TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
CAPÍTULO 3




Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

# TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
# CAPÍTULO 3

S. TIMOSHENKO
Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER
Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por
F. J. MEDINA SALANOVA
Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

# 3

# Flexión simétrica de placas circulares

## 15. *Ecuación diferencial de la flexión simétrica de placas circulares bajo carga transversal*[1]

Si la carga que actúa sobre una placa circular está simétricamente distribuida respecto al eje perpendicular a esta que pasa por su centro, la deformada del plano medio de la placa flexada es también simétrica.

Las flechas serán idénticas en todos los puntos equidistantes del centro de la placa y es suficiente considerar las flechas en una sección principal que pase por el eje de simetría (fig. 27). Sea $O$ el origen de coordenadas en el centro de la placa no flexada y sean $r$ las distancias radiales de los puntos del plano medio y $w$ sus flechas dirigidas hacia abajo. La pendiente máxima

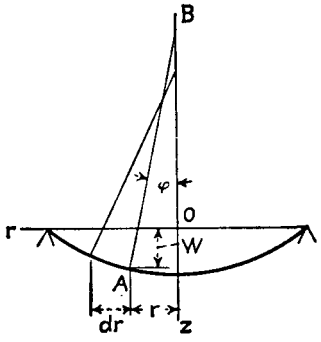



FIG. 27

[1] Las soluciones de estos problemas fueron dadas por Poisson; véase *Memorials the Academy*, vol. 8, París, 1829.

de la deformada en cualquier punto $A$ es igual a $-dw/dr$ y la curvatura de la superficie media de la placa en la sección diametral $rz$ es, para pequeñas flechas

$$\frac{1}{r_n} = -\frac{d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \qquad (a)$$

donde $\varphi$ es el ángulo pequeño que forman la normal a la deformada en $A$ y el eje de simetría $OB$. Por razón de la simetría se deduce que $1/r_n$ es una de las curvaturas principales de la deformada en $A$. La segunda curvatura principal está situada en la sección que pasa por la normal $AB$ y es perpendicular al plano $rz$. Viendo que las normales tales como $AB$, para todos los puntos de la superficie media situados a una distancia $r$, forman una superficie cónica de vértice $B$, se puede decir entonces que $AB$ es el radio de la segunda curvatura principal $r_t$. De donde según la figura 27

$$\frac{1}{r_t} = -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r} \qquad (b)$$

Conociendo las expresiones $(a)$ y $(b)$ de las curvaturas principales, se pueden obtener los valores correspondientes de los momentos flectores, suponiendo que las relaciones (37) y (38), calculadas para la flexión pura, son también válidas para estos momentos y curvaturas[1]. Utilizando estas relaciones se obtiene

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right) \qquad (52)$$

$$M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right) \qquad (53)$$

donde, como anteriormente, $M_r$ y $M_t$ representan los momentos flectores por unidad de longitud. El momento $M_r$ actúa a lo largo de las secciones circulares de la placa, tales como la sección obtenida por el cono de vértice $B$, y $M_t$ a lo largo de la sección diametral $rz$ de la placa.

Las ecuaciones (52) y (53) no contienen más que una variable, $w$ o $\varphi$, que puede determinarse considerando un elemento en equilibrio de la placa, sea $abcd$ (fig. 28) separado de la placa por dos secciones cilíndricas $ab$ y $cd$ y por dos secciones diametrales $ad$ y $bc$. El momento que actúa sobre $cd$ es

$$M_r r\, d\theta \qquad (c)$$

[1] Se desprecia, en este caso, la influencia sobre las deformaciones de las tensiones tangenciales que actúan sobre las secciones de la placa perpendiculares a los meridianos tales como la sección por la superficie cónica de vértice $B$. Su efecto es pequeño en el caso de placas de espesor pequeño con relación al diámetro. Este caso se estudia en el apartado 20. Las tensiones perpendiculares a la superficie de la placa son también despreciables, esto es, justificable en todos los casos en que la carga no está muy concentrada (véase pág. 89).



Librodot

El momento correspondiente a *ab* es:

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta \qquad (d)$$

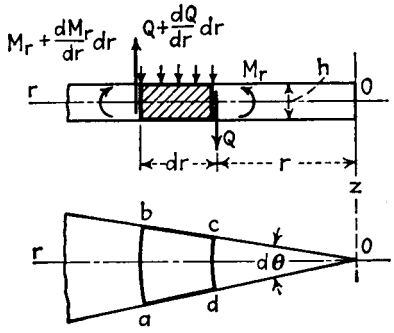



FIG. 28

Los momentos de los lados *ad* y *bc* son los dos iguales a $M_t dr$ y dan un momento resultante en el plano $rOz$, igual a

$$M_t dr\,d\theta \qquad (e)$$

Por razón de simetría se puede llegar a la conclusión de que los esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento, se anulan en las secciones diametrales de la placa pero persisten en las secciones cilíndricas tales como *cd* y *ab*. Sea *O* el esfuerzo cortante por unidad de longitud de la sección cilíndrica de radio *r*, la fuerza total debida al esfuerzo cortante sobre el lado *cd* del elemento es $Qrd\theta$ y la fuerza correspondiente sobre *ab* es

$$\left[Q + \left(\frac{dQ}{dr}\right)dr\right](r + dr)\,d\theta$$

Despreciando la pequeña diferencia entre los esfuerzos cortantes sobre los lados opuestos del elemento, se puede afirmar que estas fuerzas dan un momento en el plano *rz*, igual a

$$Qr\,d\theta\,dr \qquad (f)$$

Sumando con los signos convenientes, los momentos (*c*), (*d*), (*e*), (*f*) y despreciando el momento producido por la carga exterior, por ser un infinitésimo de orden superior, se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento *abcd*

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\theta - M_r r\,d\theta - M_t\,dr\,d\theta + Qr\,d\theta\,dr = 0$$

de donde se deduce, despreciando los infinitésimos de orden superior

$$M_r + \frac{dM_r}{dr}\,r - M_t + Qr = 0 \qquad (g)$$



Librodot

Sustituyendo $M_r$ y $M_t$ por sus valores en las ecuaciones (52) y (53) la ecuación ($g$) deberá ser

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\frac{Q}{D} \tag{54}$$

o también

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D} \tag{55}$$

El esfuerzo cortante $Q$ se calcula fácilmente, en cada caso particular de placa circular simétricamente cargada, dividiendo la carga distribuida en el círculo de radio $r$ por $2\pi r$; se determina entonces la pendiente $\varphi$ y la flecha $w$ de la placa mediante las ecuaciones (54) y (55). La integración de estas ecuaciones se simplifica escribiéndolas en la forma

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi)\right] = -\frac{Q}{D} \tag{56}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{Q}{D} \tag{57}$$

Si $Q$ se expresa en función de $r$, la integración de estas ecuaciones puede hacerse sin dificultad en cada caso particular.

A veces es preferible representar el segundo miembro de la ecuación (57) en función de la intensidad $q$ de la carga repartida sobre la placa. Para ello, se multiplican ambos miembros de la ecuación por $2\pi r$, teniendo en cuenta que

$$Q2\pi r = \int_0^r q2\pi r\, dr$$

se obtiene

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{1}{D}\int_0^r qr\, dr$$

Derivando los dos miembros de la ecuación con relación a $r$ y dividiendo por $r$, se tiene

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q}{D} \tag{58}$$

Si $q$ es una función de $r$, la integración de esta ecuación no ofrece ninguna dificultad.

### *16. Placa circular uniformemente cargada*

Si una placa circular de radio $a$ soporta una carga de intensidad $q$ uniformemente repartida sobre toda su superficie, el valor del esfuerzo cortante $Q$, a una distancia $r$ del centro de la placa es determinado por

$$2\pi rQ = \pi r^2 q$$

de donde

$$Q = \frac{qr}{2} \tag{a}$$

Sustituyendo en (57), se obtiene

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{qr}{2D} \tag{b}$$

Una primera integración da

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{qr^2}{4D} + C_1 \tag{c}$$

donde $C_1$ es una constante de integración que se determina posteriormente a partir de las condiciones en el centro y en el contorno de la placa. Multiplicando los dos miembros de (*c*) por $r$ e integrando por segunda vez, se obtiene:

$$r\frac{dw}{dr} = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

y

$$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \tag{59}$$

y una nueva integración da

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \ln\frac{r}{a} + C_3 \tag{60}$$

Calculemos las constantes de integración para diferentes casos particulares.

*Placa circular de borde empotrado.* En este caso, la pendiente de la superficie flexada en la dirección radial es nula para $r = 0$ y $r = a$.

Por consiguiente, de (59) se deduce

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}\right)_{r=0} = 0$$

$$\left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}\right)_{r=a} = 0$$

De la primera de estas ecuaciones, se deduce $C_2 = 0$.



Librodot

Sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$C_1 = -\frac{qa^2}{8D}$$

La ecuación (59) de la pendiente deberá ser con estos valores

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D}(a^2 - r^2) \tag{61}$$

La ecuación (60) da

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2r^2}{32D} + C_3 \tag{d}$$

En el contorno de la placa la flecha es nula. Por consiguiente

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^4}{32D} + C_3 = 0$$

y se obtiene

$$C_3 = \frac{qa^4}{64D}$$

Sustituyendo en (*d*) se encuentra,

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)^2 \tag{62}$$

La flecha máxima se produce en el centro de la placa y según la ecuación (62) es

$$w_{max} = \frac{qa^4}{64D} \tag{e}$$

Esta flecha es igual a tres octavos de la flecha de una franja uniformemente cargada de extremos empotrados, cuya rigidez a la flexión es $D$, la anchura, igual a la unidad y la longitud igual al diámetro de la placa circular.

Se calculan los momentos flectores $M_x$ y $M_t$ a partir del valor de la pendiente [v. ec. (61)]; mediante las ecuaciones (52) y (53) se deduce

$$M_r = \frac{q}{16}[a^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)] \tag{63}$$

$$M_t = \frac{q}{16}[a^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)] \tag{64}$$

Haciendo $r = a$ en estas ecuaciones, se encuentran los momentos flectores en el contorno de la placa

$$(M_r)_{r=a} = -\frac{qa^2}{8} \qquad (M_t)_{r=a} = -\frac{\nu qa^2}{8} \tag{65}$$

En el centro de la placa, $r = 0$ y

$$M_r = M_t = \frac{qa^2}{16}(1 + \nu) \tag{66}$$

En las ecuaciones (65) y (66) se ve que la tensión máxima se produce en el contorno, donde se tiene

$$(\sigma_r)_{máx} = -\frac{6M_r}{h^2} = \frac{3}{4}\frac{qa^2}{h^2} \qquad (f)$$

La figura 29 muestra la variación de las tensiones $\sigma_r$ y $\sigma_t$ que actúan sobre la cara inferior de la placa, a lo largo del radio de ésta.

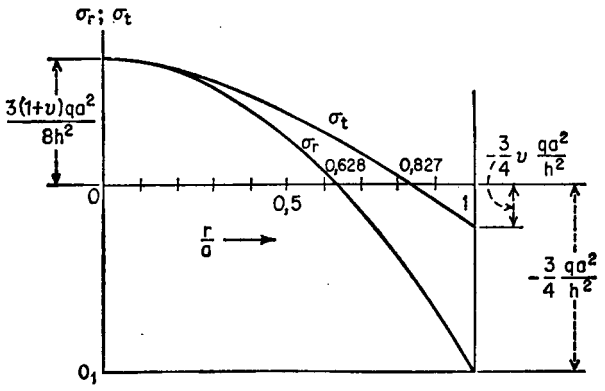



FIG. 29

*Placa circular de borde apoyado*

En este caso para calcular las flechas se aplica el método de superposición. Se ha visto que en el caso de extremos empotrados se obtienen los momentos flectores negativos $M_r = -qa^2/8$ que actúan a lo largo del contorno [fig. 30 *a*)]. Si se combina este caso con el de flexión pura indicado en la figura 30 *b*), se eliminarán los momentos flectores $M_r$ en el contorno obteniendo entonces la flexión de una placa apoyada en el con-

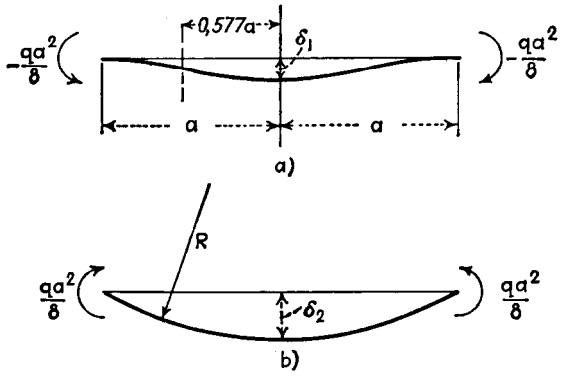



FIG. 30

torno. La deformada en el caso de una flexión pura, debida a los momentos $qa^2/8$ se obtiene a partir de las ecuaciones (46) o ($e$) de las páginas 59 y 60 y es

$$w = \frac{qa^2}{16D(1 + \nu)} (a^2 - r^2)$$

Sumando esta flecha a las flechas (62) de una placa empotrada, se encuentra entonces para una placa de contorno simplemente apoyado

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - r^2 \right) \tag{67}$$

Anulando $r$ en esta expresión, obtenemos la flecha en el centro de la placa

$$w_{\text{máx}} = \frac{(5 + \nu)qa^4}{64(1 + \nu)D} \tag{68}$$

Para $\nu = 0{,}3$, la flecha es aproximadamente cuatro veces mayor que la de una placa de borde empotrado. Para calcular los momentos flectores en este caso se debe sumar el momento flector constante $qa^2/8$ a los momentos (63) y (64). Por consiguiente, en el caso de borde apoyado

$$M_r = \frac{q}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2) \tag{69}$$

$$M_t = \frac{q}{16} [a^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)] \tag{70}$$

El momento flector máximo se encuentra en el centro de la placa donde

$$M_r = M_t = \frac{3 + \nu}{16} qa^2$$

La tensión máxima correspondiente es

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = (\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3(3 + \nu)qa^2}{8h^2} \tag{71}$$

Para obtener la tensión máxima a cualquier distancia $r$ del centro, se debe sumar a la tensión calculada para la plca empotrada, el valor constante

$$\frac{6}{h^2} \frac{qa^2}{8}$$

correspondiente a la flexión pura indicada en la figura 30 *b*). Se obtiene la misma tensión de la figura 29, midiendo las ordenadas a partir del eje horizontal que pasa por $O_1$. Puede verse entonces que se obtiene un mejor reparto de tensiones en la placa empotrando el contorno.

### 17. *Placa circular con agujero circular en el centro*

Estudiemos ahora la flexión de una placa sometida a los momentos $M_1$ y $M_2$ uniformemente repartidas a lo largo de los contornos interior y exterior (fig. 31). En este caso, el esfuerzo cortante $Q$ se anula y la ecuación (57) toma la forma

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = 0$$

Integrando dos veces esta ecuación, se tiene

$$-\frac{dw}{dr} = \varphi = \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \qquad (a)$$

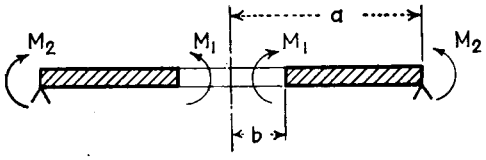



FIG. 31

Una tercera integración nos da la flecha

$$w = -\frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln\frac{r}{a} + C_3 \qquad (b)$$

Se determinan ahora las constantes de integración mediante las condiciones de contorno. Sustituyendo ($a$) en (52), hallamos

$$M_r = D\left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \nu\left(\frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2}\right)\right] \qquad (c)$$

Este momento debe ser igual a $M_1$ para $r = b$ y a $M_2$ para $r = a$. Por consiguiente las ecuaciones que determinan $C_1$ y $C_2$ son

$$D\left[\frac{C_1}{2}(1+\nu) - \frac{C_2}{b^2}(1-\nu)\right] = M_1$$
$$D\left[\frac{C_1}{2}(1+\nu) - \frac{C_2}{a^2}(1-\nu)\right] = M_2$$

de donde

$$C_1 = \frac{2(a^2M_2 - b^2M_1)}{(1+\nu)D(a^2-b^2)} \qquad C_2 = \frac{a^2b^2(M_2 - M_1)}{(1-\nu)D(a^2-b^2)} \qquad (d)$$

Para determinar la constante $C_3$ de la ecuación ($b$) hay que tener en cuenta las flechas en el contorno de la placa. Supongamos, por ejemplo,

que la placa está apoyada a lo largo del contorno exterior (fig. 31). Entonces $w = 0$ para $r = a$ y a partir de $(b)$ se encuentra

$$C_3 = \frac{C_1 a^2}{4} = \frac{a^2(a^2 M_2 - b^2 M_1)}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)}$$

En el caso particular en que $M_2 = 0$, se tiene:

$$C_1 = -\frac{2b^2 M_1}{(1 + \nu)D(a^2 - b^2)} \qquad C_2 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{(1 - \nu)D(a^2 - b^2)}$$

$$C_3 = -\frac{a^2 b^2 M_1}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)}$$

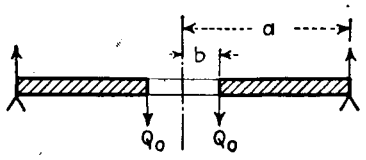



FIG. 32

y las expresiones $(a)$ y $(b)$ de la pendiente y de la flecha toman la forma

$$\frac{dw}{dr} = \frac{a^2 b^2 M_1}{D(1 - \nu)(a^2 - b^2)} \left( \frac{1}{r} + \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{r}{a^2} \right) \tag{72}$$

$$w = -\frac{b^2 M_1}{2(1 + \nu)D(a^2 - b^2)} (a^2 - r^2) + \frac{a^2 b^2 M_1}{(1 - \nu)D(a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{a} \tag{73}$$

Consideremos ahora el caso de la flexión de una placa sometida a esfuerzos cortantes $Q_0$ uniformemente repartidos a lo largo del contorno interior (fig. 32). El esfuerzo cortante por unidad de longitud de una circunferencia de radio $r$ es

$$Q = \frac{Q_0 b}{r} = \frac{P}{2\pi r}$$

donde $P = 2\pi b Q_0$ representa la carga total aplicada al contorno interior de la placa. Sustituyendo en (57) e integrando, se obtiene

$$\frac{dw}{dr} = \frac{Pr}{8\pi D} \left( 2 \ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r}{2} - \frac{C_2}{r} \tag{e}$$

y

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \left( \ln \frac{r}{a} - 1 \right) - \frac{C_1 r^2}{4} - C_2 \ln \frac{r}{a} + C_3 \tag{f}$$

y se calculan las constantes de integración mediante las condiciones de contorno. Suponiendo que la placa está simplemente apoyada sobre el contorno exterior, se tiene:

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0 \tag{g}$$

y para el contorno interior

$$-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=b}=0 \qquad (h)$$

Sustituyendo las expresiones $(e)$ y $(f)$ en las ecuaciones $(g)$ y $(h)$, se encuentra

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{4\pi D}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\right)\\ C_2 &= -\frac{(1+\nu)P}{(1-\nu)4\pi D}\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a} \qquad (i)\\ C_3 &= \frac{Pa^2}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores de las constantes en las ecuaciones $(e)$ y $(f)$ se halla la pendiente y la flecha en todo punto de la placa de la figura 32. Para la pendiente en el contorno interior que nos será útil para lo siguiente, se encuentra

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b}=\frac{Pb}{8\pi D}\left[2\ln\frac{b}{a}-1-\frac{1-\nu}{1+\nu}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right] \qquad (j)$$

En el límite, para $b$ infinitamente pequeño, $b^2 \ln (b/a)$ tiende a cero, y las constantes de integración toman los valores

$$C_1=\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{P}{4\pi D} \qquad C_2=0 \qquad C_3=\frac{Pa^2}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)$$

Sustituyendo estos valores en $(f)$ tenemos

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2-r^2)+r^2\ln\frac{r}{a}\right] \qquad (k)$$

Valor que coincide con el de la flecha de una placa sin agujero cargada en su centro [v. ec. (89) pág. 87]. Así pues un agujero muy pequeño en el centro no modifica la flecha de la placa.

Combinando las cargas de las figuras 31 y 32, se obtiene la solución en el caso de una placa empotrada a lo largo de su contorno interior y uniformemente cargada sobre el contorno exterior (fig. 33). Puesto que la pendiente es nula sobre el contorno empotrado, se utilizan las expresiones (72) y $(j)$ para determinar la ecuación del momento flector $M_1$ sobre el contorno empotrado

$$-\frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{b}{a^2}\right)=\frac{Pb}{8\pi D}\left[2\ln\frac{b}{a}-1-\frac{1-\nu}{1+\nu}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right]$$

de donde se deduce

$$M_1 = \frac{P}{4\pi\left[(1+\nu)\frac{a^2}{b^2} + 1 - \nu\right]}\left[(1-\nu)\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) + 2(1+\nu)\frac{a^2}{b^2}\ln\frac{a}{b}\right] \tag{74}$$

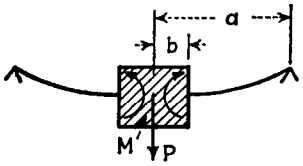



FIG. 33

Conociendo $M_1$, se obtienen las flechas de la placa sumando miembro a miembro (73) y (*f*) que las constantes de integración están dadas por las expresiones (*i*).

Aplicando el mismo procedimiento de superposición se obtiene la solución del caso de la figura 34, en que la placa está apoyada en su contorno exterior y soporta una carga uniformemente repartida. En este caso, utilizamos la solución encontrada en el apartado anterior para una placa sin agujero. Considerando la sección de esta placa por una superficie cilíndrica de radio $b$ y perpendicular a la placa, consta que a lo largo de esta sección actúa un esfuerzo cortante $Q = \pi q b^2/2\pi b = qb/2$ y un momento flector de intensidad [v. ec. (69)].

$$M_r = \frac{q}{16}(3+\nu)(a^2 - b^2)$$

Por consiguiente para obtener las tensiones y las flechas para el caso de la figura 34, se suman las tensiones y las flechas obtenidas para la placa sin agujero a las tensiones y a las flechas producidas por el momento flector y los esfuerzos cortantes indicados en la figura 35. Estos últimos valores se deducen de las expresiones (72), (73), (*e*) y (*f*) teniendo cuidado, en cuanto a los signos de los esfuerzos cortantes y de los momentos.

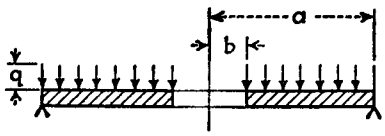



FIG. 34

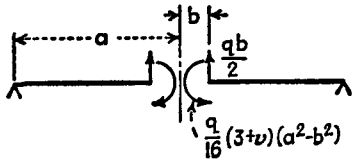



FIG. 35

En la figura 36 se han representado varios casos que tienen una importancia práctica. En todos estos casos la tensión máxima está dada por una fórmula del tipo

$$\sigma_{máx} = k\frac{qa^2}{h^2} \quad \text{o} \quad \sigma_{máx} = \frac{kP}{h^2} \tag{75}$$

según que la carga aplicada esté uniformemente repartida sobre la superficie o concentrada a lo largo del contorno. La tabla 3 da los valores numéricos del factor $R$, calculados[1] para varios valores de la relación $a/b$ y para el coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}3$.

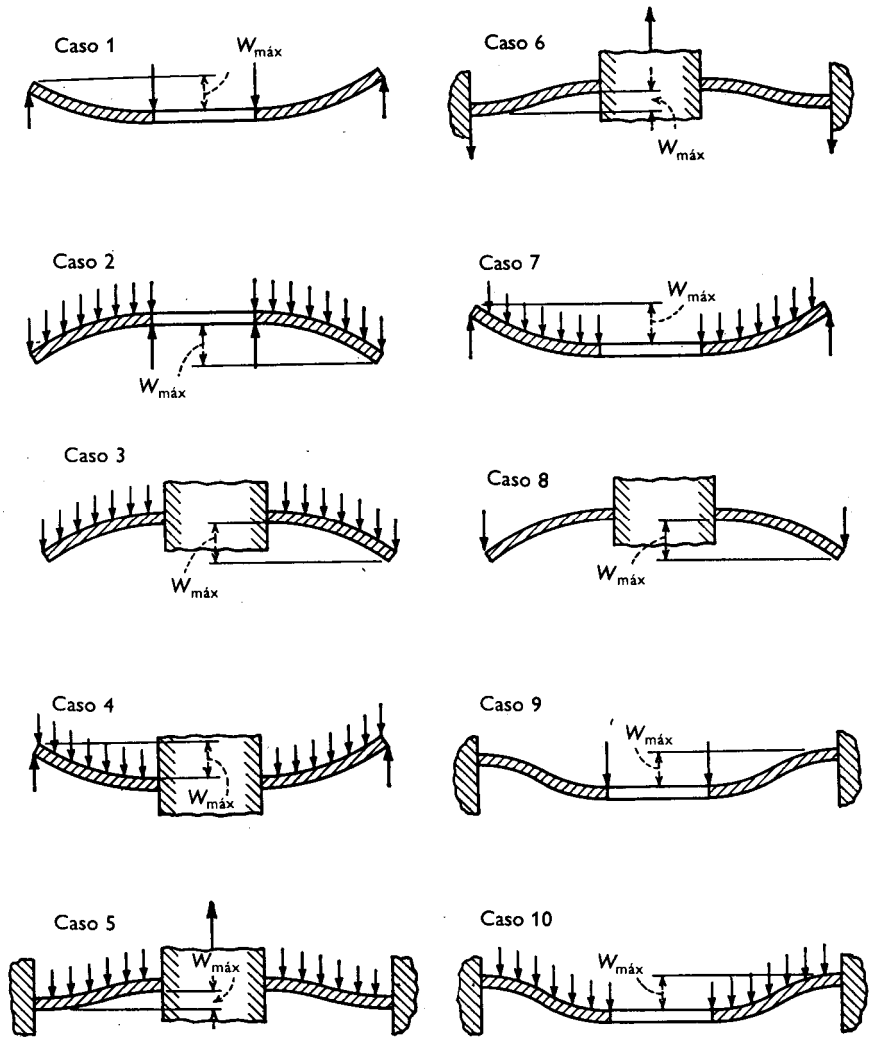



FIG. 36

[1] Los cálculos para los casos 1 al 8, ambos inclusive, fueron efectuados por A. M. Wahl y G. Lobo, *Trans. ASME*, vol. 52, 1930. Se encuentran los datos suplementarios concernientes a las placas circulares simétricamente cargadas con o sin agujero en K. Beyer, *Die Statik im Stahlbetonbau*, 2.ª ed., pág. 52, Berlín, 1948.

TABLA 3

Coeficientes $k$ y $k_1$ en las ecuaciones (75) y (76) para los diez casos indicados en la figura 36

| $a/b$ = | 1,25 | | 1,5 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Caso | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k_1$ |
| 1 | 1,10 | 0,341 | 1,26 | 0,519 | 1,48 | 0,672 | 1,88 | 0,734 | 2,17 | 0,724 | 2,34 | 0,704 |
| 2 | 0,66 | 0,202 | 1,19 | 0,491 | 2,04 | 0,902 | 3,34 | 1,220 | 4,30 | 1,300 | 5,10 | 1,310 |
| 3 | 0,135 | 0,00231 | 0,410 | 0,0183 | 1,04 | 0,0938 | 2,15 | 0,293 | 2,99 | 0,448 | 3,69 | 0,564 |
| 4 | 0,122 | 0,00343 | 0,336 | 0,0313 | 0,74 | 0,1250 | 1,21 | 0,291 | 1,45 | 0,417 | 1,59 | 0,492 |
| 5 | 0,090 | 0,00077 | 0,273 | 0,0062 | 0,71 | 0,0329 | 1,54 | 0,110 | 2,23 | 0,179 | 2,80 | 0,234 |
| 6 | 0,115 | 0,00129 | 0,220 | 0,0064 | 0,405 | 0,0237 | 0,703 | 0,062 | 0,933 | 0,092 | 1,13 | 0,114 |
| 7 | 0,592 | 0,184 | 0,976 | 0,414 | 1,440 | 0,664 | 1,880 | 0,824 | 2,08 | 0,830 | 2,19 | 0,813 |
| 8 | 0,227 | 0,00510 | 0,428 | 0,0249 | 0,753 | 0,0877 | 1,205 | 0,209 | 1,514 | 0,293 | 1,745 | 0,350 |
| 9 | 0,194 | 0,00504 | 0,320 | 0,0242 | 0,454 | 0,0810 | 0,673 | 0,172 | 1,021 | 0,217 | 1,305 | 0,238 |
| 10 | 0,105 | 0,00199 | 0,259 | 0,0139 | 0,480 | 0,0575 | 0,657 | 0,130 | 0,710 | 0,162 | 0,730 | 0,175 |

En los mismos casos, las flechas máximas están dadas por las fórmulas del tipo

$$w_{\text{máx}} = k_1 \frac{qa^4}{Eh^3} \quad \text{o} \quad w_{\text{máx}} = k_1 \frac{Pa^2}{Eh^3} \tag{76}$$

Los coeficientes $R_1$ se encuentran también en la tabla 3.

Cuando el cociente $a/b$ tiende a uno, los valores de $R$ y $R_1$ en (75) y (76) puede obtenerse con una exactitud suficiente considerando una franja radial como una viga con las mismas condiciones en los límites y de carga que la placa considerada.

La influencia de los momentos $M_t$ sobre la flexión es totalmente despreciada.

### *18. Placa circular cargada concéntricamente*

Comencemos por el caso de una placa simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida a lo largo de un círculo de radio $b$ [fig. 37 *a*)]. Dividiendo la placa en dos partes [fig. 37 *b*) y *c*)], se ve que la

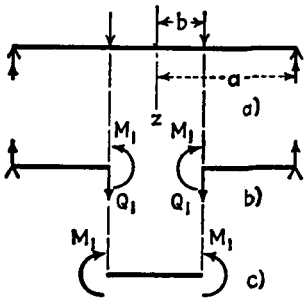



FIG. 37

parte interior de la placa está en las condiciones de flexión pura producida por los momentos $M_1$ uniformemente repartidos y que la parte exterior está flexada por los momentos $M_1$ y los esfuerzos cortantes $Q_1$. Sea $P$ la carga total aplicada, se encuentra que

$$Q_1 = \frac{P}{2\pi b} \tag{a}$$

El valor de $M_1$ se determina por la condición de continuidad a lo largo del círculo $r = b$, de donde se deduce que las dos partes de la placa tienen la misma pendiente en esta circunferencia. Las ecuaciones (72) y (*j*) del apartado 17, dan la pendiente para el contorno interior de la parte exterior de la placa, se tiene

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{a^2b^2M_1}{D(1-\nu)(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{b}{a^2}\right) + \frac{Pb}{8\pi D}\left[2\ln\frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right] \tag{b}$$

La parte interior de la placa está flexada según una superficie esférica cuya curvatura está dada por la ecuación (46). La pendiente correspondiente en el contorno es

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = -\frac{M_1 b}{D(1+\nu)} \tag{c}$$

Igualando (*b*) y (*c*) se obtiene

$$M_1 = \frac{(1-\nu)P(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P\ln\frac{b}{a}}{4\pi} \tag{d}$$

Sustituyendo esta expresión de $M_1$ en (73), obtenemos las flechas $M_1$ de la parte exterior de la placa debido a $M_1$. Las flechas debidas a las fuerzas $Q_1$ se obtienen mediante la ecuación (*f*) del apartado anterior. Sumando estas flechas, se encuentra para la parte exterior de la placa

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[(a^2-r^2)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) + (b^2+r^2)\ln\frac{r}{a}\right] \tag{77}$$

Sustituyendo $r = b$ en esta ecuación, se obtiene la flecha bajo la carga.

$$(w)_{r=b} = \frac{P}{8\pi D}\left[(a^2-b^2)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) + 2b^2\ln\frac{b}{a}\right] \tag{e}$$

Para hallar las flechas de la parte interior de la placa, se suman las flechas (*e*) a las debidas a la flexión pura de esta parte de la placa.

Se obtiene así

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[(a^2 - b^2)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{a^2-b^2}{a^2}\right) + 2b^2 \ln \frac{b}{a}\right]$$
$$+ \frac{b^2 - r^2}{2D(1+\nu)}\left[\frac{(1-\nu)P(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P \ln \frac{b}{a}}{4\pi}\right]$$
$$= \frac{P}{8\pi D}\left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + (a^2 - r^2)\frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)b^2}{2(1+\nu)a^2}\right]$$
$$= \frac{P}{8\pi D}\left[(b^2 + r^2) \ln \frac{b}{a} + (a^2 - b^2)\frac{(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2}{2(1+\nu)a^2}\right] \qquad (78)$$

Si el contorno exterior de la placa está empotrado, la flecha de la placa se obtiene sumando las flechas (77) y (78) a las flechas producidas por los momentos flectores $M_2$ uniformemente repartidos a lo largo del contorno exterior de la placa (fig. 38) y de tal valor que la pendiente de la superficie

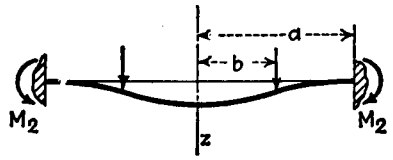



FIG. 38

flexada, en el borde sea nula. De la ecuación (77) se deduce la pendiente en el contorno de una placa simplemente apoyada.

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = -\frac{P}{4\pi D}\frac{1}{1+\nu}\frac{a^2-b^2}{a} \qquad (f)$$

La pendiente debida a los momentos $M_2$ es

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{M_2 a}{D(1+\nu)} \qquad (g)$$

Igualando a cero la suma de las expresiones $(f)$ y $(g)$, se obtiene

$$M_2 = \frac{P}{4\pi}\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

Las flechas debidas a este momento son

$$w = \frac{M_2}{D(1+\nu)}\frac{r^2-a^2}{2} = \frac{P}{8\pi D(1+\nu)}\frac{a^2-b^2}{a^2}(r^2 - a^2) \qquad (h)$$

Sumando estas flechas a las obtenidas en (77) y (78), tenemos entonces las flechas para la parte exterior de la placa de bordes empotrados

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[(a^2 - r^2)\frac{a^2+b^2}{2a^2} + (b^2 + r^2) \ln \frac{r}{a}\right] \qquad (79)$$

y para la parte interior

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[(b^2 + r^2)\ \ln\ \frac{b}{a} + r^2 - b^2 + \frac{(a^2 - r^2)(a^2 + b^2)}{2a^2}\right]$$

$$= \frac{P}{8\pi D}\left[(b^2 + r^2)\ \ln\ \frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2}\right] \tag{80}$$

Conociendo las flechas en el caso de cargas uniformemente repartidas a lo largo de un círculo concéntrico, se puede resolver por el método de superposición todo problema de flexión de placa circular simétricamente cargada respecto al centro.

Consideremos, por ejemplo, el caso en que la carga está uniformemente repartida en la parte de la placa, interior a un círculo de radio $c$ (fig. 39). Para obtener la flecha en todo punto de la placa no cargada ($a > r > c$), se utiliza la ecuación (77). La flecha, producida por una carga elemental repartida sobre un anillo de radio $b$ y de anchura $db$ (v. fig. 39) se obtiene

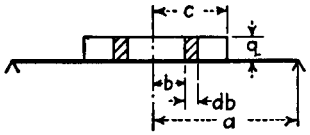



FIG. 39

sustituyendo $P = 2\pi bq\ db$ en (77), donde $q$ designa la intensidad de la carga uniforme. Integrando respecto a $b$ la expresión así obtenida, se obtiene la flecha

$$w = \frac{q}{4D}\int_0^c \left\{(a^2 - r^2)\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} + r^2\ \ln\ \frac{r}{a} + b^2\left[\ln\ \frac{r}{a} - \frac{(1 - \nu)(a^2 - r^2)}{2(1 + \nu)a^2}\right]\right\} b\ db$$

$$= \frac{qc^2}{8D}\left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)}(a^2 - r^2) + r^2\ \ln\ \frac{r}{a}\right] + \frac{qc^4}{16D}\left[\ln\ \frac{r}{a} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)}\frac{a^2 - r^2}{a^2}\right]$$

o bien, sustituyendo la carga total $\pi c^2 q$ por $P$,

$$w = \frac{P}{16\pi D}\left\{\frac{3 + \nu}{1 + \nu}(a^2 - r^2) + 2r^2\ \ln\ \frac{r}{a} + c^2\left[\ln\ \frac{r}{a} - \frac{1 - \nu}{2(1 + \nu)}\frac{a^2 - r^2}{a^2}\right]\right\} \tag{81}$$

Para calcular la flecha en el centro se utiliza la ecuación (78) en donde se sustituye $r$ por 0 y $P$ por $2\pi bq\,db$, integrando se obtiene

$$(w)_{r=0} = \frac{q}{4D}\int_0^c \left[b^2 \ln\frac{b}{a} + \frac{a^2-b^2}{2}\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\right)\right] b\,db$$
$$= \frac{P}{16\pi D}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}a^2 + c^2 \ln\frac{c}{a} - \frac{7+3\nu}{4(1+\nu)}c^2\right] \qquad (82)$$

donde $P = \pi c^2 q$

El momento flector máximo se sitúa en el centro y se calcula mediante (*d*).

Sustituyendo $P$ por $2\pi bq\,db$ en esta ecuación e integrando, tendremos

$$M_{\text{máx}} = q\int_0^c \left(\frac{1-\nu}{4}\frac{a^2-b^2}{a^2} - \frac{1+\nu}{2}\ln\frac{b}{a}\right) b\,db$$
$$= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{c} + 1 - \frac{(1-\nu)c^2}{4a^2}\right] \qquad (83)$$

donde, como antes, $P$ representa la carga total $\pi c^2 q$[1].

Los momentos flectores $M_r$ y $M_t$, en cualquier punto de la parte de la placa no cargada, se calculan mediante la ecuación (81). Sustituyendo esta expresión en las fórmulas generales (52) y (53) encontramos

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\ln\frac{a}{r} + \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) \qquad (84)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{r} + 1 - \nu\right] - \frac{(1-\nu)Pc^2}{16\pi}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{a^2}\right) \qquad (85)$$

Los valores máximos de estos momentos se producen en el círculo $r = c$, donde:

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\ln\frac{a}{c} + \frac{(1-\nu)P(a^2-c^2)}{16\pi a^2} \qquad (86)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{c} + 1 - \nu\right] - \frac{(1-\nu)P(a^2+c^2)}{16\pi a^2} \qquad (87)$$

Se puede utilizar el mismo método de cálculo de las flechas y de los momentos para toda clase de placa circular simétricamente cargada.

Se calcula asimismo la flecha del centro de cualquier placa cargada no simétricamente siguiendo las consideraciones siguientes.

A causa de la simetría total de la placa y de las condiciones en los límites, la flecha en el centro, debida a una carga única $P$, no depende más que del valor de esta carga y de su distancia al centro de la placa. Esta flecha queda invariable, si la carga $P$ se desplaza, quedando a la misma distancia del centro. La flecha no cambia si la carga $P$ es sustituida por varias cargas cuya resultante sea $P$ y situadas sobre el círculo descrito anteriormente por $P$. De aquí se deduce que para calcular la flecha de la

[1] Esta expresión se aplica solamente cuando $c$ es al menos varias veces $h$. En el apartado 19 se estudiará el caso en que $c$ es muy pequeño.

placa en el centro, se puede sustituir una carga única $P$ por una carga $P$ uniformemente repartida a lo largo de un círculo en el que el radio es igual a la distancia del centro la carga concentrada. Para una carga uniformemente repartida a lo largo de un círculo de radio $b$, la flecha en el centro de la placa apoyada en el contorno, viene dada por la ecuación (78), y es

$$(w)_{r=0} = \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2 - b^2) - b^2 \ln \frac{a}{b}\right] \qquad (i)$$

Esta es la fórmula de la flecha en el centro de una placa producida por una carga única $P$ situada a una distancia $b$ del centro. A partir de esta fórmula se puede calcular la flecha en el centro para toda clase de carga utilizando el método de superposición[1].

Las flechas y las tensiones, en una placa circular con o sin orificio, pueden ser eficazmente reducidas reforzando la placa por nervios concéntricos[2] o radiales. De todas formas, en este último caso la distribución de tensiones no es ya simétrica con respecto al centro de la placa.

### *19. Placa circular cargada en el centro*

Se obtiene la solución del problema de una carga concentrada en el centro de una placa, a partir del estudio del apartado 18, suponiendo que el radio $c$ del círculo, en el cual está repartida la carga, se hace infinitamente pequeño en tanto que la carga total $P$ queda finita. Con esta hipótesis, se encuentra que la flecha máxima en el centro de una placa simplemente apoyada, es, según (82),

$$w_{\text{máx}} = \frac{(3+\nu)Pa^2}{16\pi(1+\nu)D} \qquad (88)$$

La flecha en todo punto de la placa, a una distancia $r$ del centro es, según (81)

$$w = \frac{P}{16\pi D}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}(a^2 - r^2) + 2r^2 \ln \frac{r}{a}\right] \qquad (89)$$

El momento flector para los puntos tales que $r > c$ se obtiene suprimiendo los términos en $c^2$ en las ecuaciones (84) y (85), lo que da

$$M_r = \frac{P}{4\pi}(1+\nu) \ln \frac{a}{r} \qquad (90)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} + 1 - \nu\right] \qquad (91)$$

[1] Saint Venant indicó este método de cálculo de las flechas en el centro de la placa en su *Théorie de l'élasticité des corps solides*, traducida por Clebsch, París, 1883, pág. 363. Se puede obtener (*i*) aplicando el teorema de Maxwell a las placas circulares.

[2] Este caso ha sido estudiado por N. A. Nash, *L. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 25, 1948. Véase también C. B. Biezeno y R. Grammel, *Technische Dynamik*, 2.ª ed., vol. 1, pág. 497, 1953.



Librodot

Para obtener las fórmulas correspondientes al caso de una placa circular de borde empotrado, derivamos la ecuación (89) y se encuentra para la pendiente en el contorno de una placa simplemente apoyada, la expresión

$$-\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{Pa}{4(1+\nu)\pi D} \qquad (a)$$

Los momentos flectores $M_2$ uniformemente repartidos a lo largo del empotramiento (fig. 40) crean una flexión de la placa según una superficie esférica en la que el radio está dado por (46) y la pendiente en el contorno es

$$-\frac{M_2 a}{(1+\nu)D} \qquad (b)$$

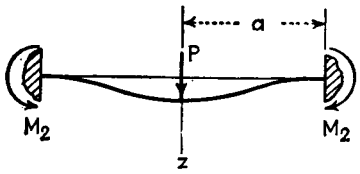



FIG. 40

Utilizando (*a*) y (*b*), se encuentra que la condición para que el borde empotrado no gire da

$$(M_r)_{r=a} = M_2 = -\frac{P}{4\pi} \qquad (c)$$

Las flechas debidas a los momentos $M_2$ se obtienen a partir de la ecuación (*h*) del apartado precedente

$$\frac{P(r^2 - a^2)}{8\pi D(1+\nu)}$$

Sumando estas flechas a las de una placa simplemente apoyada [ec. (89)], se encuentra la expresión de las flechas de una placa empotrada, cargada en su centro

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D} \ln \frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D}(a^2 - r^2) \qquad (92)$$

Sumando (*c*) a (90) y (91), se obtienen las expresiones del momento de flector en todo punto no muy próximo a la carga.

$$M_r = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - 1\right] \qquad (93)$$

$$M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu) \ln \frac{a}{r} - \nu\right] \qquad (94)$$

Cuando $r$ tiende a cero, las ecuaciones (90), (91), (93) y (94) tienden a infinito y por consiguiente no son válidas para el cálculo de momentos de flectores. Por otra parte, las hipótesis que sirven de base a la teoría de la

flexión de placas circulares no son válidas en las proximidades del punto de aplicación de la carga concentrada. Puesto que el radio $c$ del círculo en que $P/\pi c^2$ ésta repartida, disminuye, la presión $P$ aumenta de tal manera que no se puede despreciar en comparación con las tensiones de flexión, como se había hecho en la teoría elemental. Las tensiones tangenciales despreciadas en la teoría elemental aumentan también considerablemente cuando $c$ tiende a cero, puesto que la superficie cilíndrica $2\pi ch$ sobre la que está repartido el esfuerzo cortante total $P$, tiende a cero.

Descartando las hipótesis en las que está basada la teoría elemental, se obtiene la distribución de tensiones cerca del punto de aplicación de la carga asimilando la parte de la placa a un cuerpo de tres dimensiones del mismo orden de magnitud. Para ello imaginemos que la parte central cargada está separada del resto de la placa según una superficie cilíndrica, en la que el radio $b$ es varias veces mayor que el espesor $h$ de la placa (v. fig. 41). Se puede suponer que la teoría elemental de la flexión es suficientemente exacta a una distancia $b$ del punto de aplicación de la carga $P$ y que las tensiones correspondientes se calculan por medio de la ecuación (90). El problema de

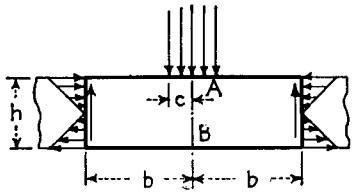



FIG. 41

la distribución de tensiones en el centro se reduce entonces al problema de una distribución simétrica de tensiones en un cilindro de altura $h$ y de radio $b$, sometido a una carga $P$ repartida sobre un pequeño círculo de radio $c$, y a las reacciones a lo largo del contorno lateral[1].

La solución de este problema muestra que la tensión de compresión máxima en el centro $A$ de la carga superior de la placa puede expresarse mediante la fórmula[2] aproximada

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_1 - \frac{P}{\pi c^2}\left[\frac{1+2\nu}{2} - (1+\nu)\alpha\right] \tag{95}$$

donde $\sigma_1$ representa el valor de la tensión de compresión debida a flexión[3] obtenida por la teoría aproximada mediante (83), en el caso de una placa simplemente apoyada, y $\alpha$ es un factor numérico que depende de $2c/h$, relación del diámetro del círculo cargado al espesor de la placa. Varios valores de este factor están dados en la tabla 4. La figura 42 muestra la variación de $\alpha$ en función de $2c/h$. Cuando $c$ tiende a cero, la tensión calculada por la ecuación (95) tiende a infinito.

[1] Varios ejemplos de distribución simétrica de tensiones se estudian en S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 384, 1951. A. Nádai ha estudiado el caso de la figura 41 (véase su libro *Elastische Platten*, pág. 308) y también por S. Woinowsky-Krieger (véase su estudio en *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 305, 1933). Los resultados dados aquí se han tomado de este último trabajo.

[2] Cuando $c$ es muy pequeño la tensión de compresión $P/\pi c_2$ deberá ser mayor que el valor $\sigma_{máx}$ dado por la ecuación (93) (véase fig. 43).

[3] Este valor será negativo en la ecuación (95).

La tracción máxima se produce en $B$, centro de la cara inferior de la placa (fig. 41). Cuando $c$ es pequeño, es decir, para una fuerte concentración de carga, esta

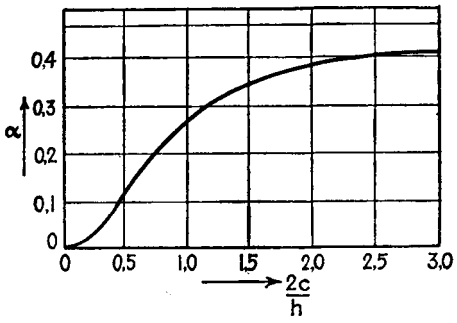



FIG. 42

TABLA 4

Valores del factor $\alpha$ en la ecuación (95)

| $2c/h =$ | 0,10 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,50 | 2,00 | 2,50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha =$ | 0,0106 | 0,0466 | 0,1234 | 0,200 | 0,263 | 0,348 | 0,386 | 0,398 |

tracción es prácticamente independiente de la relación $2c/h$. En el caso de una placa simplemente apoyada está dado por la fórmula aproximada[1].

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{h^2}\left[(1 + \nu)\left(0{,}485 \ln \frac{a}{h} + 0{,}52\right) + 0{,}48\right] \tag{96}$$

donde $a$ es el radio exterior.

Para obtener las tensiones de compresión $\sigma_r$ y $\sigma_t$ en el centro de la cara superior de una placa empotrada, se resta a la tensión de compresión $\sigma_1$ [v. ec. (95)], el valor

$$\frac{P}{4\pi}\frac{6}{h^2} = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi h^2} \tag{d}$$

teniendo en cuenta los momentos $M_2 = -P/4\pi$. La tracción máxima en el centro de la cara inferior de una placa empotrada y para una fuerte concentración de la carga ($c = 0$), se calcula restando la ecuación ($d$) de la ecuación (95); se encuentra

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{h^2}(1 + \nu)\left(0{,}485 \ln \frac{a}{h} + 0{,}52\right) \tag{97}$$

La figura 43 muestra la distribución de tensiones a través de una placa circular gruesa ($h/a = 0{,}4$) empotrada en el contorno. Estas tensiones están calculadas para $c = 0{,}1a$ y $\nu = 0{,}3$. En este caso, la tensión de compresión máxima $\sigma_z$, perpendicular a la superficie de la placa, es mayor que la tensión de compresión máxima en la flexión [ec. (95)]. La tensión de tracción máxima es menor que la tracción dada por la teoría elemental de la flexión. La línea de puntos, en la figura 43, indica el valor de esta última a través del espesor de la placa. Esta tracción está calculada mediante la ecuación del momento flector.

$$M_{máx} = \frac{P}{4\pi}\left[(1 + \nu) \ln \frac{a}{c} - \frac{(1 - \nu)c^2}{4a^2}\right] \tag{98}$$

obtenida sumando el momento $M_2 = -P/4\pi$ a la ecuación (83).

[1] Véase Woinowsky-Krieger, *ob. cit.*

Para calcular las dimensiones de seguridad de una placa circular cargada en su centro, se puede limitar el estudio al cálculo de las tensiones máximas de tracción por flexión en la cara inferior de la placa, con ayuda de las ecuaciones (96) y (97). Aunque las tensiones de compresión sobre la cara superior pueden ser muchas veces mayores

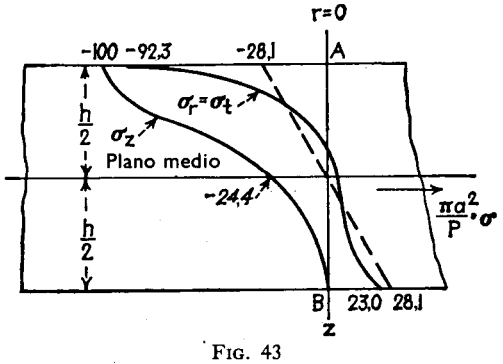



FIG. 43

que las tensiones de tracción en la cara inferior de la placa, en caso de fuertes concentraciones de carga, no representan un peligro directo, a causa de su carácter localizado. Las deformaciones locales de un material dúctil no afectan la deformación general de la placa si las tracciones en la cara inferior no sobrepasan los límites de seguridad. La resistencia a compresión de un material frágil es generalmente varias veces mayor que su resistencia a tracción, de modo que una placa de este material será segura, a condición de que la tracción de la cara inferior permanezca dentro de los límites de seguridad.

Si se quiere una descripción exacta de la deformación de una placa, deberemos tomar en consideración las perturbaciones locales debidas a una carga concentrada, en la proximidad de su punto de aplicación. Esta perturbación está principalmente limitada a un cilindro de radio igual a varias veces $h$, así su influencia sobre la deformación total es importante cuando el espesor de la placa no es muy pequeño con relación a su radio. La figura 44 muestra las flechas de placas circulares de bordes

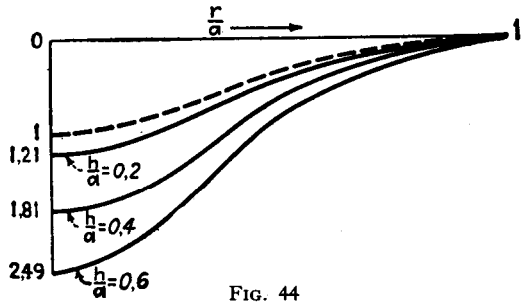



FIG. 44

empotrados soportando una carga concentrada para las que la relación espesor a radio ($h/a$) es: 0,2; 0,4 y 0,6[1]. La línea de puntos indica la flecha de la teoría elemental [ec. (92)]. Puede verse la divergencia entre la curva teórica y la curva exacta disminuye rápidamente cuando disminuye $h/a$. En el apartado siguiente se probará que esta diferencia es debida principalmente a la influencia de los esfuerzos cortantes que se desprecian totalmente en la teoría elemental.

[1] Las curvas de la figura 44 resultan de la solución exacta de Woinowsky-Krieger, *ob. cit.*

### 20. *Correcciones a la teoría elemental de flexión simétrica de placas circulares*

Las relaciones (37) y (38) entre momentos flectores y curvaturas que se dedujeron para el caso de flexión pura, han servido de base a la solución de diferentes problemas, que hemos estudiado sobre flexión simétrica de placas circulares. No se han tenido en cuenta la influencia que tienen sobre la flexión las tensiones tangenciales y las presiones normales sobre planos paralelos a la superficie de la placa. Por consiguiente sólo son rigurosas las soluciones dadas para una placa anular sometida a momentos uniformemente repartidos a lo largo de los contornos externo e interno (fig. 31). En todos los demás casos estudiados, las fórmulas obtenidas son aproximadas y su exactitud depende de la relación del espesor de la placa a su radio externo. Se obtienen fórmulas más aproximadas mediante el cálculo aproximado[1] de la influencia que sobre las deformaciones ejercen las tensiones tangenciales y las presiones laterales. Consideremos ahora, una placa circular sin orificio, apoyada en su contorno y cargada uniformemente. El esfuerzo cortante $Q$ por unidad de longitud de arco a lo largo del círculo de radio $r$ es

$$Q = 1/2qr$$

La solución exacta relativa a las placas en las que el espesor no se supone pequeño[2] indica que las tensiones de los esfuerzos cortantes $\tau_{rz}$ varían a través del espesor de la placa siguiendo una ley parabólica de la misma manera que en las vigas de sección rectangular estrecha. Por consiguiente, la tensión del esfuerzo cortante máxima se encuentra en la superficie media de la placa y su valor es:

$$(\tau_{rz})_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{qr}{2h} \qquad (a)$$

La deformación debida al esfuerzo cortante es entonces

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{qr}{2Gh} \qquad (b)$$

donde $w_1$ es la flecha adicional de la superficie media, debida a la tensión tangencial. Integrando se encuentra el valor de las flechas producidas por las tensiones tangenciales

$$w_1 = \frac{3}{2}\frac{q}{4Gh}(a^2 - r^2) \qquad (c)$$

[1] Una teoría rigurosa de placas fue iniciada por Saint-Venant en su traducción de la *Théorie de l'élasticité des corps solides*, pág. 337. Un interesante juicio de este trabajo aparece en *History of the Theory of Elasticity* de I. Todhunter y K. Pearson, vol. 2, parte I, pág. 217. Un nuevo desarrollo de la teoría se debe a J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, página 100, 1900, y a A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4.ª ed., pág. 465. Una lista de referencias sobre este asunto ha sido dada por Woinowsky-Krieger, *ob. cit.*, página 203. En el apartado 26 se dan algunos ejemplos de la teoría rigurosa.

[2] Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 351.

y en el centro de la placa

$$(w_1)_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{qa^2}{4Gh} \qquad (d)$$

La presión lateral que actúa sobre la placa crea una curvatura positiva convexa hacia abajo, semejante a la que se produce en una viga uniformemente cargada[1].

La presión $q$ por unidad de superficie, da lugar a un alargamiento radial igual a $\nu q/E$ en la parte superior de la placa. El alargamiento es $\nu q/2E$ en la superficie media y es nulo en la parte inferior de la placa. Supongamos la relación lineal, el valor aproximado del radio de curvatura $R$ se obtiene a partir de la ecuación

$$\frac{\nu q}{2E} = \frac{h}{2R}$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{2R} = \frac{\nu q}{2hE}$$

y la flecha negativa es,

$$w_2 = -\frac{1}{2R}(a^2 - r^2) = -\frac{\nu q}{2hE}(a^2 - r^2) \qquad (e)$$

Sumando las ecuaciones $(c)$ y $(e)$ a (67), se encuentra una expresión más exacta de la flecha

$$w = \frac{q}{64D}(a^2 - r^2)\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu}a^2 - r^2\right) + \frac{qh^2}{8D}\frac{3 + \nu}{6(1 - \nu^2)}(a^2 - r^2)$$

la cual se convierte en el centro

$$w_{\text{máx}} = \frac{qa^4}{64D}\left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} + \frac{4}{3}\frac{3 + \nu}{1 - \nu^2}\frac{h^2}{a^2}\right) \qquad (f)$$

El segundo término del segundo miembro de $(f)$ representa la corrección para las tensiones tangenciales y la presión lateral cuando la relación del espesor de la placa al radio es pequeño. El valor de esta conexión dada para la solución exacta es[2]

$$\frac{qa^4}{64D}\frac{2}{5}\frac{8 + \nu + \nu^2}{1 - \nu^2}\frac{h^2}{a^2} \qquad (g)$$

Para $\nu = 0{,}3$ el valor exacto es un 20 % inferior al dado por la ecuación $(f)$.

En una placa circular cargada uniformemente, con borde empotrado, la flecha negativa $w_2$, debida a la presión, no se produce y por consiguiente,

[1] Véase *ibíd.*, pág. 43.
[2] Véase Love, *op. cit.*, pág. 481.



Librodot

sólo debe ser considerada la flecha $w_1$, debida al esfuerzo cortante. Sumando esta flecha a (62), se obtiene, más exactamente, el valor de la flecha.

$$w = \frac{q}{64D}\left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4h^2}{1 - \nu}(a^2 - r^2)\right] \qquad (h)$$

Es interesante hacer constar que coincide con la solución exacta[1].

Consideremos a continuación las flechas producidas por las tensiones tangenciales en la placa anular sometida a esfuerzos cortantes uniformemente repartidos a lo largo del borde interior como indica la figura 32. La máxima tensión tangencial a una distancia $r$ del centro, es

$$(\tau_{rz})_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{P}{2\pi rh}$$

donde $P$ representa el esfuerzo cortante total. La deformación tangencial correspondiente es[2]:

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{P}{2\pi rhG} \qquad (i)$$

Integrando se obtiene la flecha debida al esfuerzo cortante

$$w_1 = \frac{3}{4}\frac{P}{\pi hG}\ln\frac{a}{r} = \frac{Ph^2}{8\pi(1 - \nu)D}\ln\frac{a}{r} \qquad (j)$$

Para obtener un valor más preciso de la flecha de la placa (fig. 32) se debe sumar $(j)$ a la ecuación $(k)$ de la página 79. Cuando el radio $b$ del agujero es muy pequeño, la ecuación de la flecha total deberá ser

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)}(a^2 - r^2) + r^2\ln\frac{r}{a}\right] + \frac{Ph^2}{8\pi(1 - \nu)D}\ln\frac{a}{r} \qquad (k)$$

La flecha en el contorno del agujero es:

$$w_{\text{máx}} = \frac{Pa^2}{8\pi D}\left[\frac{3 + \nu}{2(1 + \nu)} + \frac{1}{1 - \nu}\frac{h^2}{a^2}\ln\frac{a}{b}\right] \qquad (l)$$

El segundo término de esta expresión representa la corrección debida a los esfuerzos cortantes. Siendo infinito cuando $b$ tiende a cero, ya que se supone que $P$ tiene siempre un valor finito. Por consiguiente cuando $b$ tiende a cero, las tensiones y deformaciones tangenciales se harán infinitamente grandes.

El término de $(l)$ que representa la corrección para el esfuerzo cortante no se puede aplicar para una placa sin orificio. En el caso de una placa sin agujero debe esperarse una corrección menor a causa del efecto de cuña debido a la carga concentrada $P$, aplicada en el centro de la cara superior de la placa. Imaginemos que la parte central de la placa se separa por medio de un cilindro de radio $b$ pequeño, y que su

[1] Véase *ibíd.*, pág. 485.

[2] Si la placa no está agujereada, el segundo miembro de la ecuación $(i)$ debe ser multiplicado por $(1 - \nu)/(1 + \nu)$, de acuerdo con la ecuación $(t)$, pág. 97.

acción sobre el resto de la placa está sustituida por los esfuerzos cortantes verticales equivalentes a $P$ así como por las fuerzas radiales $S$ que representan el efecto de cuña de la carga, fuerzas repartidas a lo largo del contorno superior del agujero como indica la figura 45. Es evidente que estas últimas crean una tensión de la superficie media así como una deformación de la placa hacia arriba. Se debe entonces reducir el término correctivo de la ecuación ($k$) para hacerlo aplicable a una placa sin agujero.

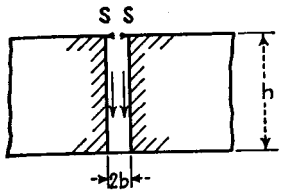



FIG. 45

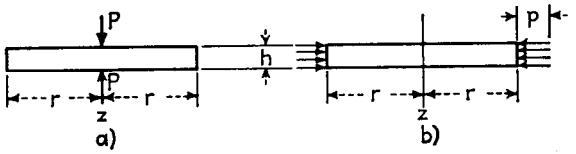



FIG. 46

Para hacernos idea de la importancia de las fuerzas radiales, $S$, consideremos la placa en las dos condiciones de carga de la figura 46. En el primer caso la placa está comprimida por dos fuerzas iguales y opuestas $P$, que actúan a lo largo del eje de simetría $z$. En el segundo caso la placa está sometida a una compresión uniforme, en su plano, bajo el efecto de una presión $p$ uniformemente repartida sobre la superficie cilíndrica del contorno. A causa de la deformación lateral, estas presiones aumentan el espesor de la placa en una cantidad

$$\Delta h = \frac{2\nu p}{E} h$$

Se puede entonces, a partir de esta ecuación, calcular el aumento $\Delta r$ del radio $r$ de la placa, debido a la acción de las fuerzas $P$ [fig. 46 $a$)]; para esto, aplicamos el teorema recíproco a las dos condiciones de carga de la figura 46. Se encuentra

$$P\,\Delta h = 2\pi r h p\,\Delta r$$

de donde se deduce

$$\Delta r = \frac{P\,\Delta h}{2\pi r h p} = \frac{2\nu}{E}\frac{P}{2\pi r} \qquad (m)$$

Comparemos este aumento del radio al del radio de un cilindro de pared gruesa producido por una presión interna $p_i$. Si el radio interior $b$ del cilindro es muy pequeño comparado con el radio exterior $r$, el aumento de $r$ se obtiene mediante la ecuación[1] de Lamé

$$\Delta r = \frac{1+\nu}{E}\frac{p_i b^2}{r} \qquad (n)$$

Comparando ($m$) y ($n$) se llega a la conclusión de que el alargamiento radial debido a $P$ [fig. 46 $a$)] tiene el mismo valor que el producido por una presión interna $p_i$, en una placa que tiene un pequeño orificio cilíndrico en el centro (fig. 45). Estando dado el valor de $p_i$ por la ecuación siguiente:

$$\frac{2\nu P}{E 2\pi r} = \frac{1+\nu}{E}\frac{p_i b^2}{r}$$

de donde

$$p_i = \frac{\nu P}{(1+\nu)\pi b^2} \qquad (o)$$

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 210, 1956.

Volvamos al caso de una fuerza concentrada en el centro de la cara superior de la placa (fig. 45), se llega a la conclusión de que la fuerza $S$ por unidad de longitud de circunferencia del orificio debe ser igual a la presión $p_i h/2$. Utilizando el valor de $p_i$ dado en $(o)$, se obtiene

$$S = \frac{\nu P h}{2(1+\nu)\pi b^2}$$

Estas fuerzas aplicadas a la cara superior de la placa producen sobre la placa flechas $w_1$ cuyo valor se calcula sustituyendo

$$M_1 = \frac{Sh}{2} = \frac{\nu P h^2}{4(1+\nu)\pi b^2}$$

en la ecuación (73) y despreciando $b^2$ frente a $a^2$. De esta forma se obtiene

$$w_1 = -\frac{\nu P h^2}{8\pi(1+\nu)^2 D}\frac{a^2-r^2}{a^2} - \frac{\nu P h^2}{4(1-\nu^2)\pi D}\ln\frac{a}{r} \qquad (p)$$

Sumando $(p)$ a $(k)$ se obtiene la expresión siguiente, más aproximada para la flecha de una placa sin orificio bajo una carga $P$ concentrada en el centro de la cara superior:

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}(a^2-r^2) + r^2\ln\frac{r}{a}\right] + \frac{Ph^2}{8\pi(1+\nu)D}\ln\frac{a}{r} - \frac{\nu P h^2}{8\pi(1+\nu)^2 D}\frac{a^2-r^2}{a^2} \qquad (q)$$

Esta ecuación se puede utilizar para calcular la flecha en todos los puntos de la placa que no están demasiado próximos al punto de aplicación de la carga. Cuando $r$ es del mismo orden de magnitud que el espesor de la placa, la ecuación $(q)$ no es aplicable, y para obtener una solución satisfactoria, la parte central de la placa deberá ser considerada de la forma que se explicó en el apartado anterior. Se obtiene un valor aproximado de la flecha de esta parte central asimilándola a una placa de pequeño radio $b$, sumando la flecha debida a las perturbaciones locales en la distribución de tensiones, cerca del punto de aplicación de la carga a la flecha dada por la teoría elemental[1]. La flecha debida a las perturbaciones locales es afectada muy poco por las condiciones de contorno de la placa y, por consiguiente, puede determinarse aproximadamente por medio de las curvas de la figura 44; la curva en trazos se obtiene a partir de la ecuación (92). Las flechas adicionales debidas a la perturbación local de tensiones son iguales a las diferencias entre las ordenadas de las líneas continuas de la curva de trazos.

Por ejemplo sea una placa en que el radio de la parte interior, es $b = 5h$. La flecha de la parte interior, calculada con ayuda de (92) y tomada como unidad en la figura 44, es

$$\delta_1 = \frac{Pb^2}{16\pi D} = \frac{P}{16\pi D}(5h)^2$$

Utilizando la curva $h/a = 0{,}2$ (fig. 44), la flecha adicional debida a la perturbación de la tensión local es

$$\delta_2 = 0{,}21\delta_1 = 0{,}21\frac{P}{16\pi D}(5h)^2 \qquad (r)$$

Si se considera una placa en que $b = 2{,}5h$, se obtiene, con la curva $h/a = 0{,}4$

$$\delta_2 = 0{,}81\frac{P}{16\pi D}(2{,}5h)^2 \qquad (s)$$

[1] En el caso considerado esta flecha se calcula utilizando el primer término de $(q)$ y sustituyendo $b$ por $a$.

que difiere muy poco de la dada en ($r$) para $b = 5h$. Esto no es satisfactorio si se toma $b < 2{,}5h$ pues, para radios inferiores, las condiciones de contorno de la placa gruesa, llegan a ser importantes y las curvas de la figura 44, calculadas para contorno empotrado, pueden no ser bastante exactas en este caso.

Finalmente para obtener la flecha de la placa bajo la carga se calcula la flecha por medio de la ecuación ($q$), sustituyendo $r = 0$ en el primer término y $r = b = 2{,}5h$ en los otros términos. A esta flecha se añade la de la parte central de la placa debida a los esfuerzos cortantes y dada por ($s$).

En el caso particular de $\nu = 0{,}3$, las flechas de la placa circular simplemente apoyada se pueden obtener por simple superposición de las curvas trazadas en la figura 44[1], con la flecha

$$\frac{P(a^2 - r^2)}{8\pi D(1 + \nu)}$$

debida a la flexión pura creada por los momentos $P/4\pi$ aplicados a lo largo del contorno de la placa.

Se puede también señalar que para valores pequeños de la relación $r/a$, la influencia del esfuerzo cortante $P/2\pi r$ sobre la flecha está simplemente representada por el segundo miembro de la ecuación ($q$). A este término corresponde la pendiente

$$\frac{dw_1}{dr} = -\frac{3}{2}\frac{1 - \nu}{1 + \nu}\frac{P}{2\pi rhG} \qquad (t)$$

Comparando este resultado con ($i$), se concluye que si se introduce el factor

$$k = \frac{3}{2}\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \qquad (u)$$

en ($i$) en lugar de $k = 3/2$, daría un valor más preciso de la deformación debida a los esfuerzos cortantes en el caso de una placa sin orificios.

Todos los desarrollos precedentes no son aplicables más que a placas circulares flexadas según una superficie de revolución. En los apartados 26 y 39 se dará una teoría más general de la flexión, teniendo en cuenta la influencia de los esfuerzos cortantes sobre la deformación de las placas.

[1] La figura 44 está calculada para $\nu = 0{,}3$.