TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
CAPÍTULO1



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

S. TIMOSHENKO
Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER
Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por
F. J. MEDINA SALANOVA
Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

Prólogo

Desde la publicación de la primera edición de este libro, se ha extendido considerablemente la aplicación de la teoría de placas y láminas al terreno práctico y se han adoptado nuevos métodos. Para ello hemos tenido que hacer varios cambios y adiciones. Las principales adiciones son: 1) un apartado sobre la flexión de placas debida al esfuerzo cortante transversal; 2) un apartado sobre la concentración de tensiones en torno a un agujero circular en una placa flexada; 3) un capítulo sobre la flexión de placas apoyadas sobre cimentación elástica; 4) un capítulo sobre la flexión de placas anisótropas, y 5) un capítulo revisando algunos métodos especiales y aproximados, usados en el cálculo de placas. Hemos ampliado también el capítulo sobre flechas grandes de placas, añadiendo varios casos nuevos de placas de espesor variable y algunas tablas numéricas que facilitan el cálculo de las mismas.

En la parte del libro referente a la teoría de láminas nos hemos limitado a la adición del método de la función de tensiones en la teoría de láminas membrana y algunas adiciones menores en la teoría de flexión de láminas.

La teoría de láminas se ha extendido rápidamente en los últimos años y han aparecido varios libros nuevos sobre este tema. No siéndonos por ello posible desarrollar estos nuevos avances con detalle, nos hemos limitado a una simple referencia a la nueva bibliografía en la que los lectores especialmente interesados por el tema encontrarán la información necesaria.

S. TIMOSHENKO
S. WOINOWSKY-KRIEGER

Librodot

Prólogo

Desde la publicación de la primera edición de este libro, se ha extendido considerablemente la aplicación de la teoría de placas y láminas al terreno práctico y se han adoptado nuevos métodos. Para ello hemos tenido que hacer varios cambios y adiciones. Las principales adiciones son: 1) un apartado sobre la flexión de placas debida al esfuerzo cortante transversal; 2) un apartado sobre la concentración de tensiones en torno a un agujero circular en una placa flexada; 3) un capítulo sobre la flexión de placas apoyadas sobre cimentación elástica; 4) un capítulo sobre la flexión de placas anisótropas, y 5) un capítulo revisando algunos métodos especiales y aproximados, usados en el cálculo de placas. Hemos ampliado también el capítulo sobre flechas grandes de placas, añadiendo varios casos nuevos de placas de espesor variable y algunas tablas numéricas que facilitan el cálculo de las mismas.

En la parte del libro referente a la teoría de láminas nos hemos limitado a la adición del método de la función de tensiones en la teoría de láminas membrana y algunas adiciones menores en la teoría de flexión de láminas.

La teoría de láminas se ha extendido rápidamente en los últimos años y han aparecido varios libros nuevos sobre este tema. No siéndonos por ello posible desarrollar estos nuevos avances con detalle, nos hemos limitado a una simple referencia a la nueva bibliografía en la que los lectores especialmente interesados por el tema encontrarán la información necesaria.

S. TIMOSHENKO
S. WOINOWSKY-KRIEGER

Librodot

Indice

Prólogo 7
Notación 13
Introducción 15

CAPÍTULO 1. **Flexión de placas largas rectangulares en una superficie cilíndrica** 18

1. Ecuación diferencial de la flexión cilíndrica de las placas 18
2. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados 20
3. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados 27
4. Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes elásticamente empotrados 32
5. Efecto sobre las tensiones y las flechas de pequeños desplazamientos de los bordes longitudinales en el plano de la placa 35
6. Método de cálculo aproximado del parámetro *u* 39
7. Placas largas rectangulares uniformemente cargadas con pequeña curvatura cilíndrica inicial 42
8. Flexión cilíndrica de una placa sobre cimentación elástica 45

CAPÍTULO 2. **Flexión pura de placas** 49

9. Pendientes y curvatura de placas ligeramente flexadas 49
10. Relaciones entre momentos flectores y curvatura en la flexión pura de placas 54
11. Casos particulares de flexión pura 59
12. Energía de deformación en la flexión pura de placas 62
13. Límites de aplicación de las fórmulas deducidas 64
14. Tensiones térmicas en placas con bordes coaccionados 66

CAPÍTULO 3. **Flexión simétrica de placas circulares** 69

15. Ecuación diferencial de la flexión simétrica de placas circulares bajo carga transversal 69
16. Placa circular uniformemente cargada 73
17. Placa circular con agujero circular en el centro 77
18. Placa circular cargada concéntricamente 82
19. Placa circular cargada en el centro 87
20. Correcciones a la teoría elemental de flexión simétrica de placas circulares 92

CAPÍTULO 4. **Pequeñas deformaciones de placas bajo carga transversal** 98

21. Ecuación diferencial de la deformada 98
22. Condiciones de borde 102

Librodot

23. Otra forma de obtención de las condiciones de borde 108
24. Reducción del problema de la flexión de una placa a la deformación de una membrana 112
25. Influencia de las constantes elásticas en el valor de los momentos flectores. 117
26. Teoría exacta de placas 118

CAPÍTULO 5. **Placas rectangulares simplemente apoyadas** 126

27. Placas rectangulares simplemente apoyadas con carga sinusoidal 126
28. Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas . . 130
29. Otras aplicaciones de la solución de Navier 132
30. Otra solución para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas 135
31. Placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una presión hidrostática 145
32. Placa rectangular simplemente apoyada sometida a una carga con forma de prisma triangular 152
33. Placa rectangular simplemente apoyada y parcialmente cargada 156
34. Placa rectangular simplemente apoyada con carga concentrada 162
35. Momentos flectores en una placa rectangular simplemente apoyadas con carga concentrada 165
36. Placas rectangulares de longitud infinita con bordes simplemente apoyados 172
37. Momentos flectores en placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente repartida en un rectángulo 182
38. Tensiones térmicas en placas rectangulares simplemente apoyadas . . . 185
39. Influencia de las deformaciones por esfuerzos cortantes en la flexión de las placas delgadas 189
40. Placas rectangulares de espesor variable 197

CAPÍTULO 6. **Placas rectangulares con diversas condiciones de borde** . 203

41. Flexión de placas rectangulares por momentos repartidos a lo largo de sus bordes 203
42. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados 208
43. Placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y uno empotrado 216
44. Placas rectangulares empotrados en todo el contorno 221
45. Placas rectangulares con un borde a dos adyacentes simplemente apoyadas y los restantes empotrados 230
46. Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno libre y el cuarto empotrado o simplemente apoyado 232
47. Placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto borde libre . 237
48. Placas rectangulares con los dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos libres o elásticamente apoyados 241
49. Placas rectangulares con los cuatro bordes apoyados elásticamente o apoyados en las esquinas con todos los bordes libres 243
50. Placas rectangulares semiinfinitas sometidas a una presión uniforme . . 246
51. Placas rectangulares semiinfinitas bajo cargas concentradas 250

CAPÍTULO 7. **Placas rectangulares continuas** 254

52. Placas continuas simplemente apoyadas 254
53. Estudio aproximado de las placas continuas con vanos iguales 262
54. Flexión de placas apoyadas sobre filas de columnas equidistantes (losas fungiformes) 272
55. Losa fungiforme con nueve vanos y losa con dos bordes libres 280
56. Influencia de la unión rígida con el soporte sobre los momentos de una losa fungiforme 283

Librodot

CAPÍTULO 8. **Placas sobre cimentación elástica** 286
57. Flexión simétrica respecto el centro 286
58. Aplicación de las funciones de Bessel al problema de la placa circular . 292
59. Placas rectangulares y placas continuas sobre cimentación elástica . . . 296
60. Placa cargada con filas de columnas equidistantes 303
61. Flexión de placas apoyadas sobre un sólido elástico semiinfinito 305

CAPÍTULO 9. **Placas de formas diversas** 309
62. Ecuaciones de la flexión de placas en coordenadas polares 309
63. Placas circulares bajo carga que varía linealmente 312
64. Placas circulares bajo carga concentrada 317
65. Placas circulares apoyadas en varios puntos del contorno 321
66. Placas en forma de sector 323
67. Placas circulares de espesor no uniforme 327
68. Placas anulares con variación lineal de espesor 331
69. Placas circulares con variación lineal de espesor 333
70. Problemas no lineales en la flexión de placas circulares 336
71. Placas elípticas 339
72. Placas triangulares 342
73. Placas sesgadas 348
74. Distribución de tensiones alrededor de agujeros 350

CAPÍTULO 10. **Métodos especiales y aproximados en la teoría de placas** 355
75. Singularidades en la flexión de placas 355
76. Empleo de superficies de influencia en el proyecto de placas 359
77. Funciones de influencia y funciones características 365
78. Utilización de integrales infinitas y transformaciones 367
79. Método de variable compleja 372
80. Aplicación del método de la energía de deformación al cálculo de flechas . 373
81. Otra forma de aplicar el método de la energía de deformación 378
82. Diversos métodos aproximados 380
83. Aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas a la flexión de placas simplemente apoyadas 383
84. Métodos experimentales 394

CAPÍTULO 11. **Flexión de placas anisótropas** 397
85. Ecuación diferencial de la placa flexada 397
86. Determinación de las rigideces en varios casos específicos 399
87. Aplicación de la teoría al cálculo de emparrillados 403
88. Flexión de placas rectangulares 405
89. Flexión de placas circulares y elípticas 409

CAPÍTULO 12. **Flexión de placas bajo la acción combinada de cargas laterales y fuerzas en el plano medio de la placa** . . . 412
90. Ecuación diferencial de la deformada 412
91. Placa rectangular simplemente apoyada en los bordes, bajo la acción combinada de una carga lateral uniforme y tensión uniforme 415
92. Aplicación del método de la energía 417
93. Placas rectangulares simplemente apoyadas bajo la acción combinada de cargas laterales y fuerzas en el plano medio de la plaça 421
94. Placas circulares bajo la acción combinada de carga lateral y tracción o compresión 425
95. Flexión de placas con pequeña curvatura inicial 428

CAPÍTULO 13. **Placas con grandes flechas** 431
96. Flexión de placas circulares debida a momentos uniformemente repartidos en el borde 431

Librodot

97. Fórmulas aproximadas para placas circulares con carga uniforme y grandes flechas 435
98. Solución exacta de la placa circular uniformemente cargada con borde empotrado 439
99. Placa circular simplemente apoyada con carga uniforme 443
100. Placas circulares cargadas en el centro 447
101. Ecuaciones generales de placas con grandes flechas 450
102. Grandes flechas de placas rectangulares uniformemente cargadas . . . 455
103. Grandes flechas de placas rectangulares simplemente apoyadas en sus bordes 460

CAPÍTULO 14. **Deformación de láminas sin flexión** 463
104. Definiciones y notación 463
105. Láminas de forma de superficie de revolución de carga simétrica respecto a su eje 467
106. Casos particulares de láminas con forma de superficie de revolución . . 470
107. Láminas de resistencia constante 477
108. Desplazamientos en láminas con forma de superficie de revolución, cargadas simétricamente 480
109. Láminas con forma de superficie de revolución bajo carga no simétrica . 483
110. Tensiones producidas por el empuje del viento 484
111. Lámina esférica apoyada en puntos aislados 489
112. Teoría de la membrana en láminas cilíndricas 492
113. Empleo de la función de tensiones para el cálculo de esfuerzos de membrana de las láminas 497

CAPÍTULO 15. **Teoría general de láminas cilíndricas** 502
114. Lámina cilíndrica circular cargada simétricamente respecto a su eje . . 502
115. Casos particulares de deformación simétrica de láminas cilíndricas circulares 507
116. Recipientes a presión 518
117. Recipientes cilíndricos con paredes de espesor uniforme 522
118. Recipientes cilíndricos con paredes de espesor variable 525
119. Tensiones térmicas en láminas cilíndricas 535
120. Deformación de una lámina circular cilíndrica sin alargamiento 540
121. Caso general de deformación de una lámina cilíndrica 546
122. Láminas cilíndricas con bordes apoyados 553
123. Deformación de una porción de lámina cilíndrica 555
124. Estudio aproximado de la flexión en láminas cilíndricas 558
125. Utilización de la función de tensiones y deformaciones 561
126. Análisis tensional de cubiertas en lámina cilíndrica 563

CAPÍTULO 16. **Láminas con forma de superficie de revolución cargadas simétricamente respecto a su eje** 573
127. Ecuaciones de equilibrio 573
128. Reducción de las ecuaciones de equilibrio o dos ecuaciones diferenciales de segundo orden 577
129. Láminas esféricas de espesor constante 580
130. Métodos aproximados de análisis tensional en láminas esféricas 587
131. Láminas esféricas con anillo de borde 595
132. Flexión simétrica de láminas esféricas rebajadas 598
133. Láminas cónicas 603
134. Caso general de láminas con forma de superficie de revolución 607

Indice de autores 611

Indice alfabético 617

Librodot

Notación

x, y, z	Coordenadas cartesianas rectangulares.
r, θ	Coordenadas polares.
r_x, r_y	Radios de curvatura de la superficie media de una placa en planos paralelos al xz o yz respectivamente.
h	Canto o espesor de una placa o una lámina.
q	Intensidad de una carga repartida.
p	Presión.
P	Carga concentrada.
γ	Peso específico.
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiones normales paralelas a los ejes x, y y z.
σ_n	Tensión normal paralela a la dirección n.
σ_r	Tensión normal en el sentido del radio en coordenadas polares.
σ_t, σ_θ	Tensiones normales en las direcciones de las tangentes.
τ	Tensión tangencial.
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Tensiones tangenciales en coordenadas cartesianas rectangulares.
u, v, w	Componentes de los desplazamientos.
ϵ	Alargamiento unitario.
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	Alargamientos unitarios en las direcciones x, y, z.
ϵ_r	Alargamiento unitario radial en coordenadas polares.
$\epsilon_t, \epsilon_\theta$	Alargamientos unitarios en las direcciones de las tangentes.
$\epsilon_\varphi, \epsilon_\theta$	Alargamientos unitarios de una lámina en las direcciones del meridiano y el paralelo respectivamente.
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Deformaciones transversales en coordenadas cartesianas rectangulares.
$\gamma_{r\theta}$	Deformación transversal en coordenadas polares.
E	Módulo de elasticidad normal.
G	Módulo de elasticidad transversal.
ν	Coeficiente de Poisson.
V	Energía de deformación.
D	Rigidez a flexión de una placa o lámina.

Librodot

M_x, M_y	Momentos flectores por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
M_{xy}	Momento torsor por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular al eje x.
M_n, M_{nt}	Momentos flector y torsor respectivamente, por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular a la dirección n.
Q_x, Q_y	Esfuerzos cortantes paralelos al eje z, por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
Q_n	Esfuerzo cortante paralelo al eje z por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular a la dirección n.
N_x, N_y	Esfuerzos normales por unidad de longitud en secciones de una placa perpendiculares a los ejes x e y respectivamente.
N_{xy}	Esfuerzo cortante en la dirección del eje y por unidad de longitud en una sección de una placa perpendicular al eje x.
M_r, M_t, M_{rt}	Momentos flectores radial y tangencial y momento torsor en coordenadas polares.
Q_r, Q_t	Esfuerzos cortantes radial y tangencial.
N_r, N_t	Esfuerzos normales por unidad de longitud en direcciones radial y tangencial.
r_1, r_2	Radios de curvatura de una lámina en forma de superficie de revolución en un plano meridiano y en el plano normal perpendicular al meridiano respectivamente.
χ_φ, χ_θ	Cambios de curvatura de una lámina en el plano meridional y en el plano perpendicular al meridiano respectivamente.
$\chi_{\varphi\theta}$	Torsión de una lámina.
X, Y, Z	Componentes paralelas a los ejes x, y y z de la intensidad de la carga externa, que actúa sobre una lámina.
N_φ, N_θ, $N_{\varphi\theta}$	Fuerzas de membrana por unidad de longitud de las secciones principales normales de una lámina.
M_θ, M_φ	Momentos flectores por unidad de longitud en las secciones meridional y perpendicular al meridiano respectivamente, en una lámina.
χ_x, χ_φ	Cambios de curvatura de una lámina cilíndrica en un plano axial y en un plano perpendicular al eje respectivamente.
N_φ, N_x, $N_{x\varphi}$	Fuerzas de membrana por unidad de longitud en una sección axial y en una sección perpendicular al eje en una lámina cilíndrica.
M_φ, M_x	Momentos flectores por unidad de longitud en una sección axial y en una sección perpendicular al eje respectivamente en una lámina cilíndrica.
$M_{x\varphi}$	Momento torsor por unidad de longitud en una sección axial de una lámina cilíndrica.
Q_φ, Q_x	Esfuerzos cortantes paralelos al eje z por unidad de longitud en una sección axial y una sección perpendicular al eje respectivamente en una lámina cilíndrica.
ln	Logaritmos naturales.
log	Logaritmos decimales.

Librodot

Introducción

Las propiedades de la flexión de una placa dependen grandemente de su espesor en comparación con las restantes dimensiones. En el siguiente estudio distinguiremos tres clases de placas: 1) placas delgadas con pequeñas flechas; 2) placas delgadas con grandes flechas; 3) placas gruesas.

Placas delgadas con pequeñas flechas

Si las flechas w de una placa son pequeñas en comparación con su espesor o canto h, puede desarrollarse una teoría suficientemente aproximada para la flexión bajo cargas laterales, haciendo las siguientes hipótesis:

1. No hay deformación en el plano medio de la placa. Este plano permanece *neutro* durante la flexión.
2. Los puntos situados inicialmente en una normal al plano medio de la placa, permanecen después de la flexión en una normal a la superficie media de la placa.
3. Las tensiones normales en la dirección transversal de la placa son despreciables.

Apoyándose en estas hipótesis, todas las tensiones pueden expresarse en función de la flecha w de la placa, que a su vez es función de las coordenadas en el plano de la placa. Esta función tiene que satisfacer una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, que, junto con las condiciones de contorno, define completamente w. Así la solución de esta ecuación da toda la información necesaria para el cálculo de las tensiones en cualquier punto de la placa.

La segunda hipótesis equivale a despreciar el efecto de los esfuerzos cortantes en la deformación de las placas. Esta hipótesis es ordinariamente aceptable, pero en algunos casos (por ejemplo en los casos de placas con agujeros) el efecto del esfuerzo cortante llega a ser importante y es preciso introducir algunas correcciones en la teoría de placas delgadas (v. ap. 39).

Librodot

Si además de las cargas laterales, hay fuerzas externas que actúan en el plano medio de la placa, la primera hipótesis ya no es aceptable, y es necesario tener en cuenta el efecto que producen sobre la flexión, las tensiones que actúan en el plano medio de la placa. Esto puede hacerse introduciendo términos adicionales en la ecuación diferencial de las placas antes citada (v. ap. 90).

Placas delgadas con grandes flechas

La primera hipótesis sólo se verifica completamente si la placa se deforma según una superficie desarrollable. En otros casos la flexión de la placa va acompañada de deformación en el plano medio de la placa, pero el cálculo demuestra que las correspondientes tensiones en el plano medio son despreciables si las flechas son pequeñas en comparación con el espesor. Si las flechas no son pequeñas, estas tensiones suplementarias deben ser tenidas en consideración al deducir la ecuación diferencial de las placas. Por este camino obtenemos ecuaciones no lineales y la solución del problema se hace mucho más complicada (v. ap. 96). En el caso de grandes flechas hemos de distinguir también entre bordes inmóviles y bordes libres de moverse en el plano de la placa, los cuales pueden tener una considerable contribución en el valor de las flechas y tensiones de las placas (v. aps. 99, 100). Debido a la curvatura de la deformada del plano medio de la placa, las tracciones suplementarias que predominan, actúan en oposición a las cargas laterales; de este modo la carga es transmitida en parte por la rigidez a flexión y en parte por el efecto de membrana de la placa. En consecuencia, placas muy delgadas con resistencia a flexión despreciable se comportan como membranas excepto tal vez para una estrecha zona de borde donde la flexión puede ocurrir a causa de las condiciones de borde impuestas a la placa.

El caso de una placa deformada según una superficie desarrollable, en particular cilíndrica, debe considerarse como una excepción. Las flechas de una placa tal pueden ser del orden de su espesor sin que necesariamente se produzcan tensiones de membrana y sin afectar al carácter lineal de la teoría de flexión. Las tensiones de membrana surgirían en todo caso en tal placa, si los bordes fueran inmóviles en su plano y las flechas suficientemente grandes (v. ap. 2). Por consiguiente, «en placas con pequeñas flechas» las fuerzas de membrana, originadas por los bordes inmóviles en el plano de la placa, pueden ser prácticamente despreciadas.

Placas gruesas

Las teorías aproximadas de placas delgadas, ya discutidas no son dignas de confianza en el caso de placas de espesor considerable, especialmente en el caso de cargas muy concentradas. En tal caso se aplicará la teoría de

Librodot

placas gruesas. Esta teoría considera el problema de las placas como un problema de elasticidad tridimensional. El análisis tensional se hace en consecuencia más complicado y hasta ahora sólo ha sido completamente resuelto para unos pocos casos particulares. Con el empleo de este análisis pueden introducirse a la teoría de las placas delgadas las correcciones necesarias en los puntos de aplicación de cargas concentradas.

Las principales hipótesis de la teoría de las placas delgadas forman también la base de la teoría usual de láminas delgadas. Existe sin embargo una diferencia sustancial en el comportamiento de placas y láminas bajo la acción de cargas externas. El equilibrio estático de un elemento de placa bajo carga lateral es sólo posible mediante la actuación de momentos flectores y torsores, ordinariamente acompañados de esfuerzos cortantes, mientras que una lámina es, en general, capaz de transmitir la carga de superficie por tensiones «de membrana», que actúan paralelamente al plano tangente en un punto dado de la superficie media de la lámina y se distribuyen uniformemente en el espesor de la lámina. Esta propiedad de las láminas las hace por regla general mucho más rígidas y estructuras más económicas de lo que sería una placa en las mismas condiciones.

En principio, las fuerzas de membrana son independientes de la flexión y están totalmente definidas por las condiciones de equilibrio estático. Los métodos de determinación de estas fuerzas representan la llamada «teoría membrana de las láminas». Sin embargo, las reacciones y deformación obtenidas para los bordes de las láminas mediante la teoría membrana, son ordinariamente incompatibles con las condiciones de contorno reales. Para salvar esta distancia hay que considerar en una zona de borde la flexión de la lámina, que puede modificar ligeramente los valores de las fuerzas de membrana inicialmente calculados. Esta flexión, sin embargo, tiene carácter muy localizado[1] y puede calcularse aplicando las mismas hipótesis que se usan en el caso de flechas pequeñas de placas delgadas. Hay, no obstante, problemas, especialmente los concernientes a la estabilidad elástica de las láminas, en los que la hipótesis de pequeñas flechas no pueden mantenerse y es preciso usar la «teoría de grandes flechas».

Si el espesor de una lámina es comparable al radio de curvatura, o si se consideran tensiones en puntos próximos a los de aplicación de cargas concentradas, debe aplicarse una teoría más rigurosa, similar a la teoría de las placas gruesas.

[1] Hay algunas clases de láminas, especialmente las que tienen curvatura negativa, que presentan numerosas excepciones. En los casos de superficies desarrollables como conos o cilindros, son posibles grandes flechas sin deformación en la superficie media y, en algunos casos, pueden despreciarse las tensiones de membrana pudiendo ser suficiente la sola consideración de las tensiones de flexión.

Librodot

1

Flexión de placas largas rectangulares en una superficie cilíndrica

1. Ecuación diferencial de la flexión cilíndrica de las placas

Comenzamos la teoría de la flexión de las placas por el problema sencillo de la flexión de una placa larga rectangular sometida a una carga transversal constante, a lo largo de la placa. La superficie flexada de una porción de una placa semejante, tomada a una gran distancia de los extremos[1] puede suponerse cilíndrica, con su eje paralelo a la longitud de la placa. Podemos pues limitarnos al estudio de la flexión de una franja elemental, cortada en la placa según dos planos perpendiculares a la longitud de la placa y de ancho unidad. La flecha de esta franja está dada por una ecuación diferencial semejante a la de la flecha de una viga flexada.

Para obtener esta ecuación, se considera una placa de espesor uniforme h y se toma el plano xy como plano medio de la placa antes de la aplicación de la carga, es decir el plano equidistante de sus dos caras. Se hace coincidir el eje y con uno de los bordes longitudinales de la placa y se orienta el eje de las z hacia abajo como indica la figura 1. Entonces si la

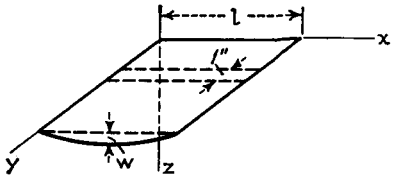


FIG. 1

[1] La relación entre la longitud y el ancho de una placa para que la tensión máxima pueda aproximarse a la de una placa infinitamente larga se estudia más adelante (véase págs. 139 y 147).

Librodot

anchura de la placa es l, la banda elemental puede considerarse como una barra rectangular de longitud l y de altura h. Calculando las tensiones de flexión en tal barra se supondrá como en la teoría ordinaria de vigas, que las secciones transversales de la barra permanecen planas, durante la flexión, no sufriendo más que un giro con respecto a sus fibras neutras. Si sus extremos no soportan fuerzas normales, la superficie neutra de la barra coincide con la superficie media de la placa y el alargamiento unitario de una fibra paralela al eje x es proporcional a su distancia z a la superficie media. La curvatura de la deformada o línea elástica puede ser considerada igual a $-d^2w/dx^2$ donde w, flecha de la barra en la dirección de las z, se supone pequeña en comparación de l. El alargamiento unitario ϵ_x de una fibra situada a una distancia z de la superficie media es ahora $-zd^2w/dx^2$.

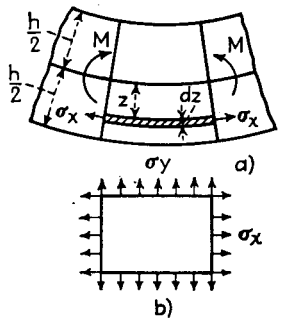


FIG. 2

Según la ley de Hooke, los alargamientos unitarios ϵ_x y ϵ_y en función de las tensiones normales σ_x y σ_y, que actúan sobre el elemento rayado son

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$
$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} = 0 \qquad (1)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material y ν el coeficiente de Poisson. La deformación lateral en la dirección de las y debe ser nula a fin de mantener la continuidad en la placa durante la flexión, de donde se deduce, según la segunda de las ecuaciones (1), que $\sigma_x = \nu\sigma_y$. Sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones (1), se obtiene

$$\epsilon_x = \frac{(1 - \nu^2)\sigma_x}{E}$$

y

$$\sigma_x = \frac{E\epsilon_x}{1 - \nu^2} = -\frac{Ez}{1 - \nu^2}\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (2)$$

Si la placa está sometida a la acción de fuerzas de tracción o de compresión actuando en la dirección x y distribuidas uniformemente a lo largo

Librodot

de los lados longitudinales, la tensión directa correspondiente se suma a la tensión (2).

Conociendo la expresión de la tensión de flexión σ_x, se obtiene por integración el momento flector en la franja elemental:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z \, dz = - \int_{-h/2}^{h/2} \frac{Ez^2}{1 - \nu^2} \frac{d^2w}{dx^2} \, dz = - \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2}$$

Con la notación

$$\frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = D \tag{3}$$

se representa la ecuación de la deformación de la banda elemental bajo la forma siguiente:

$$D \frac{d^2w}{dx^2} = -M \tag{4}$$

donde la cantidad D, que toma el lugar de la cantidad EI en el caso de las vigas, se llama *rigidez a flexión* de la placa.

Se ha visto que el cálculo de flechas de la placa se reduce a la integración de la ecuación (4), que es de la misma forma que la ecuación diferencial de la flecha de las vigas. Si no hay más que una carga transversal actuando sobre la placa y si los bordes pueden aproximarse uno al otro en el momento de la flexión, la expresión para el momento flector M puede ser asimismo calculada y la deformada obtenida por la integración de la ecuación (4).

En la práctica el problema es más complicado, pues la placa está habitualmente fija en su contorno y sus bordes no están libres. Tal forma de apoyo provoca las reacciones de tracción a lo largo del contorno tan pronto como aparece la flecha. Estas reacciones dependen del valor de la flecha y modifican el valor del momento flector M de la ecuación (4). El problema se reduce al estudio de la flexión de una franja elemental sometida a la acción de una carga transversal y también a una fuerza axial que depende de la flecha de la franja[1]. A continuación se considera este problema para el caso particular de una carga uniforme actuando sobre una placa, cuyos bordes están sometidos a diversas condiciones.

2. *Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados*

Consideremos una placa larga rectangular cargada uniformemente con los bordes longitudinales libres para girar, pero que no pueden aproximarse

[1] El primero que estudió el problema de esta forma fue I. G. Boobnov; véase la traducción inglesa de su libro en *Trans. Inst. Naval Architects*, vol. 44, pág. 15, 1902, y su *Theory of Structure of Ships*, vol. 2, pág. 545, San Petersburgo, 1914. Véase también la Memoria presentada por Stewart Way al National Meeting of Applied Mechanics, Nueva Haven, Conn., junio 1932; de esta Memoria están tomadas las curvas utilizadas en los apartados 2 y 3.

Librodot

uno al otro durante la flexión. Una franja elemental cortada en esta placa como muestra la figura 1, se comporta como una barra uniformemente cargada, sometida a la acción de una fuerza axial S (fig. 3). La magnitud de S es tal que impide que los extremos de la barra se desplacen a lo largo

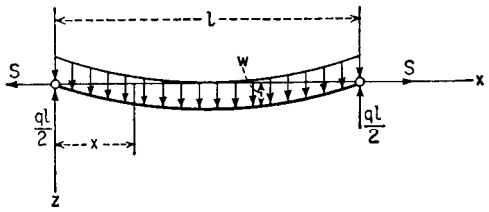


FIG. 3

del eje de las x. Sea q la intensidad de la carga uniforme, el momento flector en toda sección transversal de la franja es

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw$$

Sustituyendo en (4), se obtiene

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{Sw}{D} = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} \qquad (a)$$

Introduciendo la notación

$$\frac{S}{D}\frac{l^2}{4} = u^2 \qquad (5)$$

la solución general de (a) puede escribirse de la forma siguiente:

$$w = C_1 \operatorname{sh}\frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch}\frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} \qquad (b)$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 se determinarán a partir de las condiciones de los extremos. Puesto que las flechas de la franja son nulas en los extremos, se tiene

$$w = 0 \qquad \text{para } x = 0 \text{ y } x = l \qquad (c)$$

Sustituyendo w en la expresión (b), se obtiene de estas condiciones

$$C_1 = \frac{ql^4}{16u^4D}\,\frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u} \qquad C_2 = \frac{ql^4}{16u^4D}$$

y la ecuación (b) de la flecha w toma la forma

$$w = \frac{ql^4}{16u^4D}\left(\frac{1 - \operatorname{ch} 2u}{\operatorname{sh} 2u}\operatorname{sh}\frac{2ux}{l} + \operatorname{ch}\frac{2ux}{l} - 1\right) + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D}$$

Librodot

Sustituyendo

$$\operatorname{ch} 2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u \qquad \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u$$
$$\operatorname{ch}^2 u = 1 + \operatorname{sh}^2 u$$

se puede representar (b) bajo una forma más sencilla

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D}\left(\frac{-\operatorname{sh} u \operatorname{sh}\frac{2ux}{l} + \operatorname{ch} u \operatorname{ch}\frac{2ux}{l}}{\operatorname{ch} u} - 1\right) + \frac{ql^2 x}{8u^2 D}(l - x)$$

o bien

$$w = \frac{ql^4}{16u^4 D}\left[\frac{\operatorname{ch} u\left(1 - \frac{2x}{l}\right)}{\operatorname{ch} u} - 1\right] + \frac{ql^2 x}{8u^2 D}(l - x) \tag{6}$$

Así, las flechas de la franja elemental dependen de la cantidad u que como se ha visto en la ecuación (5), es una función de la fuerza axial S. Esta fuerza puede determinarse a partir de la condición impuesta a los extremos de la franja (fig. 3) de no desplazarse a lo largo del eje x. Por consiguiente, el alargamiento de la franja debido a las fuerzas S es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformación y la cuerda de longitud l.

Esta diferencia para pequeñas flechas puede ser representada por la fórmula[1]

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \tag{7}$$

Para calcular el alargamiento de la franja debido a las fuerzas S, se supone que la deformación lateral de la franja en la dirección de las y está impedida y se utiliza la ecuación (2).

$$\lambda = \frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \tag{d}$$

Sustituyendo en la ecuación (6) de w integrando, se obtiene, para el cálculo S la ecuación siguiente:

$$\frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{q^2 l^7}{D^2}\left(\frac{5}{256}\frac{\operatorname{th} u}{u^7} + \frac{1}{256}\frac{\operatorname{th}^2 u}{u^6} - \frac{5}{256u^6} + \frac{1}{384u^4}\right)$$

donde, sustituyendo S por $4u^2 D/l^2$ y D por su valor sacado de la ecuación (3) se obtiene finalmente la ecuación

$$\frac{E^2 h^8}{(1 - \nu^2)^2 q^2 l^8} = \frac{135}{16}\frac{\operatorname{th} u}{u^9} + \frac{27}{16}\frac{\operatorname{th}^2 u}{u^8} - \frac{135}{16u^8} + \frac{9}{8u^6} \tag{8}$$

Para un material, una relación h/l y una carga q dadas, el primer miembro de esta ecuación se calcula fácilmente y el valor de u que satisface

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte I, 3.ª ed., pág. 178, 1955.

Librodot

a esta ecuación puede encontrarse por un método aproximado. Para simplificar esta solución, se puede utilizar las curvas de la figura 4. Las abscisas representan los valores de u y las ordenadas las cantidades $\ln (10^4 \sqrt{U_0})$ donde U_0 representa el valor numérico del segundo miembro de la ecuación (8). Se utiliza $\sqrt{U_0}$ porque es más fácil calcularlo a partir de la carga y de las constantes de la placa. Se introduce el factor 10^4 a fin de obtener los logaritmos positivos. En cada caso particular se comenzará por calcular la raíz cuadrada del primer miembro de la ecuación (8), igual a $Eh^4/(1 - \nu^2)ql^4$ y que da $\sqrt{U_0}$. La cantidad $\ln (10^4 \sqrt{U_0})$ dará entonces la

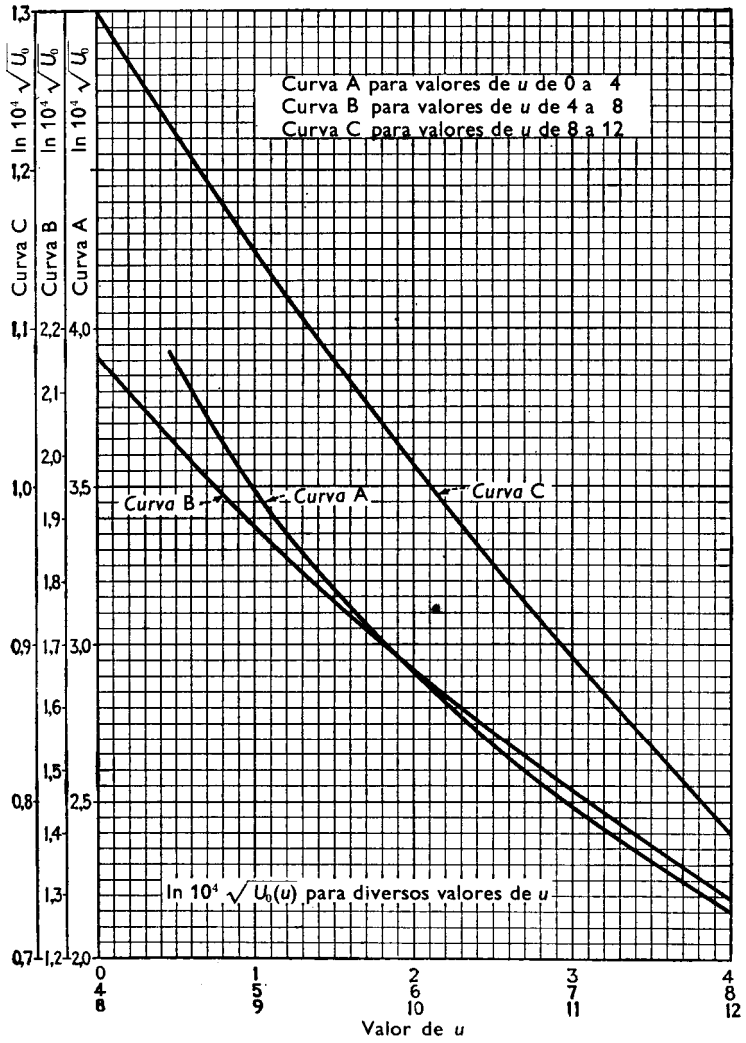


FIG. 4

Librodot

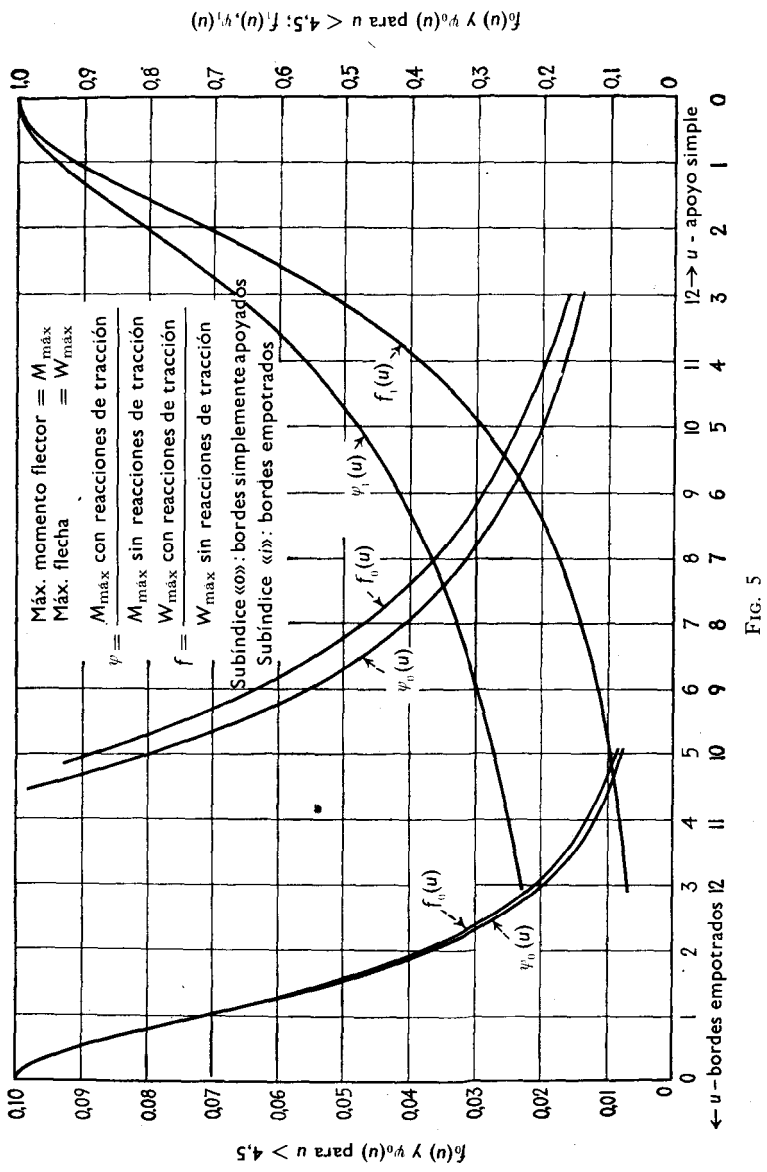


FIG. 5

Librodot

ordenada utilizada en la figura 4, y el valor correspondiente de u se obtiene asimismo a partir de la curva. Conociendo u se obtiene el valor de la fuerza axial S a partir de (5).

Se comprueba, calculando las tensiones, que la tensión total en toda sección transversal de la franja es igual a la suma de una tensión de flexión proporcional al momento flector y de una tracción igual a S/h es constante a todo lo largo de la longitud de la franja. La tensión máxima se produce en mitad de la franja, donde el momento flector es máximo. A partir de la ecuación (4) se encuentra para el momento flector máximo

$$M_{\text{máx}} = -D\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=l/2}$$

Sustituyendo la expresión (6) de w, se obtiene

$$M_{\text{máx}} = \frac{ql^2}{8}\psi_0(u) \tag{9}$$

donde

$$\psi_0 = \frac{1 - \operatorname{sh} u}{\frac{u^2}{2}} \tag{e}$$

Los valores de ψ_0 están dados por las curvas de la figura 5. Se ve que estos valores disminuyen rápidamente cuando u aumenta, y, para grandes valores de u, el momento flector máximo es varias veces menor que el momento $ql^2/8$, valor que se obtendrá si no hubiera reacciones de tracción en los extremos de la franja.

La tensión de tracción σ_1 y la tensión de flexión máxima σ_2 se expresan por consiguiente fácilmente en función de u, q, y las constantes de la placa

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} = \frac{4u^2D}{hl^2} = \frac{Eu^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \tag{10}$$

$$\sigma_2 = \frac{6}{h^2}M_{\text{máx}} = \frac{3}{4}q\left(\frac{l}{h}\right)^2\psi_0 \tag{11}$$

La tensión en la placa es

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2$$

Tomemos un ejemplo numérico para mostrar cómo se pueden utilizar las curvas de las figuras 4 y 5 a fin de calcular las tensiones máximas y sea una placa larga de acero de 130 cm de ancho, 13 mm de espesor que soporta una carga uniforme $q = 1{,}4$ kgf/cm^2. Primeramente calculamos $\sqrt{U_0}$:

$$\sqrt{U_0} = \frac{E}{(1-\nu^2)q}\left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{2{,}1\cdot 10^6}{(1-0{,}3^2)1{,}4}\,\frac{1}{10^8} = 0{,}01648$$

Entonces, de las tablas

$$\ln(10^4\sqrt{U_0}) = 2{,}217$$

Librodot

De la curva A en la figura 4 se deduce $u = 3{,}795$ y de la figura 5 obtenemos $\psi_0 = 0{,}1329$.

Se calculan ahora las tensiones utilizando las ecuaciones (10) y (11) hallando

$$\sigma_1 = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 3{,}795^2}{3(1 - 0{,}3^2)} \frac{1}{10^4} = 1108 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \tfrac{3}{4} \cdot 1{,}4 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1329 = 1395 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2503 \text{ kgf/cm}^2$$

Para calcular la flecha máxima se sustituye $x = l/2$ en la ecuación (6) de la deformada. Así se obtiene

$$w_{\text{máx}} = \frac{5ql^4}{384D} f_0(u) \tag{12}$$

donde

$$f_0(u) = \frac{\text{sh } u - 1 + \dfrac{u^2}{2}}{\dfrac{5u^4}{24}}$$

Para simplificar los cálculos, los valores de $f_0(u)$ están dados por una curva de la figura 5. Si no hay reacciones de tracción en los extremos de la franja, la flecha máxima será igual a $5ql^4/384D$. El factor $f_0(u)$ da la influencia de las reacciones de tracción, la cual disminuye rápidamente cuando u aumenta.

En la figura 5, para el ejemplo numérico precedente hallamos para $u = 3{,}795$ que el valor de $f_0(u)$ es 0,145. Sustituyendo este valor en (12), se encuentra

$$w_{\text{máx}} = 12 \cdot 0{,}145 = 1{,}74 \text{ cm}$$

Se ha visto, en la ecuación (8) que el parámetro de tracción u depende, para una placa dada, de la intensidad de la carga q y de la relación l/h anchura a espesor de la placa. De las ecuaciones (10) y (11) se deduce que las tensiones σ_1 y σ_2 son también funciones de u, q y l/h. Por lo tanto, la tensión máxima en la placa no depende más que de la carga q y de la relación l/h. Esto significa que se puede trazar un haz de curvas que dan la tensión máxima en función de q, correspondiendo cada curva a un valor particular de l/h. Estas curvas están representadas en la figura 6.

Se ve que, debido a la presencia de las tracciones S, que aumenta con la carga, la tensión máxima no es proporcional a la carga q, y para valores grandes de q esta tensión no varía mucho con el espesor de la placa. Tomando la curva señalada con $l/h = 100$ y tomando $q = 1{,}4$ kgf/cm^2, obtenemos en la curva el valor de $\sigma_{\text{máx}}$ calculado ya en el ejemplo numérico.

Librodot

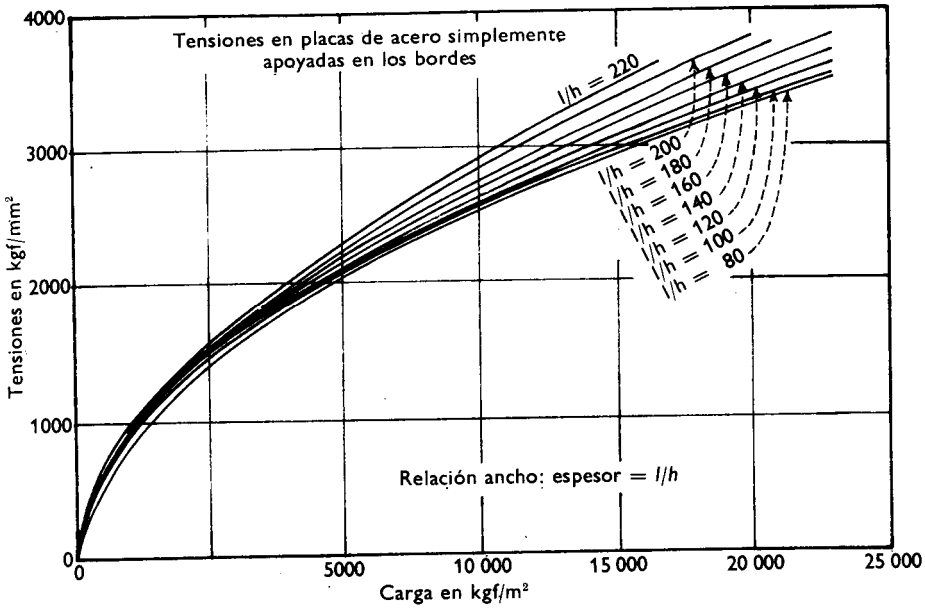


FIG. 6

3. *Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados*

Se supone que los bordes longitudinales de la placa están fijos de tal manera que no pueden girar. Tomemos una franja elemental de ancho unidad (fig. 1) y llamemos M_0 el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre los bordes longitudinales de la placa, las fuerzas que actúan entonces sobre la franja son las indicadas en la figura 7. El momento flector de la franja, en una sección transversal, es

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} - Sw + M_0$$

sustituyendo en (4) obtenemos

$$\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{S}{D}w = -\frac{qlx}{2D} + \frac{qx^2}{2D} - \frac{M_0}{D} \qquad (a)$$

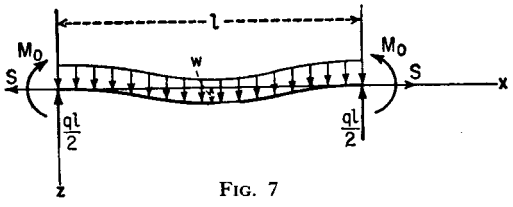


FIG. 7

Librodot

La solución general de esta ecuación, utilizando la notación (5) toma la forma siguiente:

$$w = C_1 \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + C_2 \operatorname{ch} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^4D} + \frac{M_0l^2}{4u^2D} \qquad (b)$$

Comprobando que la deformación es simétrica con respecto a la mitad de la franja, se determinan las constantes de integración C_1, C_2 y el momento M_0 a partir de las condiciones siguientes:

$$\frac{dw}{dx} = 0 \qquad \text{para } x = 0 \text{ y } x = \frac{l}{2}$$
$$w = 0 \qquad \text{para } x = 0 \qquad (c)$$

Sustituyendo en la expresión (b) de w se obtiene

$$C_1 = -\frac{ql^4}{16u^3D} \qquad C_2 = \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u$$

$$M_0 = \frac{ql^2}{4u^2} - \frac{ql^2}{4u} \operatorname{cth} u = -\frac{ql^2}{12} \psi_1(u) \qquad (13)$$

donde

$$\psi_1(u) = \frac{3(u - \operatorname{th} u)}{u^2 \operatorname{th} u}$$

La flecha w está dada entonces por la expresión

$$w = -\frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{sh} \frac{2ux}{l} + \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u \operatorname{ch} \frac{2ux}{l}$$

$$+ \frac{ql^3x}{8u^2D} - \frac{ql^2x^2}{8u^2D} - \frac{ql^4}{16u^3D} \operatorname{cth} u$$

La que puede ser simplificada y finalmente puesta en la forma siguiente

$$w = \frac{ql^4}{16u^3D \operatorname{th} u} \left\{ \frac{\operatorname{ch}\left[u\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]}{\operatorname{ch} u} - 1 \right\} + \frac{ql^2(l - x)x}{8u^2D} \qquad (14)$$

Para calcular u se procede de la misma manera que en el artículo precedente y se utiliza la ecuación (d) de dicho artículo sustituyendo en la expresión (14) de w e integrando se obtiene

$$\frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{q^2l^7}{D^2}\left(-\frac{3}{256u^5 \operatorname{th} u} - \frac{1}{256u^4 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{1}{64u^6} + \frac{1}{384u^4}\right)$$

La ecuación para calcular u se transforma, después de haber sustituido S de (5) y D de (3)

$$\frac{E^2h^8}{(1 - \nu^2)^2q^2l} = -\frac{81}{16u^7 \operatorname{th} u} - \frac{27}{16u^6 \operatorname{sh}^2 u} + \frac{27}{4u^8} + \frac{9}{8u^6} \qquad (15)$$

Librodot

Para simplificar la solución de esta ecuación, se utiliza la curva de la figura 8 en la que u aparece en abscisas y ln $(10^4\sqrt{U_1})$ representa el segundo miembro de la ecuación (15). Para una placa dada se empieza por calcular la raíz cuadrada del primer miembro de la ecuación (15), igual a $Eh^4/[(1-\nu^2)ql^4]$ que nos da $\sqrt{U_1}$ se determina la ordenada de la curva

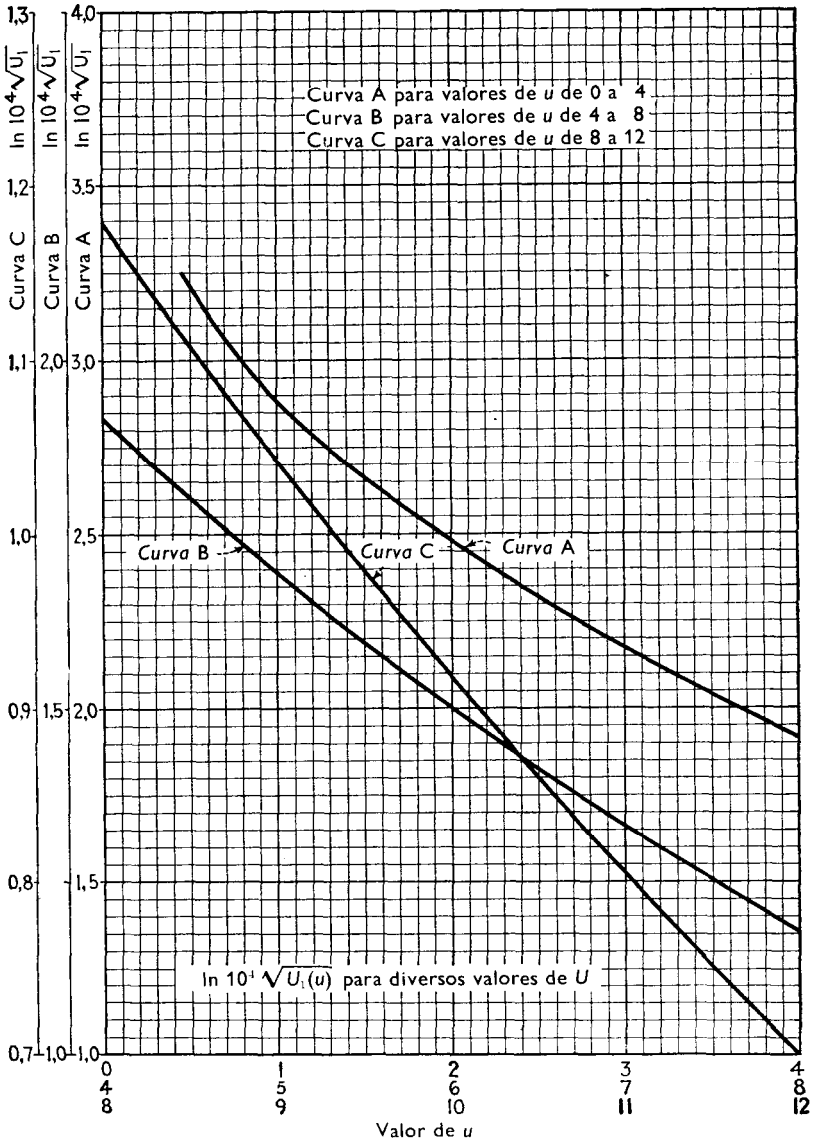


FIG. 8

Librodot

(fig. 8) que es $(10^4 \sqrt{U_1})$ y la abscisa correspondiente que da el valor buscado de u.

Conociendo u, se puede empezar a calcular las tensiones máximas en la placa. La tensión total en todo punto de la sección transversal de la franja se compone del esfuerzo de tracción constante σ_1, y de la tensión de flexión. La tensión de flexión máxima σ_2 actúa en los bordes empotrados donde el momento de flexión es máximo. Utilizando las ecuaciones (10) y (13) para calcular σ_1 y M_0 respectivamente, se obtiene

$$\sigma_1 = \frac{Eu^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{l}\right)^2 \tag{16}$$

$$\sigma_2 = -\frac{6M_0}{h^2} = \frac{q}{2}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \psi_1(u) \tag{17}$$

$$\sigma_{máx} = \sigma_1 + \sigma_2$$

Para simplificar el cálculo de σ_2 los valores de $\psi_1(u)$ están dados por una de las curvas de la figura 5.

La flecha máxima se sitúa en el centro de la franja y se obtiene sustituyendo $x = l/2$ en (14), de donde se deduce

$$w_{máx} = \frac{ql^4}{384D} f_1(u) \tag{18}$$

donde $$f_1(u) = \frac{24}{u^4}\left(\frac{u^2}{2} + \frac{u}{\operatorname{sh} u} - \frac{u}{\operatorname{th} u}\right)$$

La función $f_1(u)$ está también dada por una curva de la figura 5.

Ilustraremos por un ejemplo numérico el empleo de las curvas de las figuras 5 y 8.

Una placa larga rectangular de acero, tiene dimensiones $l = 130$ cm, $h = 13$ mm y soporta una carga $q = 0{,}7$ kgf/cm^2. En este caso

$$\sqrt{U_1} = \frac{E}{(1-\nu^2)q}\left(\frac{h}{l}\right)^4 = \frac{2{,}1 \cdot 10^6}{(1 - 0{,}3^2)\cdot 0{,}7} \cdot \frac{1}{10^8} = 0{,}032966$$

$$\ln 10^4 \sqrt{U_1} = 2{,}5181$$

En la figura 8 hallemos ahora $u = 1{,}894$; y en la figura 5, $\psi_1 = 0{,}8212$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (16) y (17) hallamos

$$\sigma_1 = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}894^2}{3(1 - 0{,}3^2)10^4} = 276 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}7 \cdot 10^4 \cdot 0{,}8212 = 2874 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{máx} = \sigma_1 + \sigma_2 = 3150 \text{ kgf/cm}^2$$

Comparando estos valores de las tensiones con las tensiones máximas obtenidas para una placa de las mismas dimensiones pero sosteniendo una carga doble con bordes simplemente apoyados (v. pág. 25), se puede dedu-

Librodot

cir que bajo el efecto del empotramiento de los bordes, la tensión de tracción directa decrece considerablemente mientras que la tensión de flexión máxima aumenta sensiblemente, por más que tensión total máxima, para los bordes empotrados es mayor que en el caso de bordes simplemente apoyados.

Si se ha operado como en el artículo precedente, se puede deducir que la tensión máxima, en una placa, no depende más que de q y de l/h y se

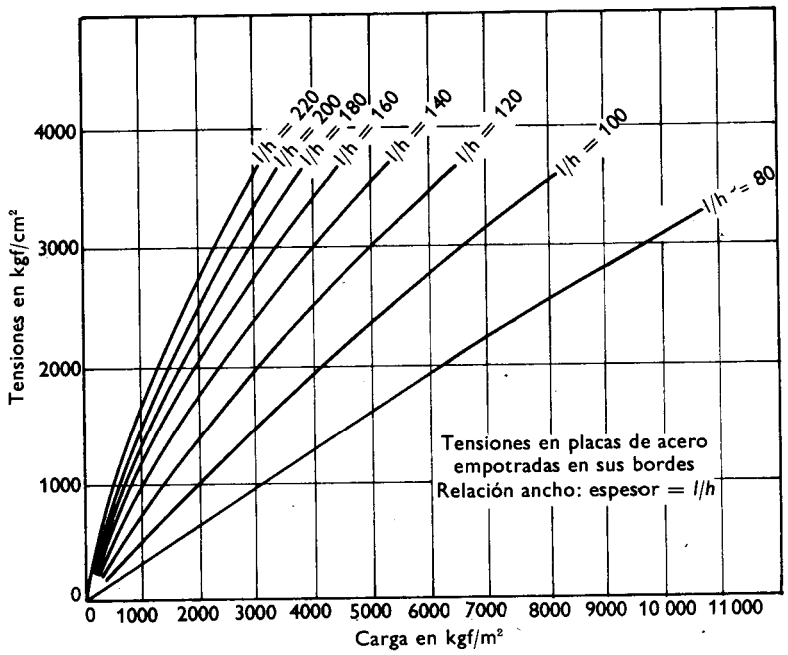


FIG. 9

puede trazar una serie de curvas que dan la tensión máxima en función de q, cada curva de la serie corresponde a un valor particular de l/h. Estas curvas están representadas en la figura 9. Cuando el esfuerzo axial sobre las flechas de la franja es débil, se ve que para pequeños valores de q, la tensión máxima aumenta aproximadamente en la misma proporción que la carga q. Pero para grandes valores de q la relación entre la carga y la tensión máxima ya no es lineal.

La tabla 1 da los valores numéricos de todas las funciones de las figuras 4, 5 y 8. Se puede utilizar este cuadro en lugar de las curvas para el cálculo de tensiones y flechas máximas de placas largas rectangulares uniformemente cargadas.

Librodot

4. *Flexión cilíndrica de placas rectangulares uniformemente cargadas, con bordes elásticamente empotrados*

Supongamos que, durante la flexión, los bordes longitudinales de una placa giran un ángulo proporcional al momento de flexión de los bordes. En este caso, las fuerzas que actúan sobre la franja elemental serán, de nuevo, del tipo de las de la figura 7 y se obtendrá para las flechas w la expresión (b) del artículo precedente. No obstante las condiciones en los extremos que permiten determinar las constantes de integración y el momento M_0 están modificadas, ya que la pendiente de la deformada en los extremos de la franja no es nula sino proporcional al valor del momento M_0 y se tiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = -\beta M_0 \qquad (a)$$

donde β es función de la rigidez de fijación de los bordes. Si esta fijación es muy flexible, el factor β es grande y las condiciones en los extremos están más cerca del caso de bordes simplemente apoyados. Si la fijación es muy rígida, β disminuye y las condiciones de los extremos se aproximan a las de bordes completamente empotrados. Las dos últimas condiciones en los límites son las mismas que las del artículo precedente. Así se tiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = -\beta M_0 \qquad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=l/2} = 0 \qquad (b)$$
$$(w)_{x=0} = 0$$

Aplicando estas condiciones, se encuentran las dos constantes de integración y M_0 a partir de (b) del artículo precedente. A causa de la flexibilidad de los bordes, los momentos M_0 en los extremos serán menores que los dados por la ecuación (13) para los bordes rígidamente empotrados y el resultado final se puede escribir en la forma

$$M_0 = -\gamma \frac{ql^2}{12} \psi_1(u) \qquad (19)$$

donde γ es un factor numérico inferior, dado por la fórmula

$$\gamma = \frac{\text{th } u}{\frac{2\beta}{l} Du + \text{th } u}$$

Se ve que el valor de los momentos M_0 en los bordes depende del coeficiente β que define la rigidez de la ecuación. Cuando β es muy pequeño el coeficiente γ tiende hacia 1, y M_0 hacia el valor (13) calculado para los bordes rígidamente empotrados. Cuando β es muy grande, γ y M_0 disminuyen y las condiciones de contorno tienden hacia la de los bordes simplemente apoyados.

Librodot

TABLA 1

u	$\ln 10^4\sqrt{U_0}$		$\ln 10^4\sqrt{U_1}$		$\ln 10^4\sqrt{U_2}$		$f_0(u)$	$f_1(u)$	$\psi_0(u)$	$\psi_1(u)$	u
0	∞		∞		∞		1,000	1,000	1,000	1,000	0
0,5	3,889		3,217		3,801		0,908	0,976	0,905	0,984	0,5
		406		331		425					
1,0	3,483		2,886		3,376		0,711	0,909	0,704	0,939	1,0
		310		223		336					
1,5	3,173		2,663		3,040		0,532	0,817	0,511	0,876	1,5
		262		182		292					
2,0	2,911		2,481		2,748		0,380	0,715	0,367	0,806	2,0
		227		161		257					
2,5	2,684		2,320		2,491		0,281	0,617	0,268	0,736	2,5
		198		146		228					
3,0	2,486		2,174		2,263		0,213	0,529	0,200	0,672	3,0
		175		134		202					
3,5	3,311		2,040		2,061		0,166	0,453	0,153	0,614	3,5
		156		124		180					
4,0	2,155		1,916		1,881		0,132	0,388	0,120	0,563	4,0
		141		115		163					
4,5	2,014		1,801		1,718		0,107	0,335	0,097	0,519	4,5
		128		107		148					
5,0	1,886		1,694		1,570		0,088	0,291	0,079	0,480	5,0
		118		100		135					
5,5	1,768		1,594		1,435		0,074	0,254	0,066	0,446	5,5
		108		93		124					
6,0	1,660		1,501		1,311		0,063	0,223	0,055	0,417	6,0
		100		88		115					
6,5	1,560		1,413		1,196		0,054	0,197	0,047	0,391	6,5
		93		82		107					
7,0	1,467		1,331		1,089		0,047	0,175	0,041	0,367	7,0
		87		78		100					
7,5	1,380		1,253		0,989		0,041	0,156	0,036	0,347	7,5
		82		74		94					
8,0	1,298		1,179		0,895		0,036	0,141	0,031	0,328	8,0
		77		70		89					
8,5	1,221		1,109		0,806		0,032	0,127	0,028	0,311	8,5
		73		67		83					
9,0	1,148		1,042		0,723		0,029	0,115	0,025	0,296	9,0
		69		63		80					
9,5	1,079		0,979		0,643		0,026	0,105	0,022	0,283	9,5
		65		61		75					
10,0	1,014		0,918		0,568		0,024	0,096	0,020	0,270	10,0
		63		58		72					
10,5	0,951		0,860		0,496		0,021	0,088	0,018	0,259	10,5
		59		55		69					
11,0	0,892		0,805		0,427		0,020	0,081	0,017	0,248	11,0
		57		54		65					
11,5	0,835		0,751		0,362		0,018	0,075	0,015	0,238	11,5
		55		51		63					
12,0	0,780		0,700		0,299		0,016	0,069	0,014	0,229	12,0

Librodot

En este caso, la deformada puede ecribirse de la forma:

$$w = \frac{ql^4}{16u^4D}\,\frac{\operatorname{th} u - \gamma(\operatorname{th} u - u)}{\operatorname{th} u}\left\{\frac{\operatorname{ch}\left[u\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]}{\operatorname{ch} u} - 1\right\} + \frac{ql^2}{8u^2D}\,x(l - x) \qquad (20)$$

Para $\gamma = 1$, esta expresión se reduce a la ecuación (14) que da las flechas de una placa de bordes rígidamente empotrados. Para $\gamma = 0$ se obtiene la ecuación (6) de una placa de bordes simplemente apoyados.

Para calcular el parámetro de tracción u se opera de la misma manera que en los casos precedentes, se determina la tracción S a partir de la condición de que el alargamiento de la franja elemental es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada y la cuerda l.

Por consiguiente

$$\frac{S(1 - \nu^2)l}{hE} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$

Sustituyendo la expresión (20) en esta ecuación e integrando, se obtiene

$$\frac{E^2h^8}{(1 - \nu^2)^2q^2l^8} = (1 - \gamma)U_0 + \gamma U_1 - \gamma(1 - \gamma)U_2 \qquad (21)$$

donde U_0 y U_1 representan respectivamente los segundos miembros de las ecuaciones (8) y (15), y

$$U_2 = \frac{27}{16}\,\frac{(u - \operatorname{th} u)^2}{u^9 \operatorname{th}^2 u}\,(u \operatorname{th}^2 u - u + \operatorname{th} u)$$

Los valores de $\ln (10^4 \sqrt{U_2})$ están dados en la tabla 1. Utilizando esta tabla, la ecuación (21) se resuelve asimismo por aproximaciones sucesivas. Para una placa dada se comienza por calcular el primer miembro de esta ecuación y utilizando las curvas de las figuras 4 y 8, se determinan los valores de u:

1. Para bordes simplemente apoyados.
2. Para bordes completamente empotrados. (Naturalmente para bordes elásticamente empotrados u tendrá un valor intermedio.)

Dando un valor cualquiera dado a u se calcula U_0, U_1 y U_2 con la ayuda de la tabla 1 y se determina el valor del segundo miembro de (21). Generalmente este valor es diferente del de el primer miembro calculado anteriormente y será necesario hacer otro cálculo dando un nuevo valor a u. Dos cálculos son generalmente suficientes para determinar por interpolación, el valor de u que satisfagan a la ecuación (21). Conociendo u se pueden calcular a partir de (19), los momentos flectores M_0 en los extremos. Se puede también calcular el momento en el centro de la franja y deter-

Librodot

minar así la tensión máxima. Esta tensión se producirá en los extremos o en el centro según el grado de la rigidez de fijación de los bordes.

5. *Efecto sobre las tensiones y las flechas de pequeños desplazamientos de los bordes longitudinales en el plano de la placa*

En el estudio precedente se ha supuesto que, durante la flexión, los bordes longitudinales de la placa no se desplazan en el plano de ésta. A partir de esta hipótesis se ha calculado la tracción S para cada caso particular. Supongamos ahora, que los bordes se aproximan una longitud Δ. A causa de este desplazamiento el alargamiento de la franja elemental disminuirá y la ecuación para el cálculo de la tracción S se transformará en

$$\frac{Sl(1-\nu^2)}{hE} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \Delta \qquad (a)$$

Por otra parte, las ecuaciones (6), (14) y (20) de la deformada quedan invariables por ser independientes de S. Pueden ser diferenciadas y sustituidas bajo el signo de integración de la ecuación (a). Después de haber calculado esta integral y sustituido S por $4u^2D/l^2$, se obtiene para bordes simplemente apoyados

$$\frac{E^2h^8}{q^2(1-\nu^2)^2l^8}\,\frac{u^2+\dfrac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_0 \qquad (22)$$

y para bordes empotrados

$$\frac{E^2h^8}{q^2(1-\nu^2)^2l^8}\,\frac{u^2+\dfrac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = U_1 \qquad (23)$$

Si Δ se anula, las ecuaciones (22) y (23) deben ser idénticas a (8) y (15) obtenidas anteriormente para bordes fijos.

El caso más sencillo se obtiene colocando barras a compresión entre los lados longitudinales del contorno a fin de impedir que un borde de la placa se aproxime al otro durante la flexión. Las tracciones S en la placa producen el acortamiento de estas barras, el cual provoca un desplazamiento Δ proporcional a S[1]. Si es k el factor de proporcionalidad dependiente de la elasticidad y de la sección transversal de esta barra, se tiene

$$S = k\Delta$$

donde, sustituyendo S por $4u^2D/l^2$ se encuentra:

$$\Delta = \frac{1}{k}\,\frac{Eu^2h^3}{3l^2(1-\nu^2)}$$

y

$$\frac{u^2+\dfrac{3l\Delta}{h^2}}{u^2} = 1 + \frac{Eh}{kl(1-\nu^2)}$$

[1] El soporte del borde se supone tal, que l es uniforme a lo largo de los bordes.

Librodot

Así, el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (22) y (23) es una constante, fácilmente calculable si se conocen las dimensiones y las propiedades elásticas de la estructura conociendo este factor, se pueden resolver las ecuaciones (22) y (23), exactamente como en el caso de bordes fijos.

Generalmente el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (22) y (23) puede depender del valor de la carga que actúa sobre la estructura y la determinación de u se hace entonces por aproximaciones sucesivas. Ilustraremos este procedimiento con un ejemplo que se encuentra al calcular las tensiones en el casco de un navío cuando encuentra una ola. Los palastros del fondo de un navío están sometidos a la presión del agua uniformemente repartida y también a las fuerzas en el plano de los palastros

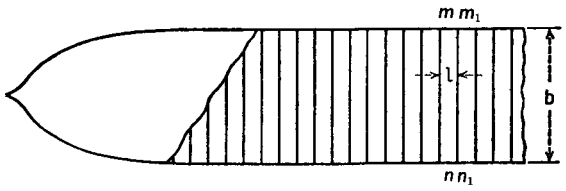


FIG. 10

debidas a la flexión del casco que se comporta con una viga. Sea b la anchura del barco en una sección transversal mn (fig. 10) y l la distancia entre dos pares sucesivos de las cuadernas. Cuando el seno de una ola está en el centro del navío [fig. 11 b)] la flotabilidad disminuye allí y aumenta en los extremos. El efecto de este cambio en la estructura del navío crea un momento de flexión descendente y la distancia normal entre los pares de las cuadernas aumenta. Para calcular exactamente este desplazamiento se debe tener en cuenta no solamente el momento de flexión M sobre el casco sino también la influencia sobre esta flexión de una cierta variación de las tracciones S repartidas a lo largo de los lados mn y m_1n_1 del palastro de

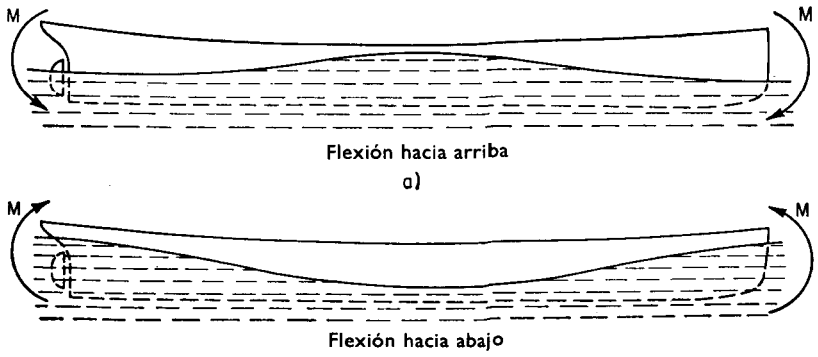


FIG. 11

Librodot

borde mnm_1n_1 (fig. 10) que consideramos como una placa larga rectangular cargada uniformemente por la presión del agua. Puesto que los palastros entre los pares consecutivos están igualmente cargados no hay giro de los bordes longitudinales de estos palastros que se pueden considerar como completamente empotrados a lo largo de sus bordes.

Para determinar Δ que, designa el desplazamiento de mn hacia m_1n_1 en la figura 10 y que es debido al momento de flexión del casco M y las reacciones de tracción S por unidad de longitud a lo largo de los lados mn

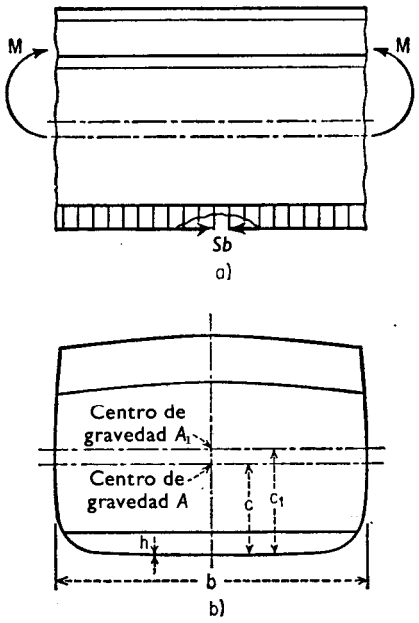


FIG. 12

y m_1n_1 del fondo se supone que el palastro mnm_1n_1 está sustituido por las fuerzas uniformemente distribuidas S, de modo que la resultante a lo largo de mn y m_1n_1 sea Sb [fig. 12 *a*)]. Se puede decir entonces que el desplazamiento Δ, de una cuaderna con relación a otra, es debido al momento de flexión M y a la carga excéntrica Sb aplicada en el casco sin fondo.

Si A, I, c, son respectivamente la sección transversal, el momento central de inercia y la distancia entre el palastro del fondo y el eje neutro de la sección completa del casco, y si A_1, I_1, c_1, son las mismas cantidades para la sección del casco sin palastro de fondo, estas últimas cantidades se pueden calcular a partir de las primeras por las relaciones:

$$\begin{aligned} A_1 &= A - bh \\ c_1 &= \frac{Ac}{A_1} \\ I_1 &= I - bhc^2 - A_1(c_1 - c)^2 \end{aligned} \qquad (b)$$

Librodot

El desplazamiento relativo Δ_1, producido por las fuerzas excéntricas Sb, está dado por la ecuación

$$\Delta_1 = \frac{l(1-\nu^2)}{E}\left(\frac{Sb}{A_1} + \frac{Sbc_1^2}{I_1}\right)$$

en la cual debe introducirse $1 - \nu^2$ si se ha despreciado la deformación lateral. El desplazamiento debido al momento flector M es:

$$\Delta_2 = -\frac{Mc_1 l}{EI_1}$$

De ahí el desplazamiento total es

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{l(1-\nu^2)}{E}\left[\frac{Sb}{A_1} + \frac{Sbc_1}{I_1} - \frac{Mc_1}{I_1(1-\nu^2)}\right] \qquad (c)$$

Sustituyendo en esta expresión S por su valor:

$$S = \frac{4u^2 D}{l^2} = \frac{Eu^2h^3}{3l^2(1-\nu^2)}$$

se obtiene finalmente

$$\Delta = \frac{u^2h^3}{3l}\left(\frac{b}{A_1} + \frac{bc_1^2}{I_1}\right) - \frac{Mlc_1}{EI_1} \qquad (d)$$

Debiendo sustituirse Δ por su valor en (23) para calcular el parámetro u.

Apliquemos este resultado a un ejemplo numérico. Sea $b = 16$ m, $I = 14{,}4 \times 10^8$ cm^4, $A = 12\,560$ cm^2, $c = 3{,}90$ m, $h = 2$ cm, $l = 1{,}20$ m, $q = 0{,}7$ kgf/cm^2 y $M = 37\,000$ m/t. De las ecuaciones (b) obtenemos

$$A_1 = 12\,560 - 1600 \cdot 2 = 9360 \text{ cm}^2$$

$$c_1 = \frac{12\,560 \cdot 3{,}90}{9360} = 5{,}20 \text{ m}$$

$$I_1 = 14{,}4 \cdot 10^8 - 1600 \cdot 2 \cdot 390^2 - 9360\,(520 - 390)^2 = 8{,}10^8 \text{ cm}^4$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (d) se determina y se encuentra finalmente

$$\frac{3\Delta l}{h^2} = 1{,}410u^2 - 11{,}48$$

La ecuación (23) entonces toma la forma

$$\frac{E^2h^8}{q^2(1-\nu^2)^2 l^8}\,\frac{u^2 + 1{,}410u^2 - 11{,}48}{u^2} = U_1$$

o bien

$$\frac{1{,}552Eh^4}{q(1-\nu^2)l^4}\sqrt{\frac{u^2 - 4{,}763}{u^2}} = \sqrt{U_1}$$

Librodot

Sustituyendo los valores numéricos y tomando logaritmos de ambos miembros obtenemos

$$3{,}597 + \ln \sqrt{\frac{u^2 - 4{,}763}{u^2}} = \ln (10^4 \sqrt{U_1})$$

Utilizando la curva de la figura 8, esta ecuación puede resolverse por aproximaciones sucesivas y obtenemos $u = 2{,}187$ y de la figura 5 $\eta_1(u) = 0{,}78$. La tensión máxima se calcula ahora mediante las ecuaciones (16) y (17) de las cuales tenemos

$$\sigma_1 = \frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 4{,}783}{3 \cdot 0{,}91 \cdot 60^2} = 1022 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\, 0{,}7 \cdot 60^2 \cdot 0{,}780 = 983 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2005 \text{ kgf/cm}^2.$$

Si se hubiera despreciado la tensión de flexión en la placa, debida a la presión del agua y si se hubiera calculado la tensión del límite del fondo por la fórmula $\sigma = Mc/I$ se habrá obtenido una tensión máxima igual a 1000 kgf/cm^2.

6. *Método de cálculo aproximado del parámetro u*

Para calcular el parámetro u en las placas donde los bordes longitudinales no se desplazan en el plano de la placa, se utiliza la ecuación

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx \qquad (a)$$

que indica que el alargamiento de la franja elemental producido por S es igual a la diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada y la cuerda l. En los casos particulares estudiados en los artículos precedentes se han obtenido expresiones exactas para las flechas w y las tablas numéricas y las curvas, para determinar el segundo miembro de la ecuación (a). Si no se dispone de tales tablas, la resolución de (a) se complica y para simplificar el problema debe recurrirse al método aproximado. Se sabe[1] por el estudio de la flexión de las vigas que, en el caso de extremos simplemente apoyados con cargas transversales actuando en la misma dirección, la deformación de una franja elemental debida a la asociación de una carga transversal y de una tracción S (fig. 3), se puede dar con suficiente aproximación por la ecuación

$$w = \frac{w_0}{1 + \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \qquad (b)$$

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 52, 1956.

Librodot

en la que w_0 representa la flecha en el centro de la franja, debida a la carga transversal sola y α está dada por la fórmula

$$\alpha = \frac{S}{S_{cr}} = \frac{Sl^2}{\pi^2 D} \tag{c}$$

Así α representa la relación de la fuerza axial S y la carga crítica de Euler, para la franja elemental.

Sustituyendo la expresión (b) en la ecuación (a) e integrando se obtiene

$$\frac{Sl(1 - \nu^2)}{hE} = \frac{\pi^2 w_0^2}{4l(1 + \alpha)^2}$$

Utilizando entonces la notación (c) y sustituyendo D por su expresión (3), se obtiene finalmente

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2} \tag{24}$$

A partir de esta ecuación puede calcularse α en cada caso particular y u está entonces determinado por la ecuación

$$u^2 = \frac{S}{D}\frac{l^2}{4} = \frac{\pi^2 \alpha}{4} \tag{d}$$

Pondremos un ejemplo numérico para aplicar la ecuación aproximada (24). Una placa larga rectangular de acero de bordes simplemente apoyados y en las que las dimensiones son $l = 1{,}30$ m, $h = 1{,}3$ cm, soporta una carga uniformemente repartida $q = 1{,}4$ kgf/cm^2. En este caso

$$w_0 = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{D}$$

y, después de haber sustituido por los valores numéricos, la ecuación (24) será

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 269{,}56 \tag{3}$$

Se puede simplificar la solución de la ecuación poniendo

$$1 + \alpha = x \tag{e}$$

Entonces

$$x^3 - x^2 = 269{,}56$$

es decir que x es tal que la diferencia entre su cubo y su cuadrado tiene un valor conocido. Así x puede determinarse fácilmente mediante una regla de cálculo o una tabla numérica y en nuestro caso se encuentra

$$x = 6{,}8109 \quad \text{y} \quad \alpha = 5{,}8109$$

Librodot

Entonces de la ecuación (*d*) se tiene

$$u = 3{,}7865$$

y de (*e*) (v. pág. 9)

$$\psi_0 = 0{,}13316$$

Para calcular la tensión de fracción y la tensión máxima de flexión se utilizan las ecuaciones (10) y (11). Se encuentra entonces:

$$\sigma_1 = 1103 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\sigma_2 = 1398 \text{ kgf/cm}^2$$
$$\sigma_{máx} = \sigma_1 + \sigma_2 = 2501 \text{ kgf/cm}^2$$

Los cálculos hechos en el apartado 2 (pág. 25) dan para este ejemplo

$$\sigma_{máx} = 2503 \text{ kgf/cm}^2.$$

Se comprueba así que la aproximación de la ecuación (24) es muy buena en este caso. En general, la exactitud depende del valor de u. El error aumenta con u.

Los cálculos muestran que para $u = 1{,}44$, el error en la tensión máxima es solamente de 0,065 % y para $u = 12{,}29$ que corresponde a placas muy flexibles, el error es del orden de 0,30 %. Estos valores de u son los encontrados más a menudo en la práctica y se puede decir que la ecuación (24) puede usarse con suficiente precisión en el caso práctico de placas uniformemente cargadas con bordes simplemente apoyados.

Se puede también utilizar cuando la carga no está uniformemente distribuida, como en el caso de presión hidrostática no uniformemente repartida a lo largo de la franja elemental. Si se calcula la fuerza longitudinal con ayuda de la ecuación (24) las flechas se obtienen entonces a partir de (*b*) y el momento flector en toda sección transversal, es igual a la suma algebraica a la carga transversal y del momento producido por la fuerza longitudinal[1].

En el caso de bordes empotrados la expresión aproximada de la deformada de una franja elemental puede ponerse en la forma

$$w = \frac{w_0}{1 + \alpha/4} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right) \qquad (f)$$

En la que w_0 es la flecha de la viga empotrada bajo carga lateral teniendo α el mismo sentido que anteriormente. Sustituyendo w por su valor en (*a*) e integrando, se obtiene para la determinación de α la ecuación

$$\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{4}\right)^2 = \frac{3w_0^2}{h^2} \qquad (25)$$

[1] Se pueden obtener valores más precisos para las flechas y para los momentos flectores sustituyendo el valor aproximado de la fuerza longitudinal en (4) e integrando esta ecuación que da (12) y (9).

Librodot

que puede ser resuelta en cada caso particular por el método de resolución sugerido para (24).

Cuando se conoce α el parámetro u se determina a partir de (d), la tensión máxima se calcula entonces utilizando las ecuaciones (16) y (17) y la flecha máxima mediante la ecuación (18).

Si durante la flexión, un borde se desplaza hacia otro una longitud Δ, debe usarse la ecuación

$$\frac{Sl(1-\nu^2)}{hE} = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \Delta \qquad (g)$$

con preferencia a la ecuación (a) para los cálculos precedentes. Sustituyendo (b) en esta ecuación, se obtiene para determinar α, en el caso de los bordes simplemente apoyados

$$\alpha(1+\alpha)^2 \frac{\alpha + 12\dfrac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2} \qquad (26)$$

Si los bordes están empotrados se utiliza (f). Para determinar α se obtiene entonces

$$\alpha\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)^2 \frac{\alpha + 12\dfrac{\Delta l}{\pi^2 h^2}}{\alpha} = \frac{3w_0^2}{h^2} \qquad (27)$$

Si se conocen las dimensiones de la placa, la carga q y el desplazamiento Δ, las ecuaciones (26) y (27) pueden resolverse fácilmente como en artículos anteriores. Si Δ es proporcional a S, el segundo factor del primer miembro de las ecuaciones (26) y (27) es una constante y puede determinarse como se ha visto en artículos anteriores. Así las ecuaciones pueden resolverse también fácilmente.

7. *Placas largas rectangulares uniformemente cargadas, con pequeña curvatura cilíndrica inicial*

Se ha visto en los apartados 2 y 3 que las tracciones S contribuyen a la resistencia de las placas neutralizando la flexión producida por las cargas transversales. Esta acción crece con la flecha. Se puede disminuir todavía la tensión máxima dando previamente una curvatura oportuna a la placa.

El efecto de tal curvatura inicial sobre las tensiones y las flechas puede estudiarse[1] utilizando el método de aproximaciones sucesivas del artículo precedente.

[1] Véase el estudio de Timoshenko en *Festschrift zum siebzigsten Geburtstage August Foppls*, página 74, Berlín, 1923.

Librodot

Sea una placa larga rectangular de bordes simplemente apoyados (fig. 13) la curvatura inicial está dada por la ecuación

$$w_1 = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \tag{a}$$

Si se aplican las tracciones S en los bordes de la placa, las flechas iniciales (a) se reducirán en la relación $l/1 + \alpha$, donde α tiene el mismo valor que en el apartado precedente[1] (pág. 40). La carga transversal asociada a las fuerzas S producirá las flechas que se pueden expresar aproximadamente por la ecuación (b) del apartado anterior. Así la flecha total de la placa indicada en la figura 13 por la línea de trazos es

$$w = \frac{\delta}{1+\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \frac{w_0}{1+\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} = \frac{\delta + w_0}{1+\alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \tag{b}$$

Supongamos que los bordes longitudinales de la placa no se desplacen en su plano; la tracción S está determinada a partir de la condición que el alargamiento de la franja elemental debido a las fuerzas S es igual a la

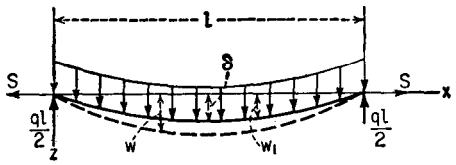


FIG. 13

diferencia entre la longitud del arco a lo largo de la deformada de la franja y la longitud inicial de ésta. En el caso de pequeñas flechas esta diferencia se expresa por

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{dw_1}{dx}\right)^2 dx \tag{c}$$

Sustituyendo las expresiones (a) y (b) de w y w_1 e integrando se tiene

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4l}\left[\left(\frac{\delta + w_0}{1+\alpha}\right)^2 - \delta^2\right]$$

Poniendo λ igual al alargamiento $Sl(1 - \nu^2)$ de la banda elemental, se obtiene finalmente

$$\alpha(1+\alpha)^2 = \frac{3(\delta + w_0)^2}{h^2} - \frac{3\delta^2(1+\alpha)^2}{h^2} \tag{28}$$

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 52, 1956.

Librodot

Si se hace $\delta = 0$, esta ecuación se reduce a la ecuación (24) de una placa sin curvatura inicial.

Pongamos un ejemplo numérico para montar la influencia de la curvatura inicial sobre la tensión máxima, aplicando la ecuación (28). Sea una placa de acero de longitud 115 cm y de espesor $h = 0{,}95$ cm, sometida a la sección de una carga uniformemente repartida $q = 0{,}7$ kgf/cm^2. Si no hay flecha inicial $\delta = 0$ y la ecuación (28) toma la forma

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 290$$

de donde se deduce

$$\alpha = 5{,}97 \qquad \text{y} \qquad u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha} = 3{,}83$$

A partir de la ecuación (10) se obtiene

$$\sigma_1 = 790 \text{ kgf/cm}^2$$

y de (11)

$$\sigma_2 = 995 \text{ kgf/cm}^2.$$

La tensión máxima en la placa es

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_1 + \sigma_2 = 1785 \text{ kgf/cm}^2$$

Supongamos ahora que existe una flecha inicial en la placa tal que $\delta = h = 0{,}95$ cm. En este caso la ecuación (28) da

$$\alpha(1 + \alpha)^2 = 351{,}6 - 3(1 + \alpha)^2$$

sea

$$1 + \alpha = x$$

se obtiene

$$x^3 + 2x^2 = 351{,}6$$

de donde se tiene

$$x = 6{,}45 \qquad \alpha = 5{,}45 \qquad u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha} = 3{,}67$$

De la ecuación (10) se deduce la tensión de tracción

$$\sigma_1 = 714 \text{ kgf/cm}^2.$$

Para calcular la tensión de flexión no se tiene en cuenta más que la diferencia de las flechas

$$w - w_1 = \frac{w_0}{1 + \alpha}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - \frac{\alpha\delta}{1 + \alpha}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} \qquad (d)$$

La tensión máxima de flexión correspondiente al primer término del segundo miembro de (d), es la misma que para una placa plana

Librodot

con $u = 3{,}67$. De la tabla 1 se tiene $\psi_0 = 0{,}142$ y de la ecuación (11)

$$\sigma'_2 = 1071 \text{ kgf/cm}^2.$$

El momento flector correspondiente al segundo término de (*d*) es

$$-D\frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{\alpha\delta}{1+\alpha}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}\right) = -\frac{\alpha\pi^2\,\delta D}{(1+\alpha)l^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{l}$$

Este momento es negativo y la tensión máxima correspondiente

$$\sigma'' = \frac{6}{h^2}\cdot\frac{\alpha\pi^2\,\delta D}{(1+\alpha)l^2} = 665 \text{ kgf/cm}^2$$

debe ser restada de la tensión de flexión σ'_2, calculada más arriba. Por consiguiente la tensión máxima para una placa que tenía una flecha inicial es

$$\sigma_{\text{máx}} = 714 + 1071 - 665 = 1120 \text{ kgf/cm}^2$$

La comparación de este resultado con el obtenido para una placa plana demuestra que la curvatura inicial de la placa permite disminuir la tensión máxima de 1785 a 1120 kgf/cm². Este resultado se ha obtenido suponiendo que la flecha inicial es igual al espesor de la placa. Aumentando la curvatura de una placa, la tensión máxima puede reducirse aún más.

8. *Flexión cilíndrica de una placa sobre cimentación elástica*

Consideremos el problema de flexión de una placa larga rectangular uniformemente cargada, descansando toda la superficie sobre una cimentación elástica y rígidamente apoyada en los bordes (fig. 14).

Cortando como antes una franja elemental de esta placa, se puede asimilar a una

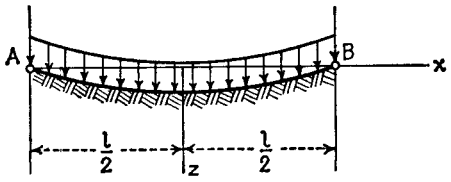


FIG. 14

viga sobre cimentación elástica. Supongamos que la reacción de la cimentación en todo punto es proporcional a la flecha w en este punto, diferenciando la ecuación (4) dos veces[1], se obtiene

$$D\frac{d^4w}{dx^4} = q - kw \tag{29}$$

donde q es la intensidad de la carga que actúa sobre la placa y k la reacción de la cimentación por unidad de superficie para una flecha igual a la unidad. Introduciendo la notación

$$\beta = \frac{l}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4D}} \tag{30}$$

[1] *Ibíd.*, pág. 21.

Librodot

la solución general de (29) se puede escribir;

$$w = \frac{q}{k} + C_1 \operatorname{sen}\frac{2\beta x}{l}\operatorname{sh}\frac{2\beta x}{l} + C_2 \operatorname{sen}\frac{2\beta x}{l}\operatorname{ch}\frac{2\beta x}{l} + C_3 \cos\frac{2\beta x}{l}\operatorname{sh}\frac{2\beta x}{l} + C_4 \cos\frac{2\beta x}{l}\operatorname{ch}\frac{2\beta x}{l} \qquad (a)$$

Las cuatro constantes de integración se determinan a partir de las condiciones en los bordes de la franja. En el caso considerado la flecha es simétrica con relación al centro de la franja. Así, tomando los ejes de coordenadas como indica la figura 14, se llega a[1] que $C_2 = C_3 = 0$. C_1 y C_4 se determinan a partir de las condiciones de la flecha y el momento flector de la franja nulo en los extremos ($x = l/2$). De ahí

$$(w)_{x=l/2} = 0$$
$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=l/2} = 0 \qquad (b)$$

Sustituyendo w por su expresión (a) y recordando que $C_2 = C_3 = 0$, se obtiene

$$\frac{q}{k} + C_1 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sh}\beta + C_4 \cos\beta \operatorname{ch}\beta = 0$$
$$C_1 \cos\beta \operatorname{ch}\beta - C_4 \operatorname{sen}\beta \operatorname{ch}\beta = 0 \qquad (c)$$

de donde se deduce

$$C_1 = -\frac{q}{k}\frac{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sh}^2\beta + \cos^2\beta \operatorname{ch}^2\beta} = -\frac{q}{k}\frac{2\operatorname{sen}\beta \operatorname{sh}\beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}$$

$$C_4 = -\frac{q}{k}\frac{\cos\beta \operatorname{ch}\beta}{\operatorname{sen}^2\beta \operatorname{sh}^2\beta + \cos^2\beta \operatorname{ch}^2\beta} = -\frac{q}{k}\frac{2\cos\beta \operatorname{ch}\beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}$$

Sustituyendo los valores de las constantes en (a) y utilizando la ecuación (30), la flecha de la franja viene dada por la expresión

$$w = \frac{ql^4}{64D\beta^4}\left(1 - \frac{2\operatorname{sen}\beta \operatorname{sh}\beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}\operatorname{sen}\frac{2\beta x}{l}\operatorname{sh}\frac{2\beta x}{l} - \frac{2\cos\beta \operatorname{ch}\beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}\cos\frac{2\beta x}{l}\operatorname{ch}\frac{2\beta x}{l}\right) \qquad (d)$$

La flecha en el centro de la franja se obtiene para $x = 0$

$$(w)_{x=0} = \frac{5ql^4}{384D}\varphi(\beta) \qquad (31)$$

donde

$$\varphi(\beta) = \frac{6}{5\beta^4}\left(1 - \frac{2\cos\beta \operatorname{ch}\beta}{\cos 2\beta + \operatorname{ch} 2\beta}\right)$$

Para obtener los giros de los extremos de la placa se deriva (d) respecto a x y se hace $x = -l/2$. Así se obtiene

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=-l/2} = \frac{ql^3}{24D}\varphi_1(\beta) \qquad (32)$$

donde

$$\varphi_1(\beta) = \frac{3}{4\beta^3}\frac{\operatorname{sh} 2\beta - \operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}$$

[1] Se ha visto que los términos con los coeficientes C_2 y C_3 cambian de signo cuando se sustituye x por $-x$.

Librodot

El momento flector en cualquier sección transversal de la franja se obtiene por la ecuación

$$M = -D\frac{d^2w}{dx^2}$$

Sustituyendo w por su expresión (d), se encuentra para el centro de la franja

$$(M)_{x=0} = \frac{ql^2}{8}\varphi_2(\beta) \tag{33}$$

donde

$$\varphi_2(\beta) = \frac{2}{\beta^2}\frac{\operatorname{sh}\beta \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch} 2\beta + \cos 2\beta}$$

Para simplificar el cálculo de las flechas y las tensiones los valores numéricos de las funciones φ, φ_1 y φ_2 están dados en la tabla 2.

TABLA 2

β	φ	φ_1	φ_2	β	φ	φ_1	φ_2
0,1	1,000	1,000	1,000	1,6	0,186	0,200	0,164
0,2	0,999	0,999	0,999	1,7	0,151	0,166	0,129
0,3	0,996	0,995	0,995	1,8	0,124	0,138	0,101
0,4	0,984	0,983	0,983	1,9	0,102	0,116	0,079
0,5	0,961	0,961	0,959	2,0	0,084	0,099	0,062
0,6	0,921	0,923	0,919	2,2	0,058	0,072	0,037
0,7	0,863	0,866	0,859	2,4	0,042	0,055	0,021
0,8	0,787	0,791	0,781	2,6	0,029	0,043	0,011
0,9	0,698	0,702	0,689	2,8	0,022	0,034	0,005
1,0	0,602	0,609	0,591	3,0	0,016	0,028	0,002
1,1	0,508	0,517	0,494	3,2	0,012	0,023	0,000
1,2	0,421	0,431	0,405	3,4	0,010	0,019	−0,001
1,3	0,345	0,357	0,327	3,6	0,007	0,016	−0,002
1,4	0,281	0,294	0,262	3,8	0,006	0,014	−0,002
1,5	0,228	0,242	0,208	4,0	0,005	0,012	−0,002

Para valores pequeños de β es decir para cimentaciones poco resistentes, fácilmente las funciones φ y φ_2 no difieren mucho de la unidad. Así la flecha máxima y las tensiones de flexión son muy parecidas a las de una franja simplemente apoyada sin cimentación elástica. Si β aumenta, la reacción de la cimentación es cada vez más importante.

Se encuentran condiciones iguales a las de la figura 14, cuando una placa larga rectangular de anchura l está cargada sobre una cimentación elástica por cargas uniformemente distribuidas a lo largo de los bordes y de valor P por unidad de longitud (fig. 15). La placa se hunde en la cimentación elástica y flexa, como indica

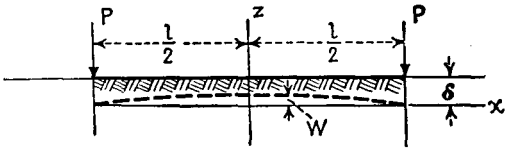


FIG. 15

Librodot

la línea de trazos. Si δ designa la flecha en los bordes de la placa, la reacción de la cimentación en todo punto es

$$k(\delta - w) = k\delta - kw$$

donde w está dada por la ecuación (d) con $q = k\delta$. El valor de δ se obtiene igualando la carga a la reacción de la cimentación. Por consiguiente

$$P = \frac{k\delta l}{2} - k \int_0^{l/2} w \, dx$$

Se pueden estudiar de la misma forma las placas apoyadas sobre cimentaciones elásticas pero con otras condiciones en los bordes longitudinales.

Librodot