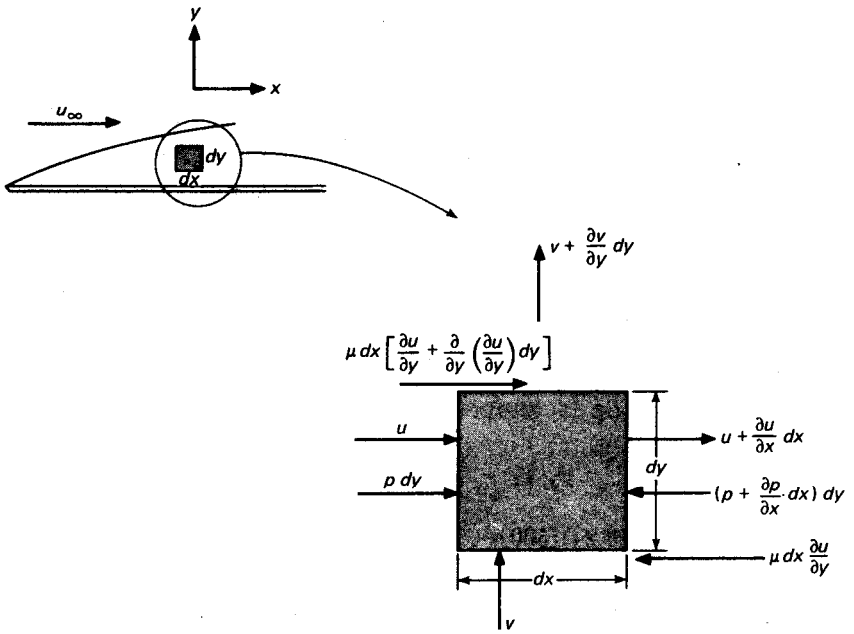


FIG. 5-4. Volumen de control elemental para balance de fuerzas en la capa límite laminar

La forma anterior de la segunda ley de Newton del movimiento se aplica a un sistema de masa constante. En dinámica de fluidos, por lo general no es conveniente trabajar con elementos de masa; en vez de esto, tratamos con volúmenes de control elementales como el mostrado en la Fig. 5-4, donde la masa puede fluir hacia adentro o hacia afuera de los diferentes lados del volumen, el cual se fija en el espacio. Para este sistema, el balance de fuerzas se escribe entonces como

ΣF_x = incremento en el flujo de momentum en la dirección x

El flujo de momentum en la dirección x es el producto del flujo másico a través de un lado particular del volumen de control, y la componente x de velocidad en ese punto.

La masa entrando en la cara izquierda del elemento por unidad de tiempo es

$$\rho u\, dy$$

suponiendo profundidad unitaria en la dirección z. Pero el momentum que entra en la cara izquierda por unidad de tiempo es

$$\rho u\, dy\, u = \rho u^2\, dy$$

El flujo másico que sale por la cara derecha es

$$\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) dy$$

y el momentum que sale por la cara derecha es

$$\rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right)^2 dy$$

El flujo másico que entra en la cara inferior es

$$\rho v\, dx$$

y el flujo másico que sale de la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) dx$$

Un balance de masa en el elemento da

$$\rho u\, dy + \rho v\, dx = \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) dy + \rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) dx$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

Esta es la ecuación de continuidad de masa para la capa límite.

Regresando al análisis de momentum y fuerza, el momentum *en la dirección x* que entra en la cara inferior es

$$\rho v u\, dx$$

y el momentum *en la dirección x* la cual sale de la cara superior es

$$\rho\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\, dy\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) dx$$

Estamos interesados únicamente en el momentum en la dirección x, debido a que las fuerzas consideradas en el análisis son aquellas en la dirección x. Esas fuerzas son aquellas debidas a corte viscoso y a fuerzas de presión sobre el elemento. La fuerza de presión sobre

Librodot

la cara izquierda es $p\ dy$, y sobre el lado derecho es $-[p + (\partial p/\partial x)\ dx]\ dy$, así que la fuerza neta de presión en la dirección del movimiento es

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy$$

La fuerza viscosa de corte sobre la cara inferior es

$$-\mu\frac{\partial u}{\partial y}\,dx$$

y la fuerza de corte sobre la superior es

$$\mu\,dx\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy\right]$$

La fuerza viscosa de corte neta en la dirección del movimiento es la suma de las anteriores.

$$\text{Fuerza neta de corte viscoso} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy$$

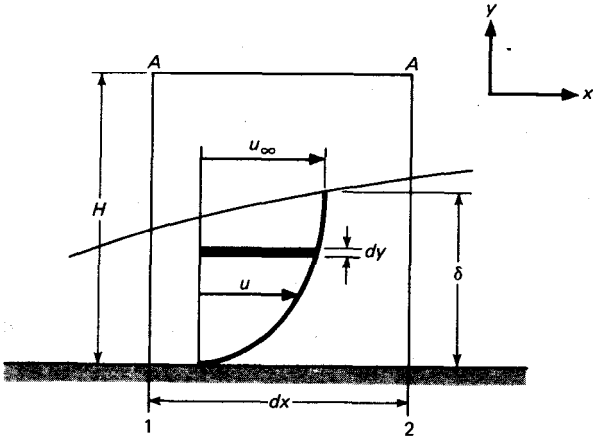


FIG. 5-5. Volumen de control elemental para análisis integral de momentum de capa límite laminar

Igualando la suma de las fuerzas de corte viscoso y de presión a la transferencia neta de momentum en la dirección x, tenemos

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx\,dy-\frac{\partial p}{\partial x}\,dx\,dy=\rho\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\right)^2 dy-\rho u^2\,dy$$
$$+\rho\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right)dx-\rho v u\,dx$$

Librodot

Al simplificar términos, hacer uso de la relación de continuidad (5-10) y despreciar diferenciales de segundo orden, se obtiene

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{5-11}$$

Esta es la ecuación de momentum para la capa límite laminar con propiedades constantes. La ecuación puede resolverse exactamente para muchas condiciones de frontera, y se refiere al lector al tratado de Schlichting [1] para detalles sobre los diferentes métodos empleados en las soluciones. En el Apéndice B hemos incluido el método clásico para obtener una solución exacta de la Ec. (5-11) para flujo laminar sobre una placa plana. Para el desarrollo en este capítulo estaremos satisfechos con un análisis aproximado que proveerá una solución más sencilla, sin perder el entendimiento físico del proceso involucrado. El método aproximado se debe a von Kármán [2].

Considérese el sistema de flujo de capa límite mostrado en la Fig. 5-5. La velocidad de corriente libre exterior a la capa límite es u_∞, y el espesor de esta capa es δ. Deseamos efectuar un balance de momentum y fuerza sobre el volumen de control limitado por los planos 1, 2, *A-A*, y la pared sólida. Las componentes de velocidad normal a la pared son despreciables, y se consideran sólo aquellas en la dirección x. Suponemos que el volumen de control es suficientemente alto, de tal manera que éste siempre encierra a la capa límite; esto es, $H > \delta$.

El flujo másico a través del plano 1 es

$$\int_0^H \rho u\,dy \tag{a}$$

y el flujo de momentum a través del plano 1 es

$$\int_0^H \rho u^2\,dy \tag{b}$$

El flujo de momentum a través del plano 2 es

$$\int_0^H \rho u^2\,dy+\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\,dy\,dx\right) \tag{c}$$

y el flujo másico a través del plano 2 es

$$\int_0^H \rho u\,dy+\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\,dy\right)dx \tag{d}$$

Considerando la conservación de masa y el hecho de que ninguna cantidad de ésta puede entrar al volumen de control a través de la pared sólida, el flujo másico adicional en la expresión (d) con respecto al de (a), debe entrar a través del plano *A-A*. Este flujo másico lleva consigo un momentum en la dirección x igual a

Librodot

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

El flujo neto de momentum saliendo del volumen de control es, por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u^2\, dy\right) dx - u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

Esta expresión puede ponerse en una forma más útil recordando la fórmula del producto del cálculo diferencial.

$$d(\eta\phi) = \eta\, d\phi + \phi\, d\eta$$

o

$$\eta\, d\phi = d(\eta\phi) - \phi\, d\eta$$

En la expresión de momentum dada arriba, la integral

$$\int_0^H \rho u\, dy$$

es la función ϕ, y u_∞ es la función η. Así

$$u_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx = \frac{d}{dx}\left(u_\infty \int_0^H \rho u\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u u_\infty\, dy\right) dx - \frac{du_\infty}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy\right) dx \qquad (5\text{-}12)$$

La u_∞ puede colocarse dentro de la integral puesto que no es función de y y puede, por consiguiente, tratarse como una constante mientras se trate de una integral con respecto a y.

Regresando al análisis, la fuerza sobre el plano 1 es la fuerza de presión pH, y la del plano 2, es $[p + (dp/dx)\, dx]H$. La fuerza de corte en la pared es

$$-\tau_w\, dx = -\mu\, dx \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$$

No hay fuerza de corte en el plano A-A, puesto que el gradiente de velocidad es cero fuera de la capa límite. Al hacer las fuerzas sobre el elemento iguales al incremento neto en momentum y juntando términos, se obtiene

$$-\tau_w - \frac{dp}{dx} H = -\rho \frac{d}{dx}\int_0^H (u_\infty - u)u\, dy + \frac{du_\infty}{dx}\int_0^H \rho u\, dy \qquad (5\text{-}13)$$

Esta es la ecuación integral de momentum de la capa límite. Si la presión es constante a través del flujo,

$$\frac{dp}{dx} = 0 = -\rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \qquad (5\text{-}14)$$

Librodot

puesto que la presión y la velocidad de corriente libre están relacionadas por la ecuación de Bernoulli. Para la condición de presión constante, la ecuación de capa límite integral da

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\delta (u_\infty - u)u \, dy = \tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{y=0} \tag{5-15}$$

El límite superior en la integral ha sido cambiado a δ porque el integrando es cero para $y > \delta$, ya que $u = u_\infty$ para $y > \delta$.

Si el perfil de velocidad fuera conocido, la función apropiada podría insertarse en la Ec. (5-15) con el fin de obtener una expresión para el espesor de la capa límite. Para nuestro análisis aproximado, primero escribimos algunas condiciones las cuales debe satisfacer la función de velocidad.

$$u = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{a}$$
$$u = u_\infty \qquad \text{en } y = \delta \tag{b}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta \tag{c}$$

Para una condición de presión constante la Ec. (5-11) da

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{d}$$

ya que las velocidades u y v son cero en $y = 0$. Suponemos que los perfiles de velocidad en varias posiciones x son similares, esto es, tienen la misma dependencia funcional sobre la coordenada y. Hay cuatro condiciones por satisfacer. La función más simple que podemos escoger para satisfacer estas condiciones, es un polinomio con cuatro constantes arbitrarias. Así

$$u = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + C_4 y^3 \tag{5-16}$$

Aplicando las cuatro condiciones de (a) a (d),

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \tag{5-17}$$

Insertando la expresión para la velocidad en la Ec. (5-15),

$$\frac{d}{dx}\left\{\rho u_\infty^2 \int_0^\delta \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right] dy\right\} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

Al llevar a cabo la integración,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}\rho u_\infty^2 \delta\right) = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

Librodot

Ya que ρ y u_∞ son constantes, las variables pueden separarse para dar

$$\delta\, d\delta = \frac{140}{13}\frac{\mu}{\rho u_\infty}\,dx = \frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}\,dx$$

y

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13}\frac{\nu x}{u_\infty} + \text{const}$$

En $x = 0$, $\delta = 0$, así que

$$\delta = 4.64\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \tag{5-18}$$

Esta puede escribirse en términos del número de Reynolds como

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \tag{5-19}$$

donde

$$\mathrm{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu}$$

La solución exacta de las ecuaciones de capa límite mostradas en el Apéndice B da

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5.0}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}} \tag{5-19a}$$

Ejemplo 5-3

Aire a 70°F y 14.7 $\mathrm{lb}_f/\mathrm{plg}^2$ absolutas, fluye sobre una placa plana a una velocidad de 5 pies/seg. Calcúlese el espesor de capa límite a distancias de 6 plg y 1 pie del extremo de la placa por donde incide el fluido. Calcúlese el flujo másico que entra a la capa límite entre $x = 6$ plg y $x = 1$ pie. La viscosidad del aire a 70°F es igual a 0.044 lb_m/hr-pie. Supóngase profundidad unitaria en la dirección z.

Solución. La densidad del aire se calcula de

$$\rho = \frac{p}{RT} = \frac{(14.7)(144)}{(53.35)(530)} = 0.0748\ \mathrm{lb}_m/\mathrm{pie}^3$$

El número de Reynolds se calcula como

En $x = 6$ plg: $\mathrm{Re}_x = \dfrac{\rho u_\infty x}{\mu} = \dfrac{(0.0748)(5)(3600)(0.5)}{0.044} = 15\,300$

En $x = 12$ plg: $\mathrm{Re}_x = 30\,600$

El espesor de capa límite se calcúla de la Ec. (5-19).

$$\delta = \frac{4.64x}{\mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}}}$$

Librodot

En $x = 6$ plg: $\delta = \dfrac{(4.64)(0.5)}{(15\,300)^{\frac{1}{2}}} = 0.0188$ pie

En $x = 12$ plg: $\delta = \dfrac{(4.64)(1)}{(30\,600)^{\frac{1}{2}}} = 0.0259$ pie

Para calcular el flujo másico que entra a la capa límite procedente de la corriente libre, entre $x = 6$ plg y $x = 1$ pie, se toma simplemente la diferencia del flujo másico en la capa límite entre esas dos posiciones x. En cualquier posición x, el flujo másico en la capa límite está dado por la integral

$$\int_0^\delta \rho u \, dy$$

donde la velocidad está dada por la Ec. (5-17),

$$u = u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]$$

Al evaluar la integral con esta distribución de velocidad, tenemos

$$\int_0^\delta \rho u_\infty \left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] dy = \frac{5}{8}\rho u_\infty \delta$$

Entonces, el flujo másico entrando a la capa límite es

$$\begin{aligned} \tfrac{5}{8}\rho u_\infty [\delta]_{x=0.5}^{x=1.0} &= \tfrac{5}{8}(0.0748)(5)(0.0259 - 0.0188) \\ &= 1.66 \times 10^{-3} \text{ lb}_m/\text{seg} \qquad (0.753 \times 10^{-3} \text{ kg/seg}) \end{aligned}$$

5-5 ECUACION DE ENERGIA DE LA CAPA LIMITE

El análisis anterior consideró la dinámica del fluido de un sistema de flujo de capa límite laminar. Ahora desarrollaremos la ecuación de energía para este sistema y procederemos entonces a un método integral de solución.

Considérese el volumen de control elemental mostrado en la Fig. 5-6. Para simplificar el análisis suponemos

1. Flujo estable incompresible
2. Viscosidad, conductividad térmica y calor específico constantes.
3. Conducción de calor despreciable en la dirección del flujo (dirección x)

Entonces, para el elemento mostrado, el balance de energía puede escribirse como

Energía de convección entrando por la cara izquierda + energía de convección entrando por la cara inferior + calor conducido entrando

Librodot

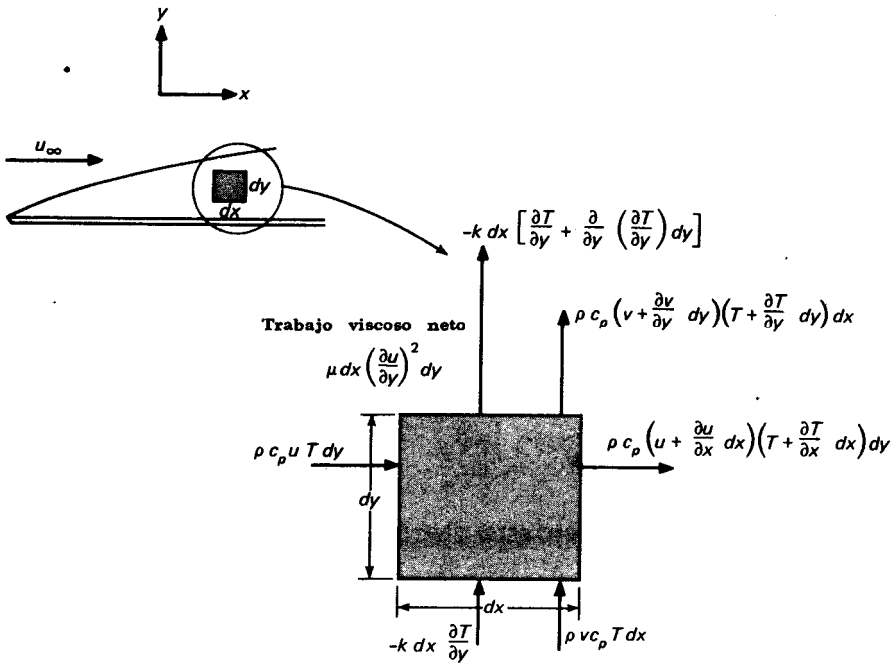


FIG. 5-6. Volumen de control elemental para análisis de energía de la capa límite laminar

por la cara inferior + trabajo viscoso neto hecho sobre el elemento = energía de convección saliendo por la cara derecha + energía de convección saliendo por la cara superior + calor conducido saliendo por la cara superior

La cantidades de energía de convección y conducción se indican en la Fig. 5-6, y el término de energía para el trabajo viscoso puede derivarse como sigue: el trabajo viscoso puede calcularse como un producto de la fuerza viscosa de corte neta y la distancia que esta fuerza se mueve por unidad de tiempo. La fuerza viscosa de corte es el producto del esfuerzo de corte y el área dx,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

y la distancia a través de la cual ésta se mueve por unidad de tiempo respecto al volumen de control elemental $dx\ dy$ es

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy$$

así que, la energía viscosa neta suministrada al elemento es

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\, dy$$

Al escribir el balance de energía correspondiente a las cantidades mostradas en la Fig. 5-6, suponiendo profundidad unitaria en la dirección z y despreciando diferenciales de segundo orden, se obtiene

$$\rho c_p\left[u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dx\, dy = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx\, dy + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\, dy$$

Mediante el uso de la relación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5-10}$$

y al dividir por ρc_p, se tiene

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{5-20}$$

Esta es la ecuación de energía de la capa límite laminar. El lado izquierdo representa el transporte neto de energía hacia el volumen de control, y el lado derecho representa la suma del calor neto conducido hacia afuera del volumen de control y el trabajo viscoso neto hecho sobre el elemento. El término de trabajo viscoso es de importancia únicamente a altas velocidades, ya que su magnitud será pequeña comparada con los otros términos cuando se estudie flujo a baja velocidad. Esto puede mostrarse con un análisis de orden de magnitud de los dos términos del lado derecho de la Ec. (5-20). Para este análisis de orden de magnitud, podríamos considerar que la velocidad tiene el orden de la velocidad del flujo libre u_∞, y la dimensión y del orden de δ. Así

$$u \sim u_\infty$$
$$y \sim \delta$$

así que

$$\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \sim \alpha\frac{T}{\delta^2}$$
$$\frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sim \frac{\mu}{\rho c_p}\frac{u_\infty^2}{\delta^2}$$

Si la razón de esas cantidades es pequeña, esto es,

$$\frac{\mu}{\rho c_p \alpha}\frac{u_\infty^2}{T} \ll 1$$

la disipación viscosa es pequeña en comparación con el término de conducción. Como un ejemplo, considérese el flujo de aire a

Librodot

$$u_\infty = 200 \text{ pies/seg}$$
$$T = 70°\text{F}$$
$$p = 14.7 \text{ lb/plg}^2$$

El agrupamiento de términos da

$$\frac{\mu}{\rho c_p \alpha} \frac{u_\infty^2}{T} = 0.0087 \ll 1$$

indicando que la disipación viscosa es pequeña. Por lo tanto, para flujo incompresible a baja velocidad, tenemos que

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5-21}$$

En realidad, nuestra derivación de la ecuación de energía ha sido muy simplificada, pues algunos términos se han eliminado del análisis por ser muy pequeños en comparación con otros. En esta forma llegamos inmediatamente a la aproximación de capa límite, sin recurrir a un proceso de eliminación laborioso con el fin de obtener la relación final simplificada. La derivación general de la ecuación de energía de capa límite es muy compleja y fuera del campo de nuestra discusión. El lector interesado debe consultar los libros de Schlichting [1] y Liepmann y Roshko [5] para mayor información.

Existe una sorprendente similitud entre la Ec. (5-21) y la ecuación de momentum para presión constante,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5-22}$$

La solución de las dos ecuaciones será exactamente de la misma forma cuando $\alpha = \nu$. Por consiguiente, debemos esperar que las magnitudes relativas de la difusividad térmica y la viscosidad cinemática tendrán una influencia importante sobre la transferencia de calor por convección, ya que estas magnitudes relacionan la distribución de velocidad con la distribución de temperatura. Este es exactamente el caso, y veremos el papel que estos parámetros desempeñan en la discusión subsecuente.

5-6 LA CAPA LIMITE TERMICA

Justamente como la capa límite hidrodinámica se definió como la región del flujo en donde se sienten las fuerzas viscosas, la capa límite térmica puede definirse como la región donde los gradientes de temperatura en el flujo están presentes. Estos gradientes de

Librodot

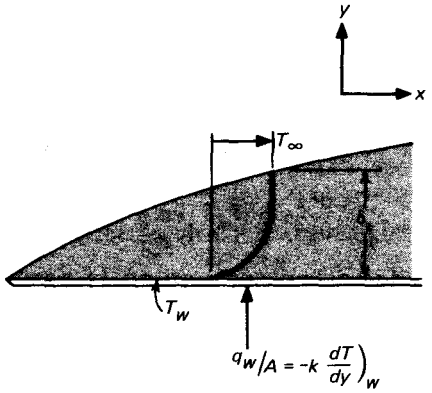


FIG. 5-7. Perfil de temperatura en la capa límite térmica

temperatura resultan del proceso de intercambio de calor entre el fluido y la pared.

Considérese el sistema mostrado en la Fig. 5-7. La temperatura de la pared es T_w, la temperatura del fluido fuera de la capa límite térmica es T_∞, y el espesor de la capa límite térmica se designa como δ_t. En la pared, la velocidad es cero, y la transferencia de calor hacia el fluido se lleva a cabo por conducción. Por consiguiente, el flujo de calor local por unidad de área, q'', es

$$q'' = -k\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_w \tag{5-23}$$

De la ley de Newton de enfriamiento [Ec. (1-8)]

$$q'' = h(T_w - T_\infty) \tag{5-24}$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Al combinar esas ecuaciones,

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_w}{T_w - T_\infty} \tag{5-25}$$

así que únicamente necesitamos encontrar el gradiente de temperatura en la pared para evaluar el coeficiente de transferencia de calor. Esto significa que debemos obtener una expresión correspondiente a la distribución de temperatura. Con el fin de hacer esto, se sigue un procedimiento similar al usado en el análisis de momentum de la capa límite.

Las condiciones que la distribución de temperatura debe satisfacer son

$$T = T_w \qquad \text{en } y = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \text{en } y = \delta_t \qquad (b)$$

$$T = T_\infty \qquad \text{en } y = \delta_t \qquad (c)$$

y escribiendo la Ec. (5-21) sin calentamiento viscoso en $y = 0$,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{en } y = 0 \qquad (d)$$

ya que las velocidades deben ser cero en la pared.

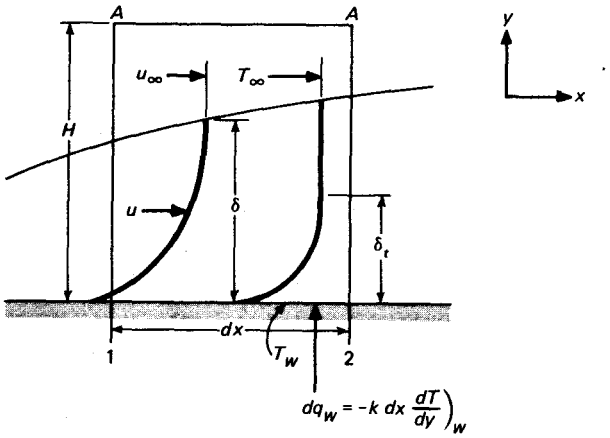


FIG. 5-8. Volumen de control para el análisis integral de energía de la capa límite laminar

Las condiciones (a) a (d) pueden ajustarse a un polinomio cúbico como en el caso del perfil de velocidad, así que

$$\frac{\theta}{\theta_\infty} = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad (5\text{-}26)$$

donde $\theta = T - T_w$. Ahora sólo queda el problema de encontrar una expresión para δ_t, el espesor de capa límite térmica. Esta puede obtenerse por un análisis integral de la ecuación de energía para la capa límite.

Considérese el volumen de control limitado por los planos 1, 2, *A-A*, y la pared, como se muestra en la Fig. 5-8. Se supone que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica, como se muestra. La temperatura de la pared es T_w, la temperatura del flujo libre es T_∞, y el calor cedido al fluido en la longitud dx es dq_w. Deseamos hacer el balance de energía

Librodot

Energía de convección entrando + trabajo viscoso dentro del elemento + transferencia de calor en la pared = energía de convección saliendo (5-27)

La energía de convección entrando a través del plano 1 es

$$\rho c_p \int_0^H uT\, dy$$

y la energía de convección saliendo a través del plano 2 es

$$\rho c_p \left(\int_0^H uT\, dy \right) + \frac{d}{dx}\left(\rho c_p \int_0^H uT\, dy \right) dx$$

El flujo másico a través del plano *A-A* es

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy \right) dx$$

llevando consigo una energía igual a

$$c_p T_\infty \frac{d}{dx}\left(\int_0^H \rho u\, dy \right) dx$$

El trabajo viscoso neto hecho dentro del elemento es

$$\mu \left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy \right] dx$$

y la transferencia de calor en la pared es

$$dq_w = -k\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w$$

Al combinar esas cantidades de energía de acuerdo con la Ec. (5-27) y agrupar términos, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T) u\, dy \right] + \frac{\mu}{\rho c_p}\left[\int_0^H \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy \right] = \alpha \left(\frac{\partial T}{dy} \right)_w \qquad (5\text{-}28)$$

Esta es la ecuación integral de energía de la capa límite para propiedades constantes y temperatura de flujo libre constante T_∞.

Para calcular la transferencia de calor en la pared, necesitamos derivar una expresión para el espesor de la capa límite térmica, la cual puede usarse en conjunto con las Ecs. (5-25) y (5-26) para determinar el coeficiente de transferencia de calor. Por ahora, despreciamos el término de disipación viscosa; este término es muy pequeño, a menos que la velocidad del flujo sea muy grande, y el cálculo de transferencia de calor a alta velocidad será considerado posteriormente.

Librodot

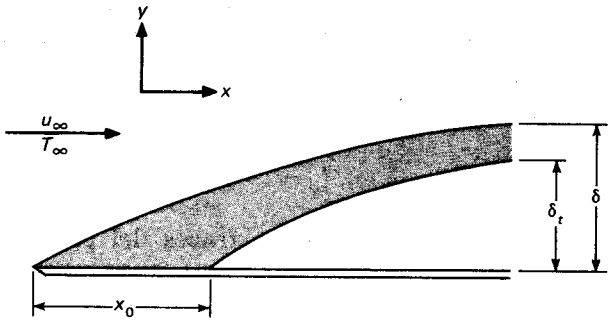


FIG. 5-9. Capas límite hidrodinámica y térmica en una placa plana. El calentamiento empieza en $x = x_0$

La placa bajo consideración no necesita ser calentada en toda su longitud. La situación que analizaremos se muestra en la Fig. 5-9, donde la capa límite hidrodinámica se desarrolla desde el extremo de la placa por donde incide el fluido, mientras que el calentamiento no empieza sino hasta $x = x_0$.

Al introducir la distribución de temperatura de la Ec. (5-26) y la distribución de velocidad de la Ec. (5-17) en la Ec. (5-28), y al despreciar el término de disipación viscosa se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^H (T_\infty - T)u\,dy\right] = \frac{d}{dx}\left[\int_0^H (\theta_\infty - \theta)u\,dy\right]$$
$$= \theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left\{\int_0^H \left[1 - \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3\right]\left[\frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]dy\right\}$$
$$= \alpha \frac{\partial T}{\partial y}\bigg)_{y=0} = \frac{3\alpha\theta_\infty}{2\delta_t}$$

Supongamos que la capa límite térmica es más delgada que la capa límite hidrodinámica. Entonces, únicamente necesitamos llevar a cabo la integración hasta $y = \delta_t$, puesto que el integrando es cero para $y > \delta_t$. Al realizar la manipulación algebraica necesaria, llevar a cabo la integración y hacer la sustitución $\zeta = \delta_t/\delta$, se obtiene

$$\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}\left[\delta\left(\tfrac{3}{20}\zeta^2 - \tfrac{3}{280}\zeta^4\right)\right] = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\delta\zeta} \tag{5-29}$$

Ya que $\delta_t < \delta$, $\zeta < 1$, y el término ζ^4 es pequeño comparado con el término ζ^2, despreciamos el término ζ^4 y escribimos

$$\tfrac{3}{20}\theta_\infty u_\infty \frac{d}{dx}(\delta\zeta^2) = \frac{3}{2}\frac{\alpha\theta_\infty}{\zeta\delta} \tag{5-30}$$

Al efectuar la diferenciación,

Librodot

$$\tfrac{1}{10}u_\infty\left(2\delta\zeta\frac{d\zeta}{dx}+\zeta^2\frac{d\delta}{dx}\right)=\frac{\alpha}{\delta\zeta}$$

o

$$\tfrac{1}{10}u_\infty\left(2\delta^2\zeta^2\frac{d\zeta}{dx}+\zeta^3\delta\frac{d\delta}{dx}\right)=\alpha$$

Pero

$$\delta\,d\delta=\frac{140}{13}\frac{\nu}{u_\infty}dx$$

y

$$\delta^2=\frac{280}{13}\frac{\nu x}{u_\infty}$$

así que tenemos

$$\zeta^3+4x\zeta^2\frac{d\zeta}{dx}=\frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu} \tag{5-31}$$

Al notar que

$$\zeta^2\frac{d\zeta}{dx}=\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\zeta^3$$

la Ec. (5-31) es una ecuación diferencial lineal de primer orden en ζ^3, y la solución es

$$\zeta^3=Cx^{-\frac{1}{4}}+\frac{13}{14}\frac{\alpha}{\nu}$$

Cuando la condición de frontera

$$\delta_t=0 \qquad \text{en } x=x_0$$
$$\zeta=0 \qquad \text{en } x=x_0$$

se aplica, la solución final dará

$$\zeta=\frac{\delta_t}{\delta}=\frac{1}{1.026}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}}\left[1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{5-32}$$

donde

$$\mathrm{Pr}=\frac{\nu}{\alpha} \tag{5-33}$$

se ha introducido. La razón ν/α se llama el número de Prandtl, en honor de Ludwig Prandtl, el científico alemán que introdujo los conceptos de la teoría de capa límite.

Cuando la placa se calienta en toda la longitud, $x_0 = 0$, y

$$\frac{\delta_t}{\delta}=\zeta=\frac{1}{1.026}\,\mathrm{Pr}^{-\frac{1}{3}} \tag{5-34}$$

En el análisis anterior se supuso que $\zeta < 1$. Esta suposición es satisfactoria para fluidos que tienen números de Prandtl mayores que 0.7 aproximadamente. Por fortuna, la mayoría de los gases y los líquidos caen dentro de esta categoría. Los metales líquidos son

Librodot

una notable excepción, sin embargo, ya que tienen números de Prandtl del orden de 0.01.

Se ha encontrado que el número de Prandtl ν/α es el parámetro que relaciona los espesores relativos de las capas límite hidrodinámica y térmica. La viscosidad cinemática de un fluido suministra información con respecto a la razón con la cual el momentum puede difundirse a través del fluido debido al movimiento molecular. La difusividad térmica nos dice la misma cosa en cuanto a la difusión de calor en el fluido. Por consiguiente, la razón de estas dos cantidades debe expresar las magnitudes relativas de difusión de momentum y de calor en el fluido. Pero estas razones de difusión son precisamente las cantidades que determinan el espesor que tendrán las capas límite para un campo de flujo externo dado; grandes difusividades significan que la influencia de viscosidad o temperatura se encuentra a distancias mayores en el campo de flujo. El número de Prandtl es, por consiguiente, la conexión entre el campo de velocidad y el campo de temperatura.

El número de Prandtl es adimensional cuando se usa un conjunto consistente de unidades.

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{c_p \mu}{k} \tag{5-35}$$

Un conjunto típico de unidades para los parámetros sería, μ en lb_m/hr-pie, c_p en Btu/lb_m-°F, k en Btu/hr-pie-°F.

Regresando ahora al análisis,

$$h = \frac{-k(\partial T/\partial y)_w}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{k}{\zeta\delta} \tag{5-36}$$

Al sustituir para el espesor de capa límite hidrodinámica la Ec. (5-19) y usar la Ec. (5-32), se tiene

$$h_x = 0.332k\ \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}} \tag{5-37}$$

La ecuación puede hacerse adimensional multiplicando ambos lados por x/k, produciendo el grupo adimensional en el lado izquierdo,

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} \tag{5-38}$$

llamado el número de Nusselt, en honor de Wilhelm Nusselt, quien hizo contribuciones significativas a la teoría de la transferencia de calor por convección. Finalmente,

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\ \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{-\frac{1}{3}} \tag{5-39}$$

Librodot

o, para la placa calentada en toda su longitud, $x_0 = 0$, y

$$\mathrm{Nu}_x = 0.332\ \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{Re}_x^{\frac{1}{2}} \tag{5-40}$$

Las Ecs. (5-37), (5-39) y (5-40) expresan los valores locales del coeficiente de transferencia de calor en términos de la distancia de la placa desde donde incide el fluido y las propiedades de éste. Para el caso en que $x_0 = 0$, el coeficiente de transferencia de calor promedio y el número de Nusselt, pueden obtenerse integrando en toda la longitud de la placa.

$$\bar{h} = \frac{\int_0^L h_x\, dx}{\int_0^L dx} = 2h_{x=L} \tag{5-41}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = 2\ \mathrm{Nu}_{x=L} \tag{5-42}$$

El lector deberá llevar a cabo las integraciones para verificar estos resultados.

El análisis anterior se basó en la suposición de que las propiedades del fluido son constantes a través del flujo. Cuando existe una variación apreciable entre las condiciones de la pared y del flujo libre, se recomienda que las propiedades se evalúen en la llamada temperatura de "película" T_f, definida como la media aritmética entre la temperatura de la pared y la del flujo libre.

$$T_f = \frac{T_w + T_\infty}{2} \tag{5-43}$$

Una solución exacta a la ecuación de energía se da en el Apéndice B. Los resultados del análisis exacto son los mismos que los del análisis aproximado dado arriba.

Ejemplo 5-4

Para el sistema de flujo del Ej. 5-3, supóngase que la placa se calienta en su longitud total a una temperatura de 120°F. Calcúlese el calor transferido en (*a*) las primeras 6 plg de la placa, y (*b*) el primer pie de la placa.

Solución. Se desea obtener la transferencia de calor total en una cierta longitud de la placa; así que deseamos calcular coeficientes promedio de transferencia de calor. Para este propósito, usamos las Ecs. (5-40) y (5-41), evaluando las propiedades a la temperatura de película. Del Apéndice A, las propiedades son

Librodot

$\nu = 0.637$ pie²/hr
$k = 0.0154$ Btu/hr-pie²-°F
$\text{Pr} = 0.71$

En $x = 6$ plg:

$$\text{Re}_x = \frac{u_\infty x}{\nu} = \frac{(5)(3\,600)(0.5)}{0.637} = 14\,130$$

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\,\text{Re}_x^{\frac{1}{2}}\,\text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

$$= (0.332)(14\,130)^{\frac{1}{2}}(0.71)^{\frac{1}{3}} = 35.2$$

$$h_x = \text{Nu}_x \frac{k}{x} = \frac{(35.2)(0.0154)}{0.5} = 1.085 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{-°F}$$

El valor promedio del coeficiente de transferencia de calor es dos veces este valor.

$$\bar{h} = (2)(1.085) = 2.17 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{°F}$$

El flujo de calor es

$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty)$$

Si suponemos profundidad unitaria en la dirección z,

$$q = (2.17)(0.5)(120 - 70) = 54.3 \text{ Btu/hr} \qquad (15.9 \text{ W})$$

En $x = 12$ plg:

$$\text{Re}_x = \frac{(5)(3\,600)(1.0)}{0.637} = 28\,200$$

$$\text{Nu}_x = (0.332)(28\,200)^{\frac{1}{2}}(0.71)^{\frac{1}{3}} = 49.8$$

$$h_x = \frac{(49.8)(0.0154)}{1.0} = 0.768$$

$$\bar{h} = (2)(0.768) = 1.536 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{°F}$$

$$q = (1.536)(1.0)(120 - 70) = 76.8 \text{ Btu/hr} \qquad (22.5 \text{ W})$$

5-7 LA RELACION ENTRE LA FRICCION DEL FLUIDO Y LA TRANSFERENCIA DE CALOR

Ya hemos visto que los campos de temperatura y de flujo están relacionados. Ahora buscamos una expresión con la cual se pueda relacionar directamente la resistencia friccional con la transferencia de calor.

El esfuerzo de corte en la pared puede expresarse en términos de un coeficiente de fricción C_f:

$$\tau_w = C_f \frac{\rho u_\infty^2}{2} \qquad (5\text{-}44)$$

Librodot

La Ec. (5-44) es la ecuación que define el coeficiente de fricción. El esfuerzo de corte puede también calcularse de la relación

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big)_w$$

Usando la distribución de velocidad dada por la Ec. (5-17),

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{\delta}$$

y haciendo uso de la relación derivada para el espesor de la capa límite,

$$\tau_w = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4.64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-45}$$

Al combinar las Ecs. (5-44) y (5-45),

$$\frac{C_{fx}}{2} = \frac{3}{2}\frac{\mu u_\infty}{4.64}\left(\frac{u_\infty}{\nu x}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\rho u_\infty^2} = 0.323\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \tag{5-46}$$

La Ec. (5-40) puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{Nu}_x}{\mathrm{Re}_x\,\mathrm{Pr}} = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty} = 0.332\ \mathrm{Pr}^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}}$$

El grupo de la izquierda se llama el número de Stanton,

$$\mathrm{St}_x = \frac{h_x}{\rho c_p u_\infty}$$

así que

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = 0.332\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \tag{5-47}$$

Comparando las Ecs. (5-46) y (5-47), notamos que los lados derechos de las ecuaciones son semejantes, excepto por una diferencia de alrededor de 3% en la constante, lo cual es el resultado de la naturaleza aproximada del análisis integral de capa límite. Reconocemos esta aproximación y escribimos

$$\mathrm{St}_x\,\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{C_{fx}}{2} \tag{5-48}$$

La Ec. (5-48) expresa la relación entre la fricción del fluido y la transferencia de calor, para flujo laminar en una placa plana. El coeficiente de transferencia de calor puede así determinarse haciendo mediciones del arrastre friccional en una placa, en condiciones en las que no hay transferencia de calor. Esta relación entre la fricción del fluido y la transferencia de calor se llama la analogía de Reynolds.

Librodot

Resulta que la Ec. (5-48) puede también aplicarse al flujo turbulento en una placa plana y en una forma modificada al flujo turbulento en un tubo. Esto no se aplica a flujo laminar en un tubo. En general, es necesario un tratamiento más riguroso de las ecuaciones que gobiernan, cuando se trabaja con nuevas aplicaciones de analogía transferencia de calor-fricción del fluido, y los resultados no siempre toman la forma simple de la Ec. (5-48). El lector interesado puede consultar el libro de Knudsen y Katz [6] para mayor información sobre este importante tema. En este punto, la analogía simple desarrollada arriba ha servido para amplificar nuestro entendimiento de los procesos físicos en convección, y refuerza la noción de que los procesos de transferencia de calor y transporte viscoso están relacionados tanto al nivel microscópico como al macroscópico.

Ejemplo 5-5

Para el sistema de flujo del Ej 5-4, calcúlese la fuerza de arrastre ejercida sobre el primer pie de la placa, usando la analogía entre la fricción del fluido y la transferencia de calor.

Solución. Usamos la Ec. (5-48) para calcular el coeficiente de fricción, y entonces calculamos la fuerza de arrastre.

$$\mathrm{St}_x \, \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{C_{fx}}{2}$$

Si se desea el coeficiente de fricción promedio

$$\overline{\mathrm{St}} \, \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{\overline{C_f}}{2}$$

$$\overline{\mathrm{St}} = \frac{\bar{h}}{\rho c_p u_\infty} = \frac{1.536}{(0.0716)(0.24)(5)(3\,600)} = 0.00497$$

$$(0.00497)(0.71)^{\frac{2}{3}} = \frac{\overline{C_f}}{2}$$

$$\overline{C_f} = 0.00788$$

El esfuerzo de corte promedio en la pared se calcula de la Ec. (5-44).

$$\overline{\tau_w} = \overline{C_f} \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

$$= \frac{(0.00788)(0.0716)(5)^2}{(2)(32.2)} = 2.19 \times 10^{-4} \text{ lb}_f/\text{pie}^2$$

La fuerza de arrastre es el producto de este esfuerzo de corte y el área,

$$D = (2.19 \times 10^{-4})(1) = 2.19 \times 10^{-4} \text{ lb}_f \qquad (9.74 \times 10^{-4} \text{ N})$$

Librodot

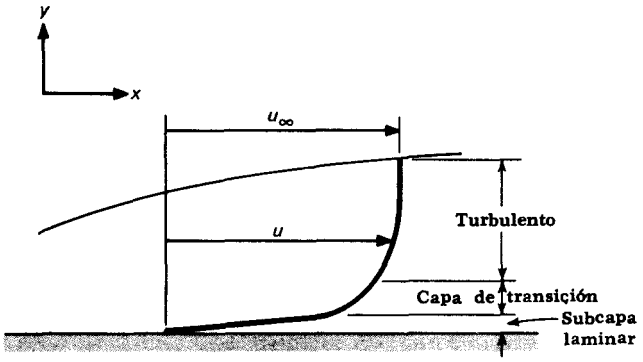


FIG. 5-10. Perfil de velocidad en la capa límite turbulenta de una placa plana

5-8 TRANSFERENCIA DE CALOR EN LA CAPA LIMITE TURBULENTA

Considérese una porción de la capa límite turbulenta como se muestra en la Fig. 5-10. Una región muy delgada próxima a la superficie de la placa tiene un carácter laminar, y la acción viscosa y la transferencia de calor se llevan a cabo en circunstancias parecidas a las de flujo laminar. Más lejos, a distancias y mayores de la placa, se experimenta algo de acción turbulenta, pero, la acción viscosa molecular y la conducción de calor son todavía importantes. Esta región se llama la capa de transición. Todavía más lejos, el flujo es completamente turbulento, y el mecanismo principal de intercambio de momentum y calor involucra porciones macroscópicas de fluido moviéndose en el flujo. En esta región por completo turbulenta, hablamos de la *viscosidad de fluctuación turbulenta* y la *conductividad térmica de fluctuación turbulenta*. Estas propiedades pueden ser diez veces más grandes que los valores moleculares.

El mecanismo físico de transferencia de calor en flujo turbulento es muy similar al del flujo laminar; la diferencia principal es que uno debe tratar con las propiedades turbulentas en lugar de la conductividad térmica y viscosidad ordinarias. La dificultad principal en un tratamiento analítico es que estas propiedades de fluctuación turbulenta varían a través de la capa límite, y la variación específica puede determinarse sólo a partir de datos experimentales. Este es un punto importante. Todos los análisis de flujo turbulento deben eventualmente descansar sobre datos experimentales, ya que no hay una teoría por completo adecuada para predecir el comportamiento del flujo turbulento.

Librodot

Podríamos atacar el problema de transferencia de calor turbulento en una de estas dos formas, ya sea tomando perfiles de velocidad medidos en forma experimental y efectuando un análisis integral de capa límite, o tomando coeficientes de fricción experimentalmente medidos y aplicando la analogía entre la fricción del fluido y la transferencia de calor que fue desarrollada antes. Este segundo método es el más fácil de aplicar, pero necesitamos extender el trabajo fundamental antes de seguir adelante.

Para usar la analogía entre la fricción del fluido y la transferencia de calor, debe calcularse el número de Prandtl para la situación de flujo turbulento. Se ha notado que tanto la acción viscosa como la conducción térmica se incrementan debido al movimiento de las fluctuaciones turbulentas en el flujo. Más aún, es razonable esperar que las dos se incrementarán en la misma proporción, así que se puede usar el número de Prandtl calculado con las propiedades del fluido ordinarias. Esta suposición es buena, puesto que los cálculos de transferencia de calor basados sobre la analogía de fricción del fluido para flujo turbulento se asemejan bastante a los datos experimentales.

Las mediciones experimentales muestran que el coeficiente de fricción local para flujo turbulento es

$$C_{fx} = 0.0576\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \tag{5-49}$$

para números de Reynolds entre 5×10^5 y 10^7. Al aplicar la analogía de fricción del fluido [Ec. (5-48)],

$$\mathrm{St}_x\ \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = 0.0288\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{5}} \tag{5-50}$$

La transferencia de calor en flujo laminar se expresó en términos del número de Stanton como

$$\mathrm{St}_x\ \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = 0.332\ \mathrm{Re}_x^{-\frac{1}{2}} \tag{5-51}$$

Para obtener una expresión para el coeficiente de transferencia de calor promedio sobre una longitud L de la placa, cuando las capas límite laminar y turbulenta están presentes, debemos integrar las dos expresiones anteriores. Para propósitos de esta integración se supone que el número de Reynolds crítico para transición de flujo laminar a turbulento es de 5×10^5. Entonces

$$\overline{\mathrm{St}}\ \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{\int_0^{x_c} 0.332 \sqrt{\frac{\nu}{u_\infty x}}\, dx + \int_{x_c}^{L} 0.0288 \left(\frac{\nu}{u_\infty x}\right)^{\frac{1}{5}} dx}{L} \tag{5-52}$$

donde $x_c = 5 \times 10^5 \dfrac{\nu}{u_\infty}$ ya que $\mathrm{Re}_{crit} = 5 \times 10^5$

Librodot

Al llevar a cabo la integración,

$$\overline{\mathrm{St}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = 0.036\,\mathrm{Re}_{x=L}^{-\frac{1}{5}} - 836\,\mathrm{Re}_{x=L}^{-1} \tag{5-53}$$

Si se usa el número de Nusselt para expresar el coeficiente promedio de transferencia de calor, entonces

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}(0.036\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 836) \tag{5-54}$$

Ejemplo 5-6

Aire a 70°F y 14.7 $\mathrm{lb}_f/\mathrm{plg}^2$ absolutas fluye sobre una placa plana a 100 pies/seg. La placa es de 2.5 pies de longitud, y se mantiene a 130°F. Suponiendo profundidad unitaria en la dirección z, calcúlese la transferencia de calor de la placa.

Solución. Evaluamos las propiedades del aire a la temperatura de película.

$$T_f = (70 + 130)/2 = 100°\mathrm{F}$$
$$\rho = 0.071\ \mathrm{lb}_m/\mathrm{pie}^3$$
$$\mu = 0.046\ \mathrm{lb}_m/\mathrm{hr\text{-}pie}$$
$$\mathrm{Pr} = 0.711$$
$$k = 0.0155\ \mathrm{Btu/hr\text{-}pie\text{-}°F}$$
$$c_p = 0.24\ \mathrm{Btu/lb}_m\text{-}°\mathrm{F}$$

El número de Reynolds es

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho u_\infty L}{\mu} = \frac{(0.071)(100)(3\,600)(2.5)}{0.046} = 1.39 \times 10^6$$

y la capa límite es turbulenta, puesto que el número de Reynolds es mayor que 5×10^5. Para calcular la transferencia de calor usamos la Ec. (5-54).

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = \frac{\bar{h}L}{k} = \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}(0.036\,\mathrm{Re}_L^{0.8} - 836)$$
$$= (0.711)^{\frac{1}{3}}[(0.036)(1.39 \times 10^6)^{0.8} - 836] = 1\,890$$
$$\bar{h} = \overline{\mathrm{Nu}}_L \frac{k}{L} = \frac{(1\,890)(0.0155)}{2.5} = 11.7\ \mathrm{Btu/hr\text{-}pie^2\text{-}°F}$$
$$q = \bar{h}A(T_w - T_\infty) = (11.7)(2.5)(130 - 70) = 1755\ \mathrm{Btu/hr} \quad (514\ \mathrm{W})$$

5-9 TRANSFERENCIA DE CALOR EN EL FLUJO LAMINAR EN UN TUBO

Considérese el sistema de flujo en un tubo mostrado en la Fig. 5-11. Deseamos calcular la transferencia de calor en condiciones de flujo

Librodot

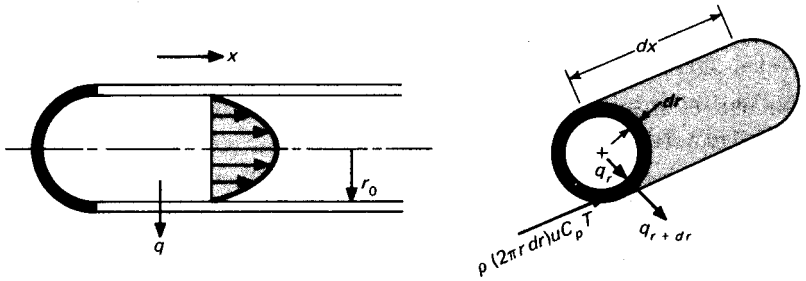


FIG. 5-11. Volumen de control para análisis de energía en el flujo en un tubo

desarrollado cuando el flujo permanece laminar. La temperatura de la pared es T_w, el radio del tubo es r_o, y la velocidad en el centro del tubo es u_0. Se supone que la presión es uniforme en cualquier sección transversal. La distribución de velocidad puede derivarse considerando el elemento de fluido mostrado en la Fig. 5-12. Las fuerzas de presión están balanceadas por las fuerzas viscosas de corte, así que

$$\pi r^2\,dp = \tau 2\pi r\,dx = 2\pi r\mu\,dx\,\frac{du}{dr}$$

o

$$du = \frac{1}{2\mu}\,r\,\frac{dp}{dx}\,dr$$

y

$$u = \frac{1}{4\mu}\,\frac{dp}{dx}\,r^2 + \text{const} \qquad (5\text{-}55)$$

Con la condición de frontera

$$u = 0 \quad \text{en } r = r_o$$

$$u = \frac{1}{4\mu}\,\frac{dp}{dx}\,(r^2 - r_o^2)$$

La velocidad en el centro del tubo está dada por

$$u_0 = -\frac{r_o^2}{4\mu}\,\frac{dp}{dx} \qquad (5\text{-}56)$$



FIG. 5-12. Balance de fuerzas sobre un elemento de fluido en el flujo en un tubo

Librodot

así que la distribución de velocidad puede escribirse como

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \frac{r^2}{r_o^2} \tag{5-57}$$

la cual es la distribución parabólica familiar para flujo laminar en un tubo. Ahora considérese el proceso de transferencia de calor para tal sistema de flujo. Con el fin de simplificar el análisis, supondremos que hay un flujo de calor constante por unidad de área en la pared del tubo; esto es,

$$\frac{dq_w}{dx} = \text{constante}$$

El flujo de calor conducido hacia el elemento anular es

$$dq_r = -k2\pi r\, dx \frac{\partial T}{\partial r}$$

y el calor conducido hacia afuera es

$$dq_{r+dr} = -k2\pi(r + dr)\, dx \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\, dr\right)$$

El calor neto de convección hacia afuera del elemento es

$$2\pi r\, dr\, \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x}\, dx$$

El balance de energía es

Energía neta de convección, que sale = calor neto conducido hacia adentro o, despreciando diferenciales de segundo orden.

$$r\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x}\, dx\, dr = k\left(\frac{\partial T}{\partial r} + r\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right) dx\, dr$$

lo cual puede reescribirse como

$$\frac{1}{ur}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-58}$$

Se supone que el flujo de calor por unidad de área en la pared es constante, así que, la temperatura promedio del fluido debe aumentar linealmente con x, o

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \text{constante}$$

Esto significa que los perfiles de temperatura serán similares a diferentes distancias x a lo largo del tubo. Las condiciones de frontera para la Ec. (5-58) son

Librodot

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad \text{en } r = 0$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r}\Big)_{r=r_o} = q_w = \text{constante}$$

Para obtener la solución a la Ec. (5-58), debe introducirse la distribución de velocidad dada por la Ec. (5-57). Se supone que los campos de temperatura y velocidad son independientes; esto es, un gradiente de temperatura no afecta los cálculos del perfil de velocidad. Esto es equivalente a especificar que las propiedades permanecen constantes en el flujo. Con la sustitución del perfil de velocidad la Ec. (5-58) da

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right)r$$

La integración da

$$r\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4r_o^2}\right) + C_1$$

y una segunda integración da

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}u_0\left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_o^2}\right) + C_1 \ln r + C_2$$

Al aplicar la primera condición de frontera, encontramos que

$$C_1 = 0$$

La segunda condición de frontera ha sido satisfecha, notando que el gradiente de temperatura axial $\partial T/\partial x$ es constante. La distribución de temperatura puede, finalmente, escribirse en términos de la temperatura en el centro del tubo.

$$T = T_c \qquad \text{en } r = 0 \quad \text{así que } C_2 = T_c$$

$$T - T_c = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{u_0 r_o^2}{4}\left[\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{r}{r_o}\right)^4\right] \tag{5-59}$$

La temperatura promedio

En el flujo en un tubo, el coeficiente de transferencia de calor por convección, por lo general se define como

$$\text{Flujo de calor local} = q'' = h\,(T_w - T_b) \text{ por unidad de área} \tag{5-60}$$

donde T_w = temperatura de la pared

T_b = llamada temperatura promedio o temperatura del fluido de energía promedio a través del tubo, puede calcularse de

Librodot

$$T_b = \bar{T} = \frac{\int_0^{r_o} \rho 2\pi r\, dr\, uc_p T}{\int_0^{r_o} \rho 2\pi r\, dr\, uc_p} \tag{5-61}$$

La razón para usar la temperatura promedio en la definición de los coeficientes de transferencia de calor para flujo en un tubo puede explicarse como sigue. En este flujo, no fácilmente se visualiza la condición de "corriente libre" que está presente en el flujo sobre una placa plana. Aun la temperatura del centro T_c no se expresa con facilidad en términos de las variables del flujo a la entrada y la transferencia de calor. Para la mayoría de los problemas de transferencia de calor en el flujo de tubos o canales, el tópico de mayor interés es la energía total transferida al fluido, ya sea en una longitud elemental del tubo o sobre la longitud entera del canal.. En cualquier posición x, la temperatura que es indicativa de la energía total del flujo es una temperatura promedio masa-energía integradas, sobre toda el área de flujo. El numerador de la Ec. (5-61) representa la energía de flujo total a través del tubo, y el denominador representa el producto del flujo másico y el calor específico integrado sobre el área de flujo. La temperatura promedio es así representativa de la energía total del flujo en la posición particular. Por esta razón, a la temperatura promedio se le llama algunas veces temperatura "mezclado", ya que ésta es la temperatura que el fluido tendría si se colocara en una cámara mezcladora y se le permitiera alcanzar equilibrio. Para la distribución de temperatura dada en la Ec. (5-59), la temperatura promedio es una función lineal de x, ya que el flujo de calor por unidad de área en la pared del tubo es constante. Al calcular la temperatura promedio de la Ec. (5-61), tenemos

$$T_b = T_c + \frac{7}{96}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-62}$$

y para la temperatura de la pared

$$T_w = T_c + \frac{3}{16}\frac{u_0 r_o^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-63}$$

El coeficiente de transferencia de calor se calcula de

$$q = hA(T_w - T_b) = kA\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=r_o}$$

$$h = \frac{k(\partial T/\partial r)_{r=r_o}}{T_w - T_b} \tag{5-64}$$

El gradiente de temperatura está dado por

Librodot

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big)_{r=r_o} = \frac{u_0}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{r}{2} - \frac{r^3}{4r_o^2}\right)_{r=r_o} = \frac{u_0 r_o}{4\alpha}\frac{\partial T}{\partial x} \tag{5-65}$$

Al sustituir las Ecs. (5-62), (5-63) y (5-65) en la Ec. (5-64), se tiene

$$h = \frac{24}{11}\frac{k}{r_o} = \frac{48}{11}\frac{k}{d_o}$$

o al expresar el resultado en términos del número de Nusselt,

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{hd_o}{k} = 4.364 \tag{5-66}$$

de acuerdo con un cálculo exacto hecho por Sellars, Tribus y Klein [3], que considera el perfil de temperatura tal y como se desarrolla. Algunas relaciones empíricas para calcular la transferencia de calor en el flujo laminar en un tubo se presentarán en el Cap. 6.

5-10□FLUJO TURBULENTO EN UN TUBO

El perfil de velocidad desarrollado para flujo turbulento en un tubo aparecerá como se muestra en la Fig. 5-13. Una subcapa laminar o "película", ocupa el espacio próximo a la superficie, mientras que el núcleo central del flujo es turbulento. Para determinar la transferencia de calor analíticamente en esta situación, se requiere, como siempre, un conocimiento de la distribución de temperatura en el flujo. Para obtener esta distribución, el análisis debe tomar en consideración el efecto de las fluctuaciones turbulentas en la transferencia de calor y momentum. Usaremos un análisis aproximado que relaciona la conducción y el transporte de calor al transporte de momentum en el flujo, esto es, efectos viscosos.

El flujo de calor a través de un elemento de fluido en flujo laminar, puede expresarse por

$$\frac{q}{A} = -k\frac{dT}{dy}$$

Al dividir ambos lados de la ecuación por ρc_p,

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -\alpha\frac{dT}{dy}$$

Debe recordarse que α es la difusividad molecular del calor. En flujo turbulento uno podría suponer que el transporte de calor pudiera representarse por

$$\frac{q}{\rho c_p A} = -(\alpha + \epsilon_H)\frac{dT}{dy} \tag{5-67}$$

Librodot

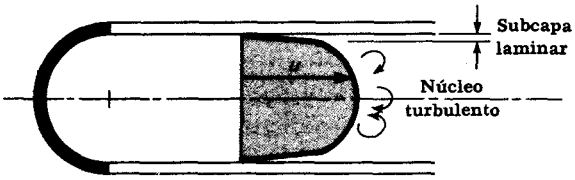


FIG. 5-13. Perfil de velocidad en flujo turbulento en un tubo

donde ε_H es una difusividad de calor de fluctuación turbulenta.

La Ec. (5-67) expresa la conducción de calor total como una suma de la conducción molecular y la conducción macroscópica de fluctuación turbulenta. En forma similar, el esfuerzo de corte en el flujo turbulento pudiera escribirse como

$$\frac{\tau}{\rho} = \left(\frac{\mu}{\rho} + \epsilon_M\right)\frac{du}{dy} = (\nu + \epsilon_M)\frac{du}{dy} \tag{5-68}$$

donde ε_M es la difusividad de fluctuación turbulenta para el momentum. Ahora se supondrá que el calor y el momentum son transportados a la misma razón, esto es, $\varepsilon_M = \varepsilon_H$ y $\nu = \alpha$, o Pr = 1.

Al dividir la Ec. (5-67) por la Ec. (5-68), se tiene

$$\frac{q}{c_p A\tau}\,du = -dT$$

Una suposición adicional es que la razón de transferencia de calor por unidad de área a esfuerzo de corte es constante a través del campo de flujo. Esto es consistente con la suposición de que el calor y el momentum son transportados a la misma razón. Por consiguiente,

$$\frac{q}{A\tau} = \text{constante} = \frac{q_w}{A_w\tau_w}$$

Entonces, integrando la Ec. (5-69) entre las condiciones de la pared y las condiciones medias promedio se obtiene

$$\frac{q_w}{A_w\tau_w c_p}\int_{u=0}^{u=u_m} du = \int_{T_w}^{T_b} -dT$$

$$\frac{q_w u_m}{A_w\tau_w c_p} = T_w - T_b \tag{5-69}$$

Pero la transferencia de calor en la pared puede expresarse como

$$q_w = hA_w(T_w - T_b)$$

y el esfuerzo de corte puede calcularse de

$$\tau_w = \frac{\Delta P(\pi d_o^2)}{4\pi\, d_o L} = \frac{\Delta P}{4}\frac{d_o}{L}$$

Librodot

La caída de presión puede expresarse en términos de un factor de fricción f por

$$\Delta P = f\frac{L}{d}\rho\frac{u_m^2}{2} \tag{5-70}$$

así que

$$\tau_w = \frac{f}{8}\rho u_m^2 \tag{5-71}$$

Sustituyendo las expresiones para τ_w y q_w en la Ec. (5-69), se tiene

$$\mathrm{St} = \frac{h}{\rho c_p u_m} = \frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}} = \frac{f}{8} \tag{5-72}$$

La Ec. (5-72) se llama la analogía de Reynolds para flujo en un tubo. Esta relaciona la razón de transferencia de calor con la pérdida friccional en el flujo de un tubo, y está de acuerdo con los experimentos cuando se usa con gases cuyos números de Prandtl son cercanos a la unidad. (Recordamos que Pr = 1 fue una de las suposiciones en el análisis.)

Una fórmula empírica para el factor de fricción turbulenta hasta números de Reynolds superiores a 2×10^5 y para flujo en tubos lisos, es

$$f = \frac{0.316}{\mathrm{Re}_d^{\frac{1}{4}}} \tag{5-73}$$

Al introducir esta expresión en la Ec. (5-72), se tiene

$$\frac{\mathrm{Nu}_d}{\mathrm{Re}_d\,\mathrm{Pr}} = 0.0395\,\mathrm{Re}_d^{-\frac{1}{4}}$$

o

$$\mathrm{Nu}_d = 0.0395\,\mathrm{Re}_d^{\frac{3}{4}} \tag{5-74}$$

ya que se supuso el número de Prandtl igual a la unidad. Esta derivación de la relación para transferencia de calor turbulenta en tubos lisos está altamente restringida debido a la suposición de que Pr $\sim$ 1.0. La analogía transferencia de calor-fricción del fluido de la Sec. 5-7, indica una dependencia sobre el número de Prandtl de $\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}}$ para el problema de la placa plana y, como resulta ser, esta dependencia trabaja perfectamente bien para flujo turbulento en un tubo. Las Ecs. (5-72) y (5-74) pueden modificarse por este factor para dar

$$\mathrm{St}\,\mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \frac{f}{8} \tag{5-72a}$$

$$\mathrm{Nu}_d = 0.0395\,\mathrm{Re}_d^{\frac{3}{4}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}} \tag{5-74a}$$

Como veremos en el Cap. 6, la Ec. (5-74*a*) predice coeficientes de transferencia de calor ligeramente mayores que los observados en los experimentos. El propósito de la discusión en este punto ha

Librodot

sido el mostrar que uno puede llegar a una relación para transferencia de calor turbulenta en una manera analítica bastante fácil. Como se ha indicado anteriormente, un desarrollo riguroso de la analogía de Reynolds entre la transferencia de calor y la fricción del fluido involucra consideraciones fuera del campo de nuestra discusión, y la trayectoria simple de razonamiento seleccionada aquí se ofrece con el propósito de indicar la naturaleza general de los procesos físicos.

Para propósitos de cálculo, la relación correcta que debe usarse para flujo turbulento en un tubo liso es la Ec. (6-1), *la cual listamos aquí para comparación,*

$$\mathrm{Nu}_d = 0.023\ \mathrm{Re}^{0.8}\ \mathrm{Pr}^{0.4} \tag{6-1}$$

Todas las propiedades en la Ec. (6-1) están evaluadas a la temperatura promedio.

5-11 TRANSFERENCIA DE CALOR EN FLUJOS A ALTA VELOCIDAD

Nuestro análisis previo de transferencia de calor de capa límite (Sec. 5-6) despreció los efectos de disipación viscosa dentro de la capa límite. Cuando la velocidad de corriente libre es muy elevada, como en los aviones de alta velocidad, esos efectos de disipación deben considerarse. Comencemos nuestro análisis considerando el caso adiabático, esto es, una pared perfectamente aislada. En este caso, la temperatura de la pared puede ser mucho más elevada que la temperatura de corriente libre, aun cuando ninguna transferencia de calor se lleve a cabo. Esta alta temperatura resulta de dos situaciones: (1) el incremento en temperatura del fluido cuando éste es descelerado en la superficie de la placa, mientras la energía cinética del flujo se convierte en energía interna térmica, y (2) el efecto de calentamiento debido a disipación viscosa. Considérese la primera de estas situaciones. La energía cinética del gas se convierte en energía térmica cuando el gas se pone en reposo, y este proceso es descrito por la ecuación de energía de flujo estable para un proceso adiabático.

$$i_0 = i_\infty + \frac{1}{2g_c} u_\infty^2 \tag{5-75}$$

donde i_0 es la entalpía de estancamiento del gas. Esta ecuación puede escribirse en términos de temperatura como

$$c_p(T_0 - T_\infty) = \frac{1}{2g_c} u_\infty^2$$

Librodot

donde T_0 es la temperatura de estancamiento y T_∞ es la temperatura estática de corriente libre. Expresada en términos del número de Mach de corriente libre,

$$\frac{T_0}{T_\infty} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \tag{5-76}$$

donde M_∞ es el número de Mach definido como $M_\infty = u_\infty/a$, y a es la velocidad acústica, la cual, para un gas perfecto puede calcularse con

$$a = \sqrt{\gamma g_c R T} \tag{5-77}$$

donde R es la constante del gas.

En el caso real de un problema de flujo de capa límite, el fluido no se pone en reposo en forma reversible debido a que la acción viscosa es básicamente un proceso irreversible en el sentido termodinámico. Además, no toda la energía cinética de la corriente libre se convierte en energía térmica —parte de ella se pierde como calor y parte se disipa en la forma de trabajo viscoso—. Para tomar en cuenta las irreversibilidades en un sistema de flujo de capa límite, un *factor de recuperación* se define por

$$r = \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \tag{5-78}$$

donde T_{aw} es la temperatura real de la pared adiabática y T_∞ es la temperatura estática de la corriente libre. El factor de recuperación puede determinarse experimentalmente o, para algunos sistemas de flujo, pueden hacerse cálculos analíticos.

La ecuación de energía de capa límite

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \tag{5-20}$$

ha sido resuelta para la situación de flujo a alta velocidad, tomando en cuenta el término de calentamiento viscoso. Aun cuando la solución completa es algo tediosa, los resultados finales son notablemente simples. Para nuestros propósitos, presentaremos sólo los resultados, e indicaremos cómo pueden ser aplicados. El lector es referido al Ap. B para una solución exacta de la Ec. (5-20). Una excelente sinopsis del problema de transferencia de calor a alta velocidad se da en un reporte de Eckert [4]. En la Fig. B-3 se dan algunos perfiles típicos de temperatura de capa límite, para una pared adiabática en flujo a alta velocidad.

El resultado esencial del análisis de transferencia de calor a alta velocidad, es que las razones de transferencia de calor pueden calcu-

Librodot

larse por lo general con las mismas relaciones usadas para flujo incompresible a baja velocidad, cuando el coeficiente promedio de transferencia de calor se vuelve a definir con la relación

$$q = \bar{h}A(T_w - T_{aw}) \tag{5-79}$$

Nótese que la diferencia entre la temperatura de pared adiabática y la temperatura real de la pared se usa en la definición, de tal manera que la expresión dará un valor de cero flujo de calor cuando la pared está a la temperatura de la pared adiabática. Para gases con número de Prandtl cercano a la unidad se han derivado las siguientes relaciones para el factor de recuperación:

Flujo laminar: $r = \mathrm{Pr}^{\frac{1}{2}}$ (5-80)

Flujo turbulento: $r = \mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$ (5-81)

Estos factores de recuperación pueden usarse junto con la Ec. (5-78) para obtener la temperatura de la pared adiabática.

En capas límite a alta velocidad pueden ocurrir gradientes de temperatura sustanciales, y habrá consecuentemente gran variación en las propiedades a través de la capa límite. Las ecuaciones de transferencia de calor para propiedades constantes aún pueden usarse si las propiedades son introducidas a una temperatura de referencia T^*, como recomienda Eckert.

$$T^* = T_\infty + 0.50(T_w - T_\infty) + 0.22(T_{aw} - T_\infty) \tag{5-82}$$

La analogía entre la transferencia de calor y la fricción del fluido [Ec. (5-48)], puede también utilizarse cuando el coeficiente de fricción se conoce. Al resumir las relaciones usadas para cálculos de transferencia de calor a alta velocidad:

Capa límite laminar ($\mathrm{Re}_x < 5 \times 10^5$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*\frac{1}{2}} = 0.332 \, \mathrm{Re}_x^{*-\frac{1}{2}} \tag{5-83}$$

Capa límite turbulenta ($5 \times 10^5 < \mathrm{Re}_x < 10^7$):

$$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*\frac{2}{3}} = 0.0288 \, \mathrm{Re}_x^{*-\frac{1}{5}} \tag{5-84}$$

Para capas límite turbulentas con números de Reynolds entre 10^7 y 10^9, Eckert recomienda la fórmula

$$C_{fx} = \frac{0.370}{(\log \mathrm{Re}_x)^{2.584}} \tag{5-85}$$

así que $$\mathrm{St}_x^* \, \mathrm{Pr}^{*\frac{2}{3}} = \frac{0.185}{(\log \mathrm{Re}_x^*)^{2.584}} \quad \text{para } 10^7 < \mathrm{Re}_x < 10^9 \tag{5-86}$$

Librodot

El superíndice * en las ecuaciones anteriores indica que las propiedades son evaluadas en la temperatura de referencia dada por la Ec. (5-82).

Para obtener un coeficiente de transferencia de calor promedio, las expresiones anteriores deben integrarse sobre la longitud de la placa. Si el número de Reynolds cae en un rango tal que debe usarse la Ec. (5-86), la integración no puede expresarse en forma cerrada, debe usarse una integración numérica. Hay que tener cuidado al realizar la integración para el problema de transferencia de calor a alta velocidad, ya que la temperatura de referencia es diferente para las porciones laminar y turbulenta de la capa límite. Esto se debe a los diferentes valores del factor de recuperación usados para flujo laminar y turbulento, como lo indican las Ecs. (5-80) y (5-81).

Ejemplo 5-7

Una placa plana de 2 pies de longitud y 1 pie de ancho, se coloca en un túnel de viento donde las condiciones de flujo son $M = 3$, $p = 1/20$ atm, y $T_\infty = -40°F$. ¿Qué cantidad de enfriamiento debe usarse para mantener la temperatura de la placa a 100°F?

Solución. Debemos considerar las porciones laminar y turbulenta de la capa límite separadamente, ya que los factores de recuperación y, por consiguiente, las temperaturas de pared adiabática usadas para establecer el flujo de calor, serán diferentes para los diferentes regímenes de flujo. Resulta que la diferencia es bastante pequeña en este problema en particular, pero seguiremos un procedimiento que se usaría si la diferencia fuera apreciable, indicando así el método general de solución.

La velocidad acústica de la corriente libre se calcula de

$$a = \sqrt{\gamma g_c RT} = 1006 \text{ pie/seg} \quad (307 \text{ m/seg})$$

así que la velocidad de la corriente libre es

$$u_\infty = (3)(1\,006) = 3\,018 \text{ pies/seg}$$

El número de Reynolds máximo se estima haciendo un cálculo basado en las propiedades evaluadas a las condiciones de corriente libre.

$$\rho_\infty = \frac{(14.7)(144)}{(20)(53.35)(420)} = 0.00472 \text{ lb}_m/\text{pie}^3 \quad (0.0756 \text{ kg/m}^3)$$

$$\mu_\infty = 0.0366 \text{ lb}_m/\text{hr-pie}$$

$$\text{Re}_{L\infty} = \frac{(0.00472)(3\,018)(3\,600)(2)}{0.0366} = 2.8 \times 10^6$$

Librodot

Así, concluimos que tanto la transferencia de calor de la capa límite laminar como la de la turbulenta se deben considerar. La transferencia de calor laminar se calcula con la Ec. (5-83), y la transferencia de calor turbulenta con la Ec. (5-84). Antes de aplicar esas ecuaciones debemos determinar las temperaturas de referencia para las condiciones laminar y turbulenta, y entonces evaluar las propiedades a esas temperaturas.

Porción laminar

$$T_0 = T_\infty\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right) = 1175°\text{R}$$

$$r = \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Se supone un número de Prandtl de 0.71, así que

$$r = (0.71)^{\frac{1}{3}} = 0.843$$

$$= \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{aw} - 420}{1175 - 420}$$

$$T_{aw} = 1056°\text{R}$$

$$T^* = T_\infty + 0.50(T_w - T_\infty) + 0.22(T_{aw} - T_\infty)$$

$$= 630°\text{R} = 170°\text{F}$$

Al verificar el número de Prandtl,

$$\text{Pr}^* = 0.698$$

así que el cálculo es válido. Si hubiera una diferencia apreciable entre el valor de Pr* y el valor usado para determinar el factor de recuperación, los cálculos tendrían que repetirse hasta que se alcanzara concordancia.

Las otras propiedades usadas en el análisis de transferencia de calor laminar, son:

$$\rho^* = \frac{(14.7)(144)}{(20)(53.35)(630)} = 0.00315 \text{ lb}_m/\text{pie}^3$$

$$\mu^* = 0.0502 \text{ lb}_m/\text{hr-pie}$$

$$k^* = 0.0171 \text{ Btu/hr-pie-°F}$$

$$c_p^* = 0.24 \text{ Btu/lb}_m\text{-°F}$$

Porción turbulenta. Supóngase

$$\text{Pr} = 0.71$$

$$r = \text{Pr}^{\frac{1}{3}} = (0.71)^{\frac{1}{3}} = 0.892$$

$$= \frac{T_{aw} - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T_{aw} - 420}{1175 - 420}$$

$$T_{aw} = 1093°\text{R}$$

$$T^* = T_\infty + 0.50(T_w - T_\infty) + 0.22(T_{aw} - T_\infty)$$

$$= 420 + 0.50(560 - 420) + 0.22(1093 - 420)$$

$$= 638°\text{R} = 178°\text{F}$$

$$\text{Pr}^* = 0.695$$

Librodot

La concordancia entre Pr* y el valor supuesto es suficientemente estrecha.

Las otras propiedades usadas en el análisis de transferencia de calor turbulenta son

$$\rho^* = \frac{(14.7)(144)}{(20)(53.35)(638)} = 0.00311 \text{ lb}_m/\text{pie}^3$$
$$\mu^* = 0.0507 \text{ lb}_m/\text{hr-pie}$$
$$k^* = 0.0173 \text{ Btu/hr-pie-°F}$$
$$c_p^* = 0.24 \text{ Btu/lb}_m\text{-°F}$$

Transferencia de calor laminar. Supóngase

$$\text{Re}^*_{\text{crít}} = 5 \times 10^5 = \frac{\rho^* u_\infty x_c}{\mu^*}$$
$$x_c = \frac{(5 \times 10^5)(0.0502)}{(0.00315)(3\,018)(3\,600)} = 0.733 \text{ pie}$$
$$\overline{\text{Nu}^*} = \frac{\bar{h} x_c}{k^*} = 0.664 \, \text{Re}^{*\frac{1}{2}}_{\text{crít}} \, \text{Pr}^{*\frac{1}{3}}$$
$$= 0.664(5 \times 10^5)^{\frac{1}{2}}(0.71)^{\frac{1}{3}} = 418$$
$$\bar{h} = \frac{(418)(0.0171)}{0.733} = 9.76 \text{ Btu/hr-pie}^2\text{°F} \quad (55.4 \text{ W/m}^2\text{-°C})$$

Este es el coeficiente de transferencia de calor promedio para la porción laminar de la capa límite, y la transferencia de calor se calcula de

$$q = \bar{h} A (T_w - T_{aw})$$
$$= (9.76)(0.733)(1)(560 - 1\,056)$$
$$= -3\,550 \text{ Btu/hr} \quad (-1040 \text{ W})$$

así que 3 550 Btu/hr de enfriamiento se requieren en la región laminar de la placa.

Transferencia de calor turbulenta. Para determinar la transferencia de calor turbulenta debemos determinar una expresión para el coeficiente de transferencia de calor local de

$$\text{St}_x^* \, \text{Pr}^{*\frac{1}{3}} = 0.0288 \, \text{Re}_x^{*-\frac{1}{5}}$$

y entonces integramos de $x = 0.733$ pie a $x = 2$ pies para determinar la transferencia de calor total.

$$h_x = \text{Pr}^{*-\frac{1}{3}} \rho^* u_\infty c_p^* 0.0288 \left(\frac{\rho^* u_\infty x}{\mu^*} \right)^{-\frac{1}{5}}$$
$$= 20.1 x^{-\frac{1}{5}}$$

El coeficiente de transferencia de calor promedio puede entonces obtenerse de

Librodot

$$\bar{h} = \frac{\int_{0.733}^{2} h_x\,dx}{\int_{0.733}^{2} dx} = 19.05 \text{ Btu/hr-ft}^2\text{-°F} \qquad (108.1 \text{ W/m}^2\text{-°C})$$

Mediante el uso de este valor podemos calcular la transferencia de calor en la región de capa límite turbulenta de la placa plana.

$$\begin{aligned} q &= \bar{h}A(T_w - T_{aw}) \\ &= (19.05)(2 - 0.733)(1)(560 - 1093) \\ &= -13\,100 \text{ Btu/hr} \qquad (-3\,838 \text{ W}) \end{aligned}$$

La cantidad total de enfriamiento requerido, es la suma de las transferencias de calor para las porciones laminar y turbulenta de la capa límite.

Enfriamiento total = 3 550 + 13 100 = 16 650 Btu/hr (−4 878W)

Cuando se encuentran velocidades de flujo muy altas, la temperatura de pared adiabática puede ser tan alta que el gas puede desociarse, y habrá una gran variación de las propiedades en la capa límite. Eckert [4] recomienda que estos problemas sean tratados sobre la base de un coeficiente de transferencia de calor definido en términos de la diferencia de *entalpía*.

$$q = h_i A(i_w - i_{aw}) \tag{5-87}$$

El factor de recuperación de entalpía se define entonces como

$$r_i = \frac{i_{aw} - i_\infty}{i_0 - i_\infty} \tag{5-88}$$

donde i_{aw} es la entalpía en las condiciones de pared adiabática. Las mismas relaciones anteriores se usan para calcular el factor de recuperación y la transferencia de calor, excepto que todas las propiedades se evalúan a una entalpía de referencia i^* dada por

$$i^* = i_\infty + 0.5(i_w - i_\infty) + 0.22(i_{aw} - i_\infty) \tag{5-89}$$

El número de Stanton se redefine como

$$\text{St}_i = \frac{h_i}{\rho u_\infty} \tag{5-90}$$

Este número de Stanton se usa entonces en la Ec. (5-83), (5-84) o (5-86), para calcular el coeficiente de transferencia de calor. Cuando se calculan las entalpías para usarse en las relaciones anteriores, debe usarse la entalpía *total*, esto es, deben incluirse la energía química de disociación así como la energía térmica interna. El método de la entalpía de referencia ha sido probado satisfactoriamente para calcular la transferencia de calor a alta velocidad, con una exactitud mayor que el 4%.

Librodot

PREGUNTAS DE REPASO

1. ¿Qué se entiende por capa límite hidrodinámica?
2. Defínase el número de Reynolds. ¿Por qué es éste importante?
3. ¿Cuál es el mecanismo físico de la acción viscosa?
4. Distíngase entre flujo laminar y turbulento en un sentido físico.
5. ¿Cuál es la ecuación de momentum para la capa límite laminar en una placa plana? ¿Qué suposiciones se involucran en la derivación de esta ecuación?
6. ¿Cómo se define el espesor de capa límite?
7. ¿Cuál es la ecuación de energía para la capa límite laminar en una placa plana? ¿Qué suposiciones se involucran en la derivación de esta ecuación?
8. ¿Qué se entiende por capa límite térmica?
9. Defínase el número de Prandtl. ¿Por qué es éste importante?
10. Descríbase el mecanismo físico de convección. ¿Cómo está relacionado el coeficiente de transferencia de calor por convección a este mecanismo?
11. Descríbase la relación entre fricción de fluido y transferencia de calor.
12. Defínase la temperatura promedio. ¿Cómo se usa ésta?
13. ¿Cómo se define para cálculos de transferencia de calor a alta velocidad el coeficiente de transferencia de calor?

PROBLEMAS

5-1. Se diseña una tobera para expandir aire desde las condiciones de estancamiento de 200 lb_f/plg^2 absolutas y 400°F, hasta 20 lb_f/plg^2 absolutas. La razón de flujo másico se diseña para que sea de 600 lb_m/min. Supóngase que esta tobera se usa en conexión con un túnel de viento de expansión para que la tobera se descargue de repente en un tanque evacuado perfectamente. ¿Cuál será la temperatura del aire en el tanque cuando la presión en el tanque sea igual a 20 lb_f/plg^2 absolutas? Supóngase que el tanque está perfectamente aislado, y que el aire se comporta como un gas perfecto. Supóngase que la expansión en la tobera es insoentrópica.

5-2. Para el agua que fluye sobre una placa plana a 60°F y 10 pies/seg, calcúlese el flujo másico a través de la capa límite a una distancia de 2 plg del extremo de la placa por donde incide el fluido.

Librodot

5.3. Aire a 100°F y 14.7 lb_f/plg^2 absolutas fluye sobre una placa plana a una velocidad de 100 pies/seg. ¿Cuál será el espesor de la capa límite a una distancia de 1 plg del extremo de la placa por donde incide el fluido?

5-4. Mediante el uso de un perfil de velocidad lineal

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{\delta}$$

para el flujo sobre una placa plana, obténgase una expresión para el espesor de capa límite como una función de x.

5-5. Usando la relación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

junto con la distribución de velocidad

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

y la expresión para el espesor de capa límite

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

derívese una expresión para la componente y de velocidad v como una función de x y y. Calcúlese el valor de v en el extremo exterior de la capa límite, a distancias de 6 y 12 plg del extremo por donde incide el fluido y para las condiciones del Ej. 5-3.

5-6. Repítase el Prob. 5-5 para el perfil de velocidad lineal del Prob. 5-4.

5-7. Fluye aire sobre una placa plana a una velocidad constante de 100 pies/seg y condiciones ambiente de 3 lb_f/plg^2 absolutas y 70°F. La placa se calienta a una temperatura constante de 150°F empezando en una distancia de 3 plg del extremo donde incide el fluido. ¿Cuál es la transferencia de calor total desde el extremo por donde incide el fluido hasta un punto a 1 pie de éste?

5-8. Mediante el uso del perfil de velocidad lineal del Prob. 5-4 y una distribución de temperatura en forma de parábola cúbica [Ec. (5-26)], obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor como una función del número de Reynolds para una capa límite laminar sobre una placa plana.

5-9. Entra aire a 3 lb_f/plg^2 absolutas y 40°F en un tubo de 1 plg de diámetro a una velocidad de 5 pies/seg. Usando un análisis de placa plana, estímese la distancia desde la entrada hasta que el flujo se encuentre completamente desarrollado.

Librodot

5-10. Un fluido fluye entre dos placas paralelas grandes. Desarróllese una expresión para la distribución de velocidad como una función de la distancia de la línea de centro entre las dos placas en condiciones de flujo desarrollado.

5-11. Fluye agua a 60°F entre dos placas paralelas grandes a una velocidad de 5 pies/seg. Las placas están separadas por una distancia de 0.6 plg. Estímese la distancia desde el extremo por donde incide el fluido y donde el flujo está completamente desarrollado.

5-12. Aire en condiciones estándar de 14.7 lb_f/plg^2 absolutas y 70°F fluye sobre una placa plana a 100 pies/seg. La placa es de 2 $pies^2$ y se mantiene a 200°F. Calcúlese la transferencia de calor de la placa.

5-13. Fluye aire a 70°F y 2 lb_f/plg^2 absolutas a una velocidad de 500 pies/seg pasando por una placa plana de 3 pies de longitud, la cual se mantiene a una temperatura constante de 300°F. ¿Cuál es la razón de transferencia de calor promedio por unidad de área de la placa?

5-14. Fluye aire a 1 lb_f/plg^2 absoluta y 100°F a través de una placa plana de 1 pie^2 a 25 pies/seg. La placa se mantiene a 150°F. Estímese el calor disipado por la placa.

5-15. Fluye aire a 200°F y a la presión atmosférica sobre una placa plana horizontal a 200 pies/seg. La placa es de 2 $pies^2$ y se mantiene a una temperatura uniforme de 50°F. ¿Cuál es la transferencia de calor total?

5-16. Grafíquese el coeficiente de transferencia de calor contra la longitud para el flujo sobre una placa plana de 3 pies de longitud sujeta a las siguientes condiciones:

(a) Helio a 1 lb_f/plg^2 absoluta, 80°F, $u_\infty = 10$ pies/seg
(b) Hidrógeno a 1 lb_f/plg^2 absoluta, 80°F, $u_\infty = 10$ pies/seg
(c) Aire a 1 lb_f/plg^2 absoluta, 80°F, $u_\infty = 10$ pies/seg
(d) Agua a 80°F, $u_\infty = 10$ pies/seg
(e) Helio a 20 lb_f/plg^2 absoluta, 80°F, $u_\infty = 10$ pies/seg

5-17. Calcúlese la fuerza de arrastre ejercida sobre la placa para cada uno de los sistemas en el Prob. 5-16.

5-18. Fluye glicerina a 100°F pasando por una placa plana de 1 pie^2 a una velocidad de 5 pies/seg. La fuerza de arrastre se mide como 2.0 lb_f (ambos lados de la placa). Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor para tal sistema de flujo.

5-19. Mediante el uso de la distribución de velocidad para flujo laminar desarrollado en un tubo, derívese una expresión para el factor de fricción como se definió en la Ec. (5-70).

Librodot

5-20. El flujo "lento" en un tubo, puede describirse como el flujo en el cual la velocidad es constante a través del área de flujo entera del tubo. Obténgase una expresión para el coeficiente de transferencia de calor en este tipo de flujo, con una condición de flujo de calor constante mantenida en la pared. Compárense los resultados con los de la Sec. 5-9. Explíquese la razón para la diferencia en las respuestas sobre una base física.

5-21. Supóngase que la distribución de velocidad en el núcleo turbulento para flujo en un tubo puede representarse por

$$\frac{u}{u_c} = \left(1 - \frac{r}{r_o}\right)^{\frac{1}{7}}$$

donde u_c es la velocidad en el centro del tubo y r_o es el radio de éste. La velocidad en la subcapa laminar puede suponerse que varía linealmente con el radio. Usando el factor de fricción dado por la Ec. (5-73), derívese una ecuación para el espesor de la subcapa laminar. Para este problema, la velocidad de flujo promedio puede calcularse usando únicamente la distribución de velocidad turbulenta.

5-22. Mediante el uso del perfil de velocidad del Prob. 5-21, obténgase una expresión para la difusividad de perturbación turbulenta de momentum como una función del radio.

5-23. En aplicaciones de intercambiadores de calor, con frecuencia es importante igualar los requisitos de transferencia de calor con las limitaciones de caída de presión. Con la suposición de un requisito de transferencia de calor total fijo y una diferencia de temperaturas fija entre las condiciones de pared y promedio, así como también una caída de presión fija a través del tubo, derívense expresiones para la longitud y diámetro del tubo, suponiéndose flujo turbulento de un gas con número de Prandtl cercano a la unidad.

5-24. Aire a 120°F y 10 lb_f/plg^2 absolutas, fluye a través de una tubería de 2 plg de diámetro a una velocidad de 12 pies/seg. Estímese el coeficiente de transferencia de calor para este sistema de flujo. Supóngase flujo completamente desarrollado y úsese la Ec. (6-1).

5-25. Aire a Mach 4 y 3 lb_f/plg^2 absolutas y 0°F, fluye pasando por una placa plana, que se mantiene a una temperatura constante de 200°F. Si la placa tiene 18 plg de longitud, ¿qué cantidad de enfriamiento se requerirá para mantener esta temperatura?

5-26. Fluye aire sobre una placa plana isotérmica que se mantiene a una temperatura constante de 150°F. La velocidad del aire es de 2 000 pies/seg a propiedades estáticas de 60°F y 1 lb_f/plg^2 absoluta. Calcúlese el coeficiente de transferencia de calor promedio para una placa de 3 pies de longitud.

Librodot

5-27. Calcúlese la transferencia de calor de una placa de 1 pie² sobre la cual fluye aire a 100°F y 2 lb_f/plg^2 absolutas. La temperatura de la placa es de 500°F, y la velocidad de flujo libre es de 20 pies/seg.

5-28. Calcúlese la fuerza de arrastre (fricción viscosa) sobre la placa del Prob. 5-27 en las condiciones de no transferencia de calor. *No* use la analogía entre fricción de fluido y transferencia de calor para este cálculo; es decir, calcúlese el arrastre directamente evaluando el esfuerzo viscoso de corte en la pared.

5-29. Fluye agua en una tubería de 1 plg de diámetro, así que el número de Reynolds basado sobre el diámetro es de 1 500 (se supone flujo laminar). La temperatura promedio del agua es de 100°F. Calcúlese la velocidad máxima del agua en el tubo. (Recuérdese que $u_m = 0.5\ u_o$.) ¿Cuál deberá ser el coeficiente de transferencia de calor para tal sistema cuando la pared del tubo está expuesta a un flujo de calor constante y los perfiles de velocidad y temperatura están completamente desarrollados? Evalúense las propiedades a la temperatura promedio.

5-30. Un flujo lento se encuentra en un sistema de flujo anular el cual se expone a un flujo de calor constante tanto en las superficies interior como en la exterior. La temperatura es la misma en ambas superficies a colocaciones idénticas x. Derívese una expresión para la distribución de temperatura en tal sistema de flujo, suponiéndose propiedades constantes y flujo laminar.

5-31. Mediante el uso de la ecuación de energía dada por la Ec. (5-28), determínese la expresión para el coeficiente de transferencia de calor bajo las condiciones

$$u = u_\infty = \text{const}$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{y}{\delta_t}$$

donde δ_t es el espesor de capa límite térmica.

5-32. Aire a 1 lb_f/plg^2 absoluta y −40°F fluye sobre una placa plana a Mach 4. La temperatura de la placa es de 100°F y la longitud de ésta es de 2 pies. Calcúlese la temperatura de pared adiabática para la porción laminar de la capa límite.

5-33. Derívese una expresión para la transferencia de calor en una capa límite laminar sobre una placa plana bajo las condiciones $u = u_\infty$ = constante. Supóngase que la distribución de temperatura se da por la relación de la parábola cúbica de la Ec. (5-26). Esta solución se aproxima a la condición observada en el flujo de un metal líquido sobre una placa plana.

5-34. Fluye aire a 3 lb_f/plg^2 absolutas y 70°F a través de una placa plana de 2 pies de longitud. La velocidad de flujo libre es de

Librodot

100 pies/seg, y la placa se calienta sobre su longitud total a una temperatura de 130°F. Para $x = 1$ pie, calcúlese el valor de y para el cual u sea igual a 75 pies/seg.

5-35. Para el sistema de flujo del Prob. 5-34, calcúlese el valor del coeficiente de fricción a una distancia de 6 plg del extremo por donde incide el fluido.

5-36. Aire a 40°F y 10 lb_f/plg^2 absolutas fluye sobre una placa plana a 20 pies/seg. Un elemento térmico con una longitud de 1 plg se coloca sobre la placa a una distancia de 6 plg del extremo por donde incide el fluido. Calcúlese el calor perdido del elemento térmico mencionado por unidad de profundidad de la placa para una temperatura de superficie del mismo, de 150°F.

5-37. Muéstrese que $\partial^3 u/\partial y^3 = 0$ en $y = 0$ para una capa límite laminar incompresible sobre una placa plana con gradiente de presión cero.

5-38. Repásese el desarrollo analítico de este capítulo y lístense las restricciones que se aplican a las siguientes ecuaciones: (5-21), (5-22), (5-40), (5-42), (5-53) y (5-66).

REFERENCIAS

1. Schlichting, H.: "Boundary Layer Theory", 4a. Ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
2. von Karmán, T.: Uber laminaire und turbulente Reibung, *Angew. Math. Mech.*, Vol. 1, Págs. 233-252, 1921; también *N A C A Tech. Mem.* 1092, 1946.
3. Sellars, J. R., M. Tribus y J. S. Klein: Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit: The Graetz Problem Extended, *Trans. ASME*, Vol. 78, Pág. 441, 1956.
4. Eckert, E. R. G.: Survery of Boundary Layer Heat Transfer at High Velocities and High Temperatures. *W A D C Tech, Rept.* 59-624, abril 1960.
5. Liepmann, H. W. y A. Roshko: "Elements of Gasdynamics", John Wiley & Sons., Inc., New York, 1957.
6. Knudsen, J. D. y D. L. Katz: "Fluid Dynamics and Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Librodot