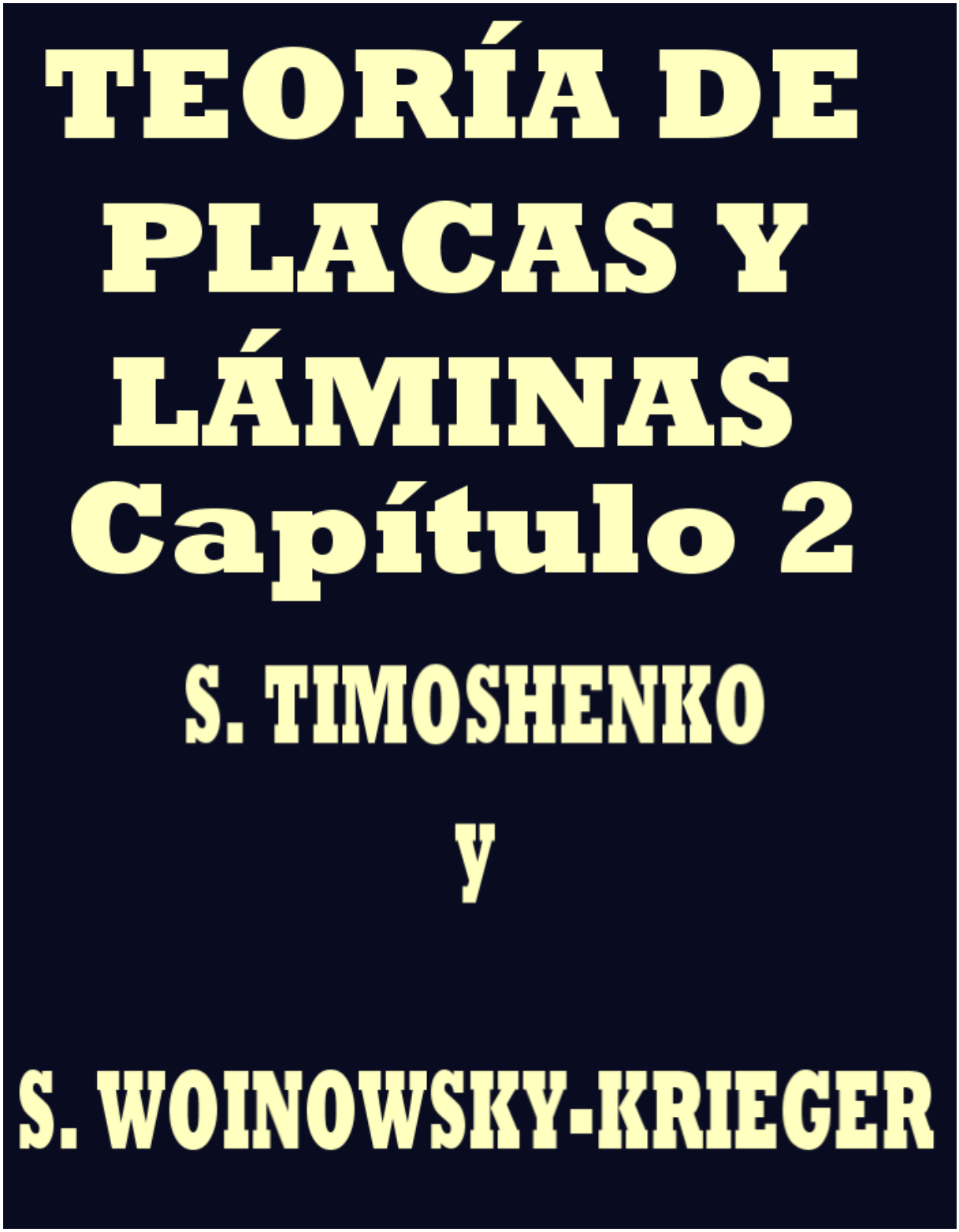
TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
CAPÍTULO 2



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
CAPÍTULO 2

S. TIMOSHENKO
Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER
Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por
F. J. MEDINA SALANOVA
Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

2

Flexión pura de placas

9. *Pendiente y curvatura de placas ligeramente flexadas*

Al estudiarse las pequeñas flechas de una placa, hemos tomado el *plano medio* de la placa antes de la flexión como plano xy. Durante la flexión las partículas que se encontraban en el plano xy sufren pequeños desplazamientos w perpendiculares al plano xy y forman la *superficie media* de la placa. Estos desplazamientos de la superficie media se llamarán en lo sucesivo *flechas de la placa*. Si se toma una sección normal de la placa paralela al plano xz [fig. 16 *a*)], se ve que la pendiente de la superficie media en la dirección de las x es $i_x = \partial w/\partial x$. Igualmente la pendiente en la dirección de las y es $i_x = \partial w/\partial y$. Sea an una dirección cualquiera en el plano xy [fig. 16 *b*)] y α el ángulo que forma con el eje de las x, la diferencia entre las flechas de dos puntos próximos a y a_1 según an, es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy$$

y la pendiente correspondiente

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dn} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha \qquad (a)$$

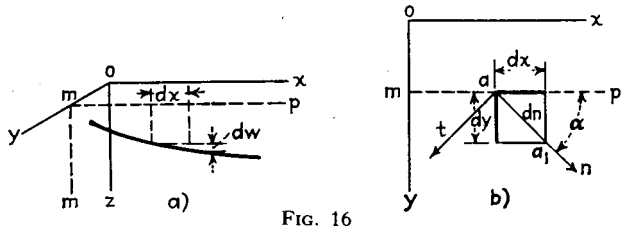


FIG. 16

Librodot

La dirección α_1 correspondiente a la pendiente máxima se obtiene anulando la derivada respecto a α en la ecuación (a). De este modo se tiene

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\partial w}{\partial y} \Big/ \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (b)$$

Sustituyendo los valores correspondientes de sen α_1 y cos α_1 en (a), se tiene para la pendiente máxima la expresión

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} \qquad (c)$$

Anulando (a) se determina la dirección correspondiente a la pendiente nula. El ángulo correspondiente α_2 está dado por la ecuación

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{\partial w}{\partial x} \Big/ \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (d)$$

A partir de las ecuaciones (b) y (d) se concluye

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$$

expresión que demuestra que las direcciones de pendiente nula y pendiente máxima son perpendiculares.

Para determinar la curvatura de la superficie de la placa, hay que tener en cuenta que las flechas son muy pequeñas. En este caso, la pendiente de la superficie en toda dirección puede considerarse igual al ángulo que forma la tangente a la superficie con el plano xy, y su cuadrado es despreciable frente a la unidad. La curvatura de la superficie en un plano paralelo al plano xz (fig. 16), es entonces igual a

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (e)$$

Consideramos la curvatura positiva si la superficie es convexa hacia abajo. La ecuación (e) está precedida del signo menos porque la flecha es convexa hacia abajo (v. fig. 16) y por consiguiente la derivada segunda $\partial w/\partial x^2$ es negativa.

De la misma manera, se tiene para la curvatura en un plano paralelo al yz.

$$\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (f)$$

Estas ecuaciones son idénticas a las utilizadas en el estudio de la curvatura de una viga flexada.

Para la curvatura de la superficie media según una dirección cualquiera (fig. 16) se tiene

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)$$

Librodot

Sustituyendo $\partial w/\partial n$ por su valor según (a) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha$$

se deduce

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_n} &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha\right)\\ &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\\ &= \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha - \frac{1}{r_{xy}}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}^2\alpha \qquad (g)\end{aligned}$$

Se ve que la curvatura en una dirección n en un punto de la superficie media puede calcularse si se conocen en dicho punto las curvaturas

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

y el valor

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \qquad (h)$$

que se denomina *torsión* con respecto a los ejes x e y.

Si en lugar de la dirección *an* [fig. 16 *b*)], tomamos la dirección *at* perpendicular a *an*, la curvatura en esta nueva dirección se obtendrá en la expresión (g) poniendo $\pi/2 + \alpha$ en lugar de α. Así se obtiene

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{r_{xy}}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{1}{r_y}\cos^2\alpha \qquad (i)$$

Sumando las expresiones (g) e (i) tenemos

$$\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r_t} = \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \qquad (34)$$

que pone de manifiesto en que cualquier punto de la superficie media la suma de las curvaturas según las direcciones perpendiculares tales como n y t es independiente del ángulo α. Esta suma se llama *curvatura media* de la superficie en un punto.

La torsión en a con respecto a las direcciones *an* y *at* es

$$\frac{1}{r_{nt}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dw}{dn}\right)$$

Para calcular la derivada respecto a t, debe notarse que la dirección *at* es perpendicular a *an*. Así se obtiene la derivada buscada poniendo $\pi/2 + \alpha$

en lugar de α en la ecuación (a). De este modo se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_{nt}} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{sen}\alpha\right)\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\alpha\right)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \cos 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right) + \cos 2\alpha\,\frac{1}{r_{xy}} \qquad (j)\end{aligned}$$

En el estudio sucesivo interesará determinar en función de α las direcciones en que la curvatura es máxima o mínima y hallar los correspondientes valores de la curvatura. Se obtiene la ecuación necesaria para determinar α, igualando a 0 la derivada respecto a α de la expresión (g) que da

$$\frac{1}{r_x}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{2}{r_{xy}}\cos 2\alpha - \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}2\alpha = 0 \qquad (k)$$

de donde

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{\dfrac{2}{r_{xy}}}{\dfrac{1}{r_x} - \dfrac{1}{r_y}} \qquad (35)$$

De esta ecuación se obtienen dos valores de α que difieren en $\pi/2$. Sustituyéndolos en (g) se hallan dos valores de $1/r_n$, correspondientes a las curvaturas máxima y mínima en el punto a. Estas dos curvaturas se denominan *curvaturas principales* de la superficie, y los planos correspondientes *naz* y *taz*, *planos principales de curvatura.*

Teniendo en cuenta que el primer miembro de la ecuación (k) es igual al doble de la expresión (j) se deduce que si las direcciones *an* y *at* (fig. 16) están en los planos principales la torsión correspondiente $1/r_{nt}$ es nula.

Podemos utilizar un círculo similar al círculo de Mohr que representa las tensiones combinadas, para mostrar cómo la curvatura y la torsión de una superficie varían con el ángulo α[1]. Para simplificar el estudio supondremos los planos coordenados xz e yz paralelos a los planos principales de curvatura en el punto a. Entonces

$$\frac{1}{r_{xy}} = 0$$

y de las ecuaciones (g) y (j) se obtiene para un ángulo α

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_n} &= \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha + \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}^2\alpha\\ \frac{1}{r_{nt}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\operatorname{sen}2\alpha\end{aligned} \qquad (36)$$

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte I, 3.ª ed., pág. 40, 1955.

Librodot

Tomando las curvaturas como abscisas y las torsiones como ordenadas y construyendo un círculo de diámetro $1/r_x - 1/r_y$ como indica la figura 17 vemos que el punto A definido por el ángulo 2α tiene la abscisa

$$\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{r_x}\cos^2\alpha + \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}^2\alpha$$

y la ordenada

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y}\right)\operatorname{sen} 2\alpha$$

Comparando estos resultados con las fórmulas (36) se llega a la conclusión de que las ordenadas del punto A definen la curvatura y torsión de la superficie para cualquier valor del ángulo α. Se ve que la torsión máxima, representada por el radio del círculo, se produce cuando $\alpha = \pi/4$, esto es, cuando se consideran dos direcciones perpendiculares, bisectrices de los ángulos formados por los planos principales.

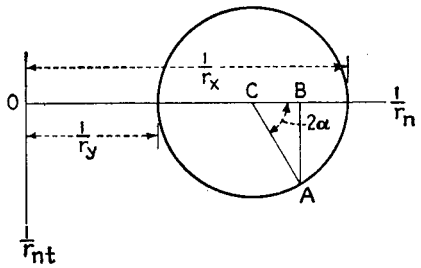


FIG. 17

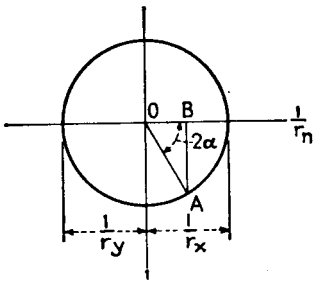


FIG. 18

En nuestro ejemplo la curvatura en cualquier dirección es positiva; de ahí que la superficie está flexada con la convexidad hacia abajo. Si las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son ambas negativas, la curvatura en cualquier dirección es también negativa, y tenemos una flexión de placa convexa hacia arriba. Las superficies en que las curvaturas en todos los planos tienen el mismo signo se llaman *sinclásticas*. A veces encontramos superficies en que las dos curvaturas principales tienen signos contrarios. Por ejemplo una silla de montar. Tales superficies se llaman *anticlásticas*. El círculo de la figura 18 representa el caso particular de tales superficies en que $1/r_y = -1/r_x$. Se ve que en este caso la curvatura se anula para $\alpha = \pi/4$ y para $\alpha = 3\pi/4$ y la torsión correspondiente vale $\pm 1/r_y$.

Librodot

10. *Relaciones entre momentos flectores y curvatura en la flexión pura de placas*

En el caso de flexión pura de barras prismáticas una solución rigurosa para la distribución de tensiones se obtiene haciendo la hipótesis de que las secciones transversales de la barra permanecen planas durante la flexión y únicamente giran alrededor de su fibra neutra de modo que permanecen siempre normales a la deformada. La combinación de tal flexión en dos direcciones perpendiculares nos lleva a la flexión pura de placas. Comencemos con la flexión pura de una placa rectangular debida a momentos uniformemente distribuidos en los bordes, como indica la figura 19. Tomamos el plano xy como plano medio de la placa antes de la flexión y los ejes x e y según dos de los bordes de la placa. El eje z es entonces perpendicular al plano medio y positivo hacia abajo. Sea M_x el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre un borde paralelo al eje y y M_y el momento flector por unidad de longitud que actúa sobre un borde paralelo al eje x. Estos momentos los consideraremos positivos cuando están dirigidos como se indica en la figura, esto es, cuando producen compresión en la cara superior de la placa y tracción en la inferior. El espesor de la placa lo representaremos como antes por h y lo consideramos pequeño en comparación con las otras dimensiones.

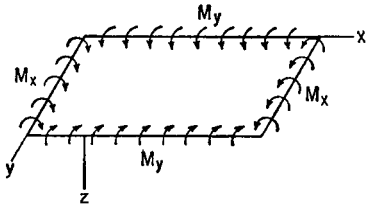


FIG. 19

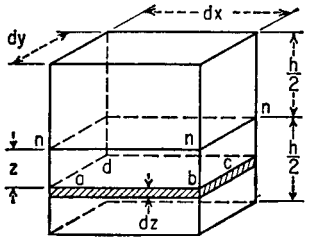


FIG. 20

Consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz e yz como indica la figura 20. Puesto que el caso de la figura 19 es el de la combinación de dos flexiones uniformes las condiciones tensionales son idénticas en todos los elementos como indica la figura 20 y se tiene una flexión uniforme de la placa. Haciendo la hipótesis de que durante la flexión de la placa las caras laterales del elemento permanecen planas y giran sobre las fibras neutras nn de tal modo que permanecen normales a la superficie media deformada de la placa, puede concluirse que el plano medio de la placa no sufre variación alguna de dimensiones en esta flexión y la superficie media es además *superficie neutra*[1]. Siendo $1/r_x$ y $1/r_y$ como antes, las curvaturas de la superficie neutra

[1] En el apartado 13 se demuestra que esta conclusión es suficientemente aproximada si las flechas son pequeñas en comparación con el espesor h.

en secciones paralelas a los planos xz e yz, respectivamente. Entonces las deformaciones longitudinales en las direcciones x e y de una lámina elemental *abcd* (fig. 20) a una distancia z de la superficie neutra son, como en el caso de una viga,

$$\epsilon_x = \frac{z}{r_x} \qquad \epsilon_y = \frac{z}{r_y} \tag{a}$$

Utilizando ahora la ley de Hooke [ec. (1)], las tensiones correspondientes en la lámina *abcd* son

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right) \\ \sigma_y &= \frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r_y} + \nu\frac{1}{r_x}\right) \end{aligned} \tag{b}$$

Estas tensiones son proporcionales a la distancia z de la lámina *abcd* a la superficie neutra y dependen de los valores de las curvaturas de la placa flexada.

Las tensiones normales distribuidas sobre las caras laterales del elemento en la figura 20 pueden reducirse a pares de fuerzas, cuyo valor total por unidad de longitud debe ser evidentemente igual a los momentos externos M_x y M_y. De este modo obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dy\, dz &= M_x\, dy \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dx\, dz &= M_y\, dx \end{aligned} \tag{c}$$

Sustituyendo las expresiones (b) de σ_x y σ_y, se obtiene

$$M_x = D\left(\frac{1}{r_x} + \nu\frac{1}{r_y}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{37}$$

$$M_y = D\left(\frac{1}{r_y} + \nu\frac{1}{r_x}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{38}$$

donde D es la rigidez a flexión de la placa definida por la ecuación (3), y w indica las flechas de la placa en la dirección z.

Consideremos ahora las tensiones que actúan sobre una sección de la lámina *abcd*, paralela al eje z y oblicua respecto a los ejes x e y. Si *acd* (fig. 21) representa una porción de la lámina cortada por tal sección, la tensión que actúa sobre *ac* puede ser determinada por medio de las ecuaciones de la estática. Reduciendo esta tensión a una componente normal σ_n y una componente tangencial τ_{nt}, los valores de estas componentes se obtienen proyectando las fuerzas que actúan sobre el elemento *acd* sobre las direcciones n y t respectivamente que dan las conocidas ecuaciones.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha \\ \tau_{nt} &= \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen} 2\alpha \end{aligned} \tag{d}$$

Librodot

en que α es el ángulo entre la normal n y el eje x o entre la dirección t y el eje y [fig. 21 *a*)]. El ángulo se considera positivo si se mide en el sentido de las agujas del reloj.

Considerando todas las láminas similares a *acd* en la figura 21 *b*), a lo largo del espesor de la placa, las tensiones normales σ_n dan el momento flector que actúa sobre la sección *ac* de la placa, el valor del cual por unidad de longitud según *ac* es

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_n z \, dz = M_x \cos^2 \alpha + M_y \operatorname{sen}^2 \alpha \tag{39}$$

Las tensiones cortantes τ_{nt} dan el momento torsor que actúa sobre la sección *ac* de la placa, cuyo valor por unidad de longitud según *ac* es

$$M_{nt} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z \, dz = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (M_x - M_y) \tag{40}$$

Los signos de M_n y M_{nt} están elegidos de tal modo que los valores positivos de estos momentos están representados por valores en las direc-

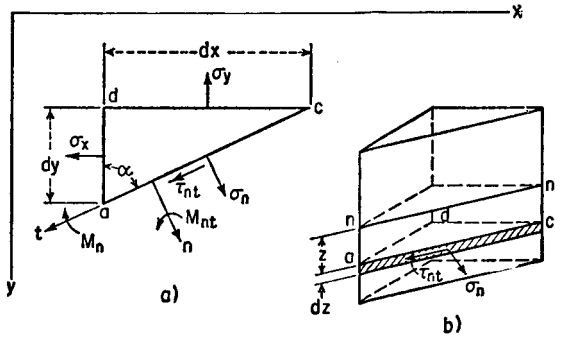


FIG. 21

ciones positivas de n y t [fig. 21 *a*)] si se utiliza la regla del tornillo a izquierda. Cuando α vale 0 o π la ecuación (39) da $M_n = M_x$. Para $\alpha = \pi/2$ ó $3\pi/2$ se obtiene $M_n = M_y$. Los momentos M_{nt} se anulan para estos valores de α. Así se obtienen las condiciones indicadas en la figura 19.

Las ecuaciones (39) y (40) son similares a las ecuaciones (36) y por medio de ellas pueden calcularse los momentos flector y torsor para cualquier valor de α. Podemos usar también con el mismo objeto el método gráfico y hallar los valores de M_n y M_{nt} mediante el círculo de Mohr que puede ser construido como se indicó en el apartado anterior, tomando M_n como abscisa, y M_{nt} como ordenada. El diámetro del círculo será igual a $M_x - M_y$ como indica la figura 22. Entonces las coordenadas OB y AB de un punto A, definido por el ángulo 2α, dan los momentos M_n y M_{nt} respectivamente.

Representemos ahora M_n y M_{nt} en función de las curvaturas y torsión de la superficie media de la placa, sustituyendo en la ecuación (39) M_x y M_y por sus expresiones (37) y (38) hallamos

$$M_n = D\left(\frac{1}{r_x}\cos^2\alpha + \frac{1}{r_y}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \nu D\left(\frac{1}{r_x}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{1}{r_y}\cos^2\alpha\right)$$

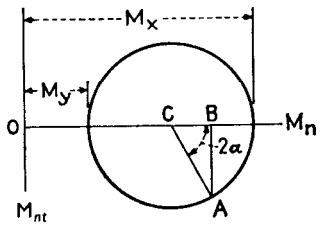


FIG. 22

Utilizando la primera de las ecuaciones (36) del apartado anterior, resulta que las expresiones entre paréntesis representan las curvaturas de la superficie media en las direcciones n y t respectivamente. De ahí que

$$M_n = D\left(\frac{1}{r_n} + \nu\frac{1}{r_t}\right) = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \tag{41}$$

Para obtener la expresión correspondiente para el momento torsor M_{nt}, consideremos la deformación de una lámina $abcd$ con los lados ab y ad paralelos a las direcciones n y t y a una distancia z del plano medio (fig. 23). Durante la flexión de la placa los puntos a, b, c y d sufren pequeños desplazamientos. Sean u y v las componentes del desplazamiento del punto a en las direcciones n y t respectivamente. Entonces el desplazamiento de d en la dirección n es $u + (\partial u/\partial t)dt$ y el desplazamiento de b en la dirección $tv + (\partial v/\partial n)dn$. Debido a estos desplazamientos, se obtiene una deformación tangencial

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \tag{e}$$

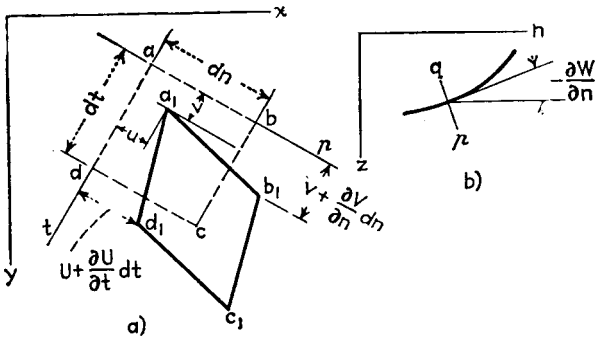


FIG. 23

La correspondiente tensión tangencial es

$$\tau_{nt} = G\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n}\right) \qquad (f)$$

De la figura 23 *b*), que representa la sección de la superficie media por un plano normal a través del eje n, se puede ver que el ángulo de giro en el sentido de las agujas del reloj de un elemento pq, que inicialmente era perpendicular al plano xy respecto a un eje perpendicular al plano nz es igual a $-\partial w/\partial n$. Debido a este giro un punto del elemento a una distancia z de la superficie neutra tiene un desplazamiento en la dirección n que vale

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial n}$$

Considerando la sección normal a través del eje t se puede demostrar que el mismo punto tiene un desplazamiento en la dirección t que vale

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial t}$$

Sustituyendo estos valores de u y v en la expresión (*f*) se tiene

$$\tau_{nt} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial n\,\partial t} \qquad (42)$$

y la expresión (40) del momento flector toma la forma

$$M_{nt} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{nt} z\,dz = \frac{Gh^3}{6}\frac{\partial^2 w}{\partial n\,\partial t} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial n\,\partial t} \qquad (43)$$

Se ve que el momento torsor para las direcciones perpendiculares dadas n y t es proporcional a la torsión de la superficie media correspondiente a las mismas direcciones. Cuando las direcciones n y t coinciden con los ejes x e y sólo existen los momentos flectores M_x y M_y que actúan sobre las secciones perpendiculares a esos ejes (fig. 19). Por consiguiente la correspondiente torsión es nula, y las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ son las curvaturas principales de la superficie media de la placa. Estas curvaturas pueden calcularse por las ecuaciones (37) y (38) si son dados los momentos flectores M_x y M_y. La curvatura en cualquier otra dirección definida por el ángulo α, puede calcularse por la primera de las ecuaciones (36) o tomarse de la figura 17.

En cuanto a las tensiones en una placa sometida a flexión pura, puede concluirse de la primera de las ecuaciones (*d*) que la máxima tensión normal actúa sobre secciones paralelas a los planos xz o yz. Los valores de estas tensiones se obtienen en las ecuaciones (*b*) haciendo $z = h/2$ y utilizando las ecuaciones (37) y (38). De este modo se halla

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = \frac{6M_x}{h^2} \qquad (\sigma_y)_{\text{máx}} = \frac{6M_y}{h^2} \qquad (44)$$

Si las tensiones son de signo contrario, la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector de los planos xz e yz y vale

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) = \frac{3(M_x - M_y)}{h^2} \tag{45}$$

Si las tensiones (44) son del mismo signo, la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector de los planos xy y xz o en el bisector de los planos xy e yx y vale $1/2(\sigma_y)_{\text{máx}}$ o $1/2(\sigma_x)_{\text{máx}}$ según cuál de las dos tensiones principales $(\sigma_y)_{\text{máx}}$ o $(\sigma_x)_{\text{máx}}$ sea mayor.

11. Casos particulares de flexión pura

En el estudio del apartado anterior se ha comenzado con el caso de una placa rectangular con momentos flectores uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes. Para obtener un caso general de flexión pura de una placa, imaginemos una porción de forma cualquiera separada de la placa considerada en la figura 19 por una superficie cilíndrica o prismática perpendicular a la placa. Las condiciones de flexión de esta porción permanecerán invariables con tal que a lo largo del contorno de la porción aislada de placa estén distribuidos momentos flectores y torsores que cumplan las ecuaciones (39) y (40). Así llegamos al caso de flexión pura de una placa de forma cualquiera y se llega a la conclusión de que se produce siempre si sobre los bordes de la placa actúan momentos flectores M_n y momentos torsores M_{nt} distribuidos en la forma dada por las ecuaciones (39) y (40).

Consideremos como primer ejemplo el caso particular de que

$$M_x = M_y = M$$

De las ecuaciones (39) y (40) puede deducirse que en este caso para una placa de cualquier forma los momentos flectores están uniformemente distribuidos a lo largo del contorno y los momentos torsores se anulan. De las ecuaciones (37) y (38) se deduce que

$$\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D(1+\nu)} \tag{46}$$

esto es, la placa se deforma según una superficie esférica, cuya curvatura está dada por la ecuación (46).

En el caso general en que M_x y M_y son diferentes hacemos

$$M_x = M_1 \qquad \text{y} \qquad M_y = M_2$$

Entonces de las ecuaciones (37) y (38) deducimos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M_1 - \nu M_2}{D(1-\nu^2)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_2 - \nu M_1}{D(1-\nu^2)} \tag{a}$$

y además

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0 \tag{b}$$

Integrando estas ecuaciones hallamos

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1-\nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1-\nu^2)} y^2 + C_1 x + C_2 y + C_3 \tag{c}$$

donde C_1, C_2 y C_3 son constantes de integración. Estas constantes definen el plano a partir del cual se miden las flechas w. Si este plano se toma tangente a la superficie media de la placa en el origen, las constantes de integración se anulan y la deformada tiene por ecuación

$$w = -\frac{M_1 - \nu M_2}{2D(1-\nu^2)} x^2 - \frac{M_2 - \nu M_1}{2D(1-\nu^2)} y^2 \tag{d}$$

En el caso particular en que $M_1 = M_2 = M$ de (d) se obtiene

$$w = -\frac{M(x^2 + y^2)}{2D(1+\nu)} \tag{e}$$

esto es, un paraboloide de revolución en lugar de la superficie esférica dada por la expresión (46). La contradicción de estos resultados proviene del uso de las expresiones aproximadas $\partial^2 w/\partial x^2$ y $\partial^2 w/\partial y^2$ para las curvaturas $1/r_x$ y $1/r_y$ la obtener la ecuación (e). Estas derivadas segundas de la flecha se usarán también en sucesivos estudios con preferencia a las expresiones exactas de las curvaturas, de acuerdo con las hipótesis del apartado 9. Esto simplifica las ecuaciones fundamentales de la teoría de placas.

Volviendo ahora a la ecuación (d), sea $M_2 = -M_1$. En este caso las curvaturas principales de las ecuaciones (a) son

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_1}{D(1-\nu)} \tag{f}$$

y obtenemos una superficie antielástica cuya ecuación es

$$w = -\frac{M_1}{2D(1-\nu)}(x^2 - y^2) \tag{g}$$

Las rectas paralelas al eje x se deforman según parábolas convexas hacia abajo (fig. 24), mientras las rectas paralelas al eje y lo hacen según parábolas convexas hacia arriba. Los puntos de la bisectrices de los ángulos formados por los ejes x e y, verifican $x = y$ o $x = -y$; por lo tanto, las

flechas a lo largo de estas líneas como puede verse en la ecuación (g) son nulas. Todas las rectas paralelas a estas bisectrices permanecen rectas durante la flexión y únicamente giran. Un rectángulo *abcd* limitado por tales rectas sufrirá una torsión como indica la figura 24. Veamos las seccio-

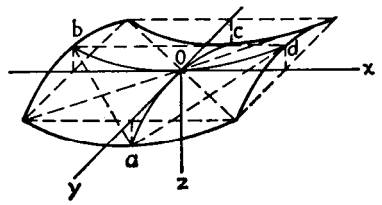


FIG. 24

nes normales a la placa por las rectas *ab*, *bc*, *cd* y *ad*. De las ecuaciones (39) y (40) se deduce que los momentos flectores a lo largo de dichas secciones son nulos y los momentos torsores valen M_1 en las secciones *ad* y *bc* y $-M_1$ en las secciones *ab* y *cd*. Así la porción *abcd* de la placa está en las condiciones de una placa sometida a flexión pura debida a la aplicación de momentos torsores uniformemente distribuidos a lo largo de los bordes [fig. 25 *a*)]. Estos momentos torsores son debidos a las tensiones tangenciales horizontales distribuidas de modo continuo sobre el borde [ec. (40)]. Esta distribución de tensiones horizontales puede ser sustituida por esfuerzos cortantes verticales que producen el mismo efecto que dicha distribución de tensiones. Para demostrarlo, divídase el borde *ab* en rectángulos infinitamente estrechos tales como el *mnpq* de la figura 25 *b*). Si Δ es el ancho elemental del rectángulo, el correspondiente par torsor es $M_1\Delta$ y

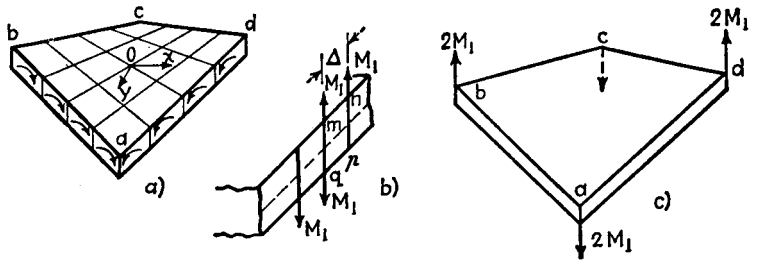


FIG. 25

puede ser debido a dos esfuerzos verticales del valor M_1 y sentidos contrarios que actúan en los lados verticales del rectángulo. Esta sustitución de las fuerzas horizontales distribuidas por un sistema estáticamente equivalente de dos fuerzas verticales, no puede ocasionar modificación sensible en la placa, excepto a distancias comparables con el espesor de la placa[1], que por hipótesis es pequeño.

[1] Esto se deduce del *principio de Saint Venant*. Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 33, 1951.

Librodot

Haciendo lo mismo con todos los rectángulos, deducimos que todas las fuerzas M_1 que actúan según los lados verticales de los rectángulos se compensan entre sí y quedan sólo dos fuerzas M_1 en las esquinas *a* y *d*. Haciendo la misma transformación en los restantes bordes de la placa, se deduce que la flexión de una placa según una superficie anticlástica puede producirse por fuerzas concentradas en las esquinas[1] [fig. 25 *c*)]. Tal experiencia es relativamente sencilla de ejecutar y fue utilizada para la verificación experimental de la teoría de flexión de placas antes estudiadas[2]. En estas experiencias se midieron las flechas de la placa a lo largo de la línea *bod* (fig. 24) y se halló que estaban de acuerdo con los resultados teóricos deducidos de la ecuación (*g*). Las únicas discrepancias se encontraron cerca de los bordes, y eran más pronunciadas en el caso de placas relativamente gruesas, como era de esperar del anterior estudio de la transformación de los pares de torsión a lo largo de los bordes.

Como último ejemplo consideremos la flexión de una placa (fig. 19) según una superficie cilíndrica de generatrices paralelas ál eje *y*. En tal caso $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ y de las ecuaciones (37) y (38) se deduce

$$M_x = -D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad M_y = -\nu D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{h}$$

Se ve que para producir la flexión de la placa según una superficie cilíndrica debemos aplicar no sólo momentos M_y sino también momentos M_x. Sin estos últimos la placa flexa según una superficie anticlásica[3]. La primera de las ecuaciones (*h*) ha sido ya usada en el capítulo 1 al estudiar la flexión de una placa rectangular larga según una superficie cilíndrica. Aunque en tal estudio se tenía una flexión debida a cargas laterales, no había sólo tensiones de flexión, sino también tensiones tangenciales verticales actuando sobre secciones perpendiculares al eje *x*; puede deducirse de una comparación con la teoría ordinaria de vigas, que el efecto de los esfuerzos cortantes es despreciable en el caso de placas delgadas y las ecuaciones obtenidas para el caso de flexión pura pueden utilizarse con suficiente aproximación para el caso de cargas laterales.

12. *Energía de deformación en la flexión pura de placas*

Si una placa flexa sometida a momentos flectores M_x y M_y uniformemente distribuidos (fig. 19) de tal modo que los planos *xz* e *yz* son los

[1] Los primeros que indicaron esta transformación del sistema de fuerzas que actúa sobre los bordes fueron Lord Kelvin y P. G. Tait; véase *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1, parte II, pág. 203, 1883.

[2] Tales experiencias fueron hechas por A. Nádai, *Forschungsarb.*, vols. 170 y 171, Berlín, 1915; véase también su libro *Elastische Platten*, pág. 42, Berlín, 1925.

[3] Estamos siempre en la hipótesis de flechas pequeñas o, en otro caso, flexión según una superficie desarrollable. El caso de flexión según una superficie no desarrollable cuando las flechas no son pequeñas se estudiará más adelante (véase pág. 64).

planos principales de la deformada, la energía de deformación almacenada en un elemento tal como el indicado en la figura 20, se determina calculando el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ y $M_y dx$ sobre el elemento durante la flexión de la placa. Dado que las caras del elemento permanecen planas, el trabajo producido por los momentos $M_x dy$ se determina tomando la mitad del producto del momento y el ángulo entre las correspondientes caras del elemento después de la flexión. Puesto que $-\partial^2 w/\partial x^2$ representa la curvatura de la placa en el plano xz, el ángulo correspondiente a los momentos $m_x dy$ es $-(\partial^2 w/\partial x^2)dx$, y el trabajo producido por estos momentos es

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\, dy$$

Una expresión análoga se obtiene también para el trabajo producido por los momentos $M_y dx$. Por lo tanto el trabajo total, igual a la energía de deformación del elemento, es

$$dV = -\frac{1}{2}\left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dx\, dy$$

Sustituyendo los momentos por sus expresiones (37) y (38) la energía de deformación de los elementos viene dada en la forma siguiente

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] dx\, dy \qquad (a)$$

Siendo, en el caso de flexión pura, constante la curvatura en toda la superficie de la placa, la energía total de deformación de la placa se obtendrá sustituyendo el área elemental $dxdy$ por la superficie A de la placa en la expresión (a). Queda

$$V = \frac{1}{2} DA \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \qquad (47)$$

Si las direcciones x e y no coinciden con los planos principales de curvatura, actuarán sobre las caras del elemento (fig. 20) no sólo los momentos flectores $M_x dy$ y $M_y dx$ sino también los momentos torsores $M_{xy} dy$ y $M_{yx} dx$. La energía de deformación debida a los momentos flectores viene dada por la expresión (a). Para determinar la expresión de la energía de deformación debida a los momentos torsores $M_{xy} dy$ hay que notar que el correspondiente ángulo de giro es igual a la derivada de la pendiente $\partial w/\partial y$, respecto x, multiplicada por dx; de ahí que la energía de deformación debida a $M_{xy} dy$ es

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} dx\, dy$$

Librodot

que aplicando la ecuación (43) toma la forma

$$\frac{1}{2} D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 dx \, dy$$

La misma cantidad de energía producen los momentos $M_{xy} dx$ de modo que la energía de deformación debida a ambos momentos torsores es

$$D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 dx \, dy \qquad (b)$$

Puesto que la torsión no afecta al trabajo producido por los momentos flectores, la energía total de deformación de un elemento de placa se obtiene sumando la energía de flexión (*a*) y la energía de torsión (*b*). Así obtenemos

$$dV = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx \, dy + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 dx \, dy$$

o bien

$$dV = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \, dy \qquad (48)$$

La energía de deformación de toda la placa se obtiene ahora sustituyendo el área elemental *dxdy* por la superficie A de la placa. La expresión (48) se utilizará más adelante en casos más complicados de flexión de placas.

13. *Límites de aplicación de las fórmulas deducidas*

En el estudio de la distribución de tensiones en el caso de flexión pura (ap. 10) se ha supuesto que la superficie media es la superficie neutra de la placa. Esta condición sólo se cumple rigurosamente si la superficie media de la placa flexada es una *superficie desarrollable*. Considerando, por ejemplo, la flexión pura de una placa según una superficie cilíndrica, la única limitación de la aplicación de la teoría será el requisito de que el espesor sea pequeño en comparación con los radios de curvatura. En los problemas de flexión de placas según superficies cilíndricas debida a cargas laterales estudiados en el capítulo anterior, se ha exigido que las flechas fueran pequeñas en comparación con el ancho, puesto que sólo bajo esta condición es bastante aproximada a la expresión adoptada para la curvatura.

Si una placa flexa según una superficie no desarrollable la superficie media sufre deformaciones longitudinales durante la flexión y la teoría de la flexión pura que hemos desarrollado será suficientemente aproximada sólo si las tensiones correspondientes a este alargamiento de la superficie

Librodot

media son pequeñas en comparación con las máximas tensiones dadas por las ecuaciones (44) o, lo que es lo mismo, si la deformación en la superficie media es pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h/2r_{\min}$. Este requisito impone una nueva limitación a las flechas de la placa, a saber, que las flechas w de la placa sean pequeñas en comparación con su espesor h.

Para demostrarlo sea la flexión de una placa circular por momentos flectores M uniformemente distribuidos en el contorno. La deformada, para pequeñas flechas, es esférica con radio r definido por la ecuación (46). Sea AOB (fig. 26) una sección diametral de la placa circular flexada a su radio exterior antes de la flexión y δ la flecha en el centro. Supongamos primero que no hay alargamiento de la superficie media de la placa en dirección radial. En tal caso el arco OB debe ser igual al radio inicial

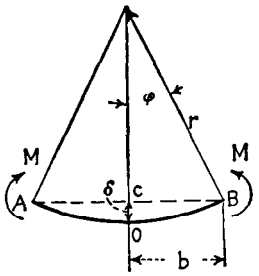


FIG. 26

exterior a. El ángulo φ y el radio b de la placa después de la flexión vienen dados por las relaciones

$$\varphi = \frac{a}{r} \qquad b = r \operatorname{sen} \varphi$$

Se ve que la flexión supuesta de la placa implica una deformación de compresión de la superficie media en la dirección de las circunferencias. El valor de esta deformación en el borde es

$$\epsilon = \frac{a - b}{a} = \frac{r\varphi - r \operatorname{sen} \varphi}{r\varphi} \tag{a}$$

Para pequeñas flechas se puede tomar

$$\operatorname{sen} \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6}$$

valor que sustituido en la ecuación (a) da

$$\epsilon = \frac{\varphi^2}{6} \tag{b}$$

Librodot

Para representar esta deformación en función de la flecha máxima δ, notemos que

$$\delta = r(1 - \cos \varphi) \approx \frac{r\varphi^2}{2}$$

De donde

$$\varphi^2 = \frac{2\delta}{r}$$

Sustituyendo en la ecuación (*b*) se obtiene finalmente

$$\epsilon = \frac{\delta}{3r} \tag{49}$$

Esto representa un límite superior para la deformación del borde de la placa en el sentido de la circunferencia. Esto se ha deducido en la hipótesis de que la deformación radial es nula. En las condiciones reales hay deformación radial y la compresión en el sentido de la circunferencia es menor[1] que la dada por la ecuación (49).

De este estudio se deduce que las ecuaciones obtenidas en el apartado 10, en la hipótesis de que la superficie media de la placa flexada es su superficie neutra, son suficientemente aproximadas siempre que la deformación dada por la ecuación (49) sea pequeña en comparación con la máxima deformación de flexión $h/2r$, o lo que es lo mismo, si la flecha δ es pequeña en comparación con el espesor h de la placa. Similar conclusión puede obtenerse para el caso más general de flexión pura de una placa en que las curvaturas principales no son iguales[2]. Generalizando estas conclusiones podemos afirmar que las ecuaciones del apartado 10 pueden aplicarse con suficiente aproximación siempre que las flechas de una placa desde su situación inicial plana o de forma de superficie desarrollable sean pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

14. *Tensiones térmicas en placas con bordes coaccionados*

La ecuación (46) para la flexión de una placa según una superficie esférica puede emplearse para calcular las tensiones térmicas en una placa para ciertos casos de calentamiento no uniforme. Supongamos que la variación de temperatura a través del espesor de la placa sigue una ley lineal y que la temperatura no varía en planos paralelos a las caras de la placa. En tal caso, midiendo la temperatura respecto a las de la superficie media, se puede afirmar que las dilataciones y contracciones son proporcionales a la distancia de la superficie media. Así se tienen exactamente las mismas condiciones que en la flexión pura de una placa según una superficie esférica[3]. Sea α el coeficiente de dilatación del material que forma la placa,

[1] Este punto se discutirá más adelante (véase ap. 96).
[2] Véase Kelvin y Tait, *Obra citada*, vol. 1, parte II, pág. 172.
[3] Se supone que las flechas son pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

y t la diferencia de temperatura entre las caras extremas de la placa. La diferencia entre la máxima dilatación térmica y la dilatación en la superficie media es $\alpha t/2$ y la curvatura resultante del calentamiento no uniforme puede hallarse por la ecuación

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{h}{2r} \tag{a}$$

de la cual se deduce

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha t}{h} \tag{50}$$

Esta flexión de la placa no produce tensiones siempre que los bordes estén libres y las flechas sean pequeñas en comparación con el espesor de la placa.

Supongamos ahora que el plano medio de la placa está libre para dilatarse, pero los bordes tienen impedido el giro. En tal caso el calentamiento no uniforme produce momentos flectores uniformemente distribuidos en los bordes de la placa. El valor de estos momentos es tal que elimine la curvatura producida por el calentamiento no uniforme [ec. (50)] ya que sólo así puede cumplirse la condición de bordes impedidos. Mediante la ecuación (46) de la curvatura producida por momentos flectores, se tiene para determinar el valor M del momento por unidad de longitud del contorno la ecuación[1].

$$\frac{M}{D(1+\nu)} = \frac{\alpha t}{h}$$

de donde

$$M = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} \tag{b}$$

Las correspondientes tensiones máximas pueden hallarse por las ecuaciones (44) y valen

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{6M}{h^2} = \frac{6\alpha t D(1+\nu)}{h^3}$$

Sustituyendo D por su expresión (3) se tiene finalmente

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{\alpha t E}{2(1-\nu)} \tag{51}$$

[1] El efecto de la flexión pura sobre la curvatura de la placa entera es así equivalente y de signo contrario al efecto del gradiente de temperatura. Ahora bien, si la placa permanece perfectamente plana, las condiciones de borde empotrado se satisfacen evidentemente para un contorno dado cualquiera. Igualmente, puesto que en nuestro caso los momentos flectores son iguales en cualquier punto y en cualquier dirección, los momentos de sujeción en cualquier contorno están siempre dados por la ecuación (*b*).

Librodot

Se ve que la tensión es proporcional al coeficiente de dilatación α, a la diferencia de temperatura t entre las dos caras de la placa y al módulo de elasticidad E. El espesor de la placa h no interviene en la fórmula (51), pero dado que la diferencia de temperatura ordinariamente aumenta proporcionalmente al espesor de la placa, puede afirmarse que son de esperar mayores tensiones térmicas en placas gruesas que en placas delgadas.

Librodot