TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS

CAPÍTULO 4

S. TIMOSHENKO

y

S. WOINOWSKY-KRIEGER

Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
CAPÍTULO 4

S. TIMOSHENKO
Profesor Emérito de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Stanford.

S. WOINOWSKY-KRIEGER
Profesor de Mecánica para Ingenieros
de la Universidad de Laval

Traducido por
F. J. MEDINA SALANOVA
Ingeniero de caminos
Profesor de la Escuela Técnica Superior
de Caminos, Canales y puertos
de Madrid.

Digitalizado por Librodot.com

4

Pequeñas deformaciones de placas bajo carga transversal

21. Ecuación diferencial de la deformada

Supongamos que la carga que actúa sobre la placa es normal a su superficie y las flechas son pequeñas en comparación con el espesor (v. ap. 13). Respecto al contorno, supongamos que los bordes tienen libertad para moverse en el plano de la placa; en estas condiciones las reacciones en los bordes son normales a la de la placa. Con estas hipótesis pueden

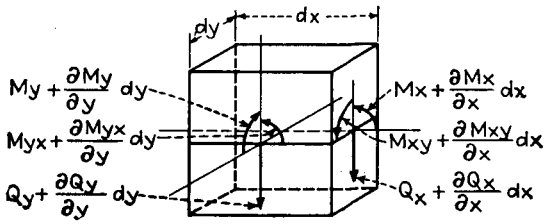


FIG. 47

despreciarse las deformaciones en el plano medio de la placa durante la flexión. Tomando como antes (v. ap. 10) los ejes de coordenadas x e y en el plano medio de la placa y el eje z perpendicular a dicho plano, consideremos un elemento separado de la placa por dos pares de planos paralelos a los planos xz e yz como indica la figura 47. Además de los momentos flectores M_x y M_y y los momentos torsores M_{xy} que se consideraban en la flexión pura (v. ap. 10), hay esfuerzos cortantes verticales[1] que actúan

[1] No habrá esfuerzos cortantes horizontales ni esfuerzos normales en las caras del elemento, puesto que se considera despreciable la deformación en el plano medio de la placa.

Librodot

en las caras del elemento. Los valores de estos esfuerzos cortantes por unidad de longitud paralela a los ejes y y x se denominan Q_x y Q_y respectivamente y valen

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}\, dz \qquad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}\, dz \tag{a}$$

Puesto que los momentos y esfuerzos cortantes son funciones de las coordenadas x e y debemos tener en cuenta en el estudio de las condiciones de equilibrio, los pequeños cambios que experimentan cuando x e y sufren incrementos elementales dx y dy.

El plano medio del elemento está representado en las figuras 48 *a*) y *b*), y en ellas se indican las direcciones en que los momentos y fuerzas se consideran positivos.

Debe considerarse también la carga distribuida sobre la cara superior de la placa. Se denomina q la intensidad de esta carga, de modo que la carga que actúa sobre el elemento[1] es $q\, dx\, dy$.

Proyectando sobre el eje z las fuerzas que actúan sobre el elemento se obtiene la siguiente ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\, dx + q\, dx\, dy = 0$$

de donde

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \tag{99}$$

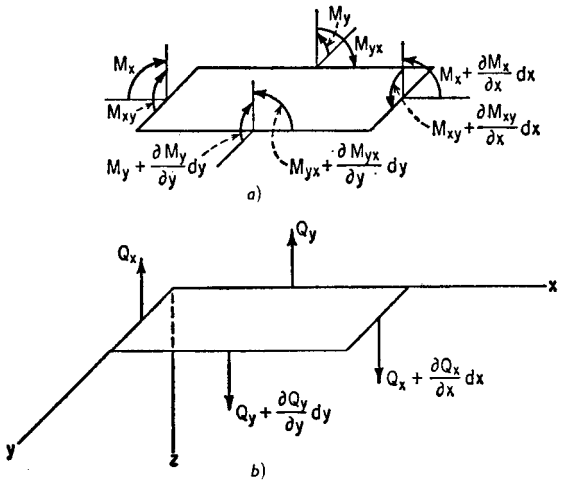


FIG. 48

[1] Puesto que se desprecia la componente tensional σ_z no hay posibilidad de distinguir entre aplicar la carga en la superficie inferior o superior. De este modo, toda carga transversal concentrada, se considera en la teoría de placas delgadas como una discontinuidad en el valor de los esfuerzos cortantes, que se distribuyen según una ley parabólica a través del espesor de la placa. El peso propio de la placa, por ejemplo, puede incluirse en la carga q sin que ello afecte a la exactitud de los resultados. Si el efecto de la carga superficial tiene interés especial, debe usarse la teoría de placas gruesas (v. ap. 19).

Librodot

Tomando momentos con respecto al eje x de todos los esfuerzos que actúan sobre el elemento se obtiene la ecuación de equilibrio

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial M_y}{\partial y}\,dy\,dx + Q_y\,dx\,dy = 0 \qquad (b)$$

El momento de la carga q y el momento debido a la variación de Q_y se desprecian en esta ecuación por ser diferenciales de orden superior a los sumandos conservados. Simplificando, la ecuación (b) toma la forma

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \qquad (c)$$

Del mismo modo tomando momentos respecto al eje y se tiene

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \qquad (d)$$

Puesto que no hay fuerzas en las direcciones x e y ni momentos respecto al eje z, las tres ecuaciones (99), (c) y (d) determinan totalmente el equilibrio del elemento. Eliminemos los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y de estas ecuaciones, despejándolos en las ecuaciones (c) y (d) y sustituyéndolos en la ecuación (99). Así obtenemos

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} = -q \qquad (e)$$

Observando que $M_{yx} = -M_{xy}$ por ser $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ se escribe finalmente la ecuación de equilibrio (e) en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} = -q \qquad (100)$$

Para escribir esta ecuación en función de las flechas w de la placa, se acepta aquí que las ecuaciones (41) y (43), desarrolladas para el caso de flexión pura, pueden usarse también para el caso de placas con carga transversal. Esta hipótesis equivale a despreciar el efecto sobre la flexión de los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y así como el de la tensión σ_z debida a la carga q. Hemos utilizado ya esta hipótesis en el capítulo anterior y hemos visto que los errores en las flechas obtenidas de esta forma son pequeños, siempre que el grueso de la placa sea pequeño en comparación con las dimensiones de la placa en su plano. En el apartado 39 se verá una teoría aproximada de la flexión de placas elásticas delgadas teniendo en cuenta el efecto de los esfuerzos cortantes sobre la deformación y en el apartado 26 estudiaremos varios ejemplos de soluciones exactas de problemas de flexión de placas.

Librodot

Utilizando la notación x e y en lugar de n y t que se usó en las ecuaciones (41) y (43) se tiene

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{101}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{102}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (100) obtenemos[1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{103}$$

Esta última ecuación puede escribirse en la forma simbólica

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \tag{104}$$

donde

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{105}$$

Se ve, pues, que el problema de la flexión de placas bajo cargas transversales se reduce a la integración de la ecuación (103). Si para un caso particular se conoce una solución de esta ecuación que satisfaga las condiciones de borde de la placa, los momentos flectores se pueden calcular por las ecuaciones (101) y (102). Las correspondientes tensiones normales y tangenciales se determinan por la ecuación (44) y la expresión

$$(\tau_{xy})_{\text{máx}} = \frac{6M_{xy}}{h^2}$$

Para determinar los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y se emplean las ecuaciones (c) y (d) de las cuales

$$Q_x = \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{106}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{107}$$

o usando la forma simbólica

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w) \qquad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}(\Delta w) \tag{108}$$

[1] Esta ecuación fue obtenida por Lagrange en 1811, cuando estaba examinando la Memoria presentada por Sophie Germain a la Academia Francesa de Ciencias. La historia del desarrollo de esta ecuación viene en T. Todhunter y K. Pearson, *History of the Theory of Elasticity*, vol. I, págs. 147, 247, 348, y vol. 2, parte I, pág. 263. Véase también la nota de Saint-Venant al artículo 73, en la página 689, de la traducción al francés de la *Théorie de l'élasticité des corps solides* hecha por Clebsch, París, 1883.

Librodot

las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} pueden ahora determinarse admitiendo que se distribuyen en el espesor de la placa según una ley parabólica[1]. Entonces

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{Q_x}{h} \qquad (\tau_{yz})_{\text{máx}} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{h}$$

Se ve que las tensiones en una placa pueden calcularse siempre que para una distribución de carga y unas condiciones de contorno se determine por integración de la ecuación (103) la ecuación de la deformada.

22. *Condiciones de borde*

Comencemos el estudio de las condiciones de borde con el caso de una placa rectangular y supongamos que los ejes x e y se toman paralelos a los lados de la placa.

Borde empotrado

Si el borde de la placa está empotrado, la flecha a lo largo del borde es nula, y el plano tangente a la superficie media de la placa deformada a lo largo del borde, coincide con la posición inicial del plano medio de la placa. En la hipótesis de borde empotrado las condiciones del borde $x = a$ son:

$$(w)_{x=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \tag{109}$$

Borde simplemente apoyado

Si el borde $x = a$ de la placa está simplemente apoyado, la flecha w a lo largo del borde debe ser nula. Al mismo tiempo este borde puede girar libremente sobre la línea de borde; por lo tanto no hay momentos flectores M_x a lo largo de este borde. Este tipo de sustentación está representado en la figura 49. La expresión analítica de las condiciones en este caso es

$$(w)_{x=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \tag{110}$$

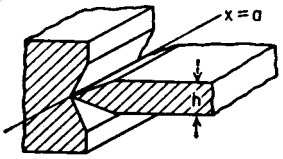


FIG. 49

[1] Se demostrará en el apartado 26 que en ciertos casos esta hipótesis está de acuerdo con la teoría exacta de la flexión de las placas.

Librodot

Teniendo en cuenta que $\partial^2 w/\partial y^2$ se anula junto con w a lo largo del borde $x = a$, se tiene que la segunda de las condiciones (110) puede ponerse en la forma $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ o también $\Delta w = 0$. Las ecuaciones (110) son por lo tanto equivalentes a

$$(w)_{x=a} = 0 \qquad (\Delta w)_{x=a} = 0 \tag{111}$$

que no incluyen el coeficiente de Poisson.

Borde libre

Si un borde de una placa, sea el borde $x = a$ (fig. 50) está totalmente libre, lógicamente a lo largo de él no hay momentos flectores ni torsores ni esfuerzos cortantes, es decir, que

$$(M_x)_{x=a} = 0 \qquad (M_{xy})_{x=a} = 0 \qquad (Q_x)_{x=a} = 0$$

Las condiciones de borde para borde libre fueron expresadas por Poisson[1] en esta forma. Pero después Kirchhoff[2] probó que tres condiciones son excesivas, y bastan dos para la completa determinación de las flechas w que satisfacen la ecuación (103). El mostró que las dos condiciones de Poisson relativas al momento torsor M_{xy} y al esfuerzo cortante Q_x deben sustituirse por una condición de borde. El significado de esta reducción del número de condiciones de contorno fue explicado por Kelvin y Tait[3]. Estos autores señalan que la flexión de la placa no varía si las fuerzas horizontales que

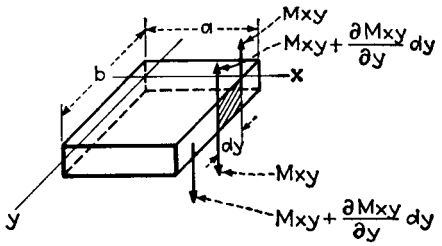


FIG. 50

dan el momento torsor $M_{xy}dy$ que actúa sobre un elemento de longitud dy del borde $x = a$ se sustituyen por dos fuerzas verticales de valor M_{xy} y brazo dy como indica la figura 50. Tal sustitución no cambia el valor de los momentos torsores y produce únicamente cambios en la distribución local de tensiones en el borde de la placa, dejando invariables la situación tensional del resto de la placa. Hemos estudiado ya un caso particular de

[1] Véase el estudio de este punto en Todhunter y Pearson, *op. cit.*, vol. 1, pág. 250 y Saint-Venant, punto citado.

[2] Véase *J. Crelle*, vol. 40, pág. 51, 1850.

[3] Véase *Treatise of Natural Philosophy*, vol. 1, parte II, pág. 188, 1883. Independientemente la misma cuestión fue desarrollada por Boussinesq, *J. Math.*, ser. 2, vol. 16, págs. 125-274, 1871; ser. 3, vol. 5, págs. 329-344, París, 1879.

Librodot

tal transformación del sistema de fuerzas de contorno al considerar la flexión pura de una placa según una superficie anticlástica (v. ap. 11). Siguiendo con la sustitución de momentos torsores a lo largo del borde de la placa y considerando dos elementos de borde adyacentes (fig. 50), tenemos que la distribución de momentos torsores M_{xy} es estáticamente equivalente a la distribución de esfuerzos cortantes de intensidad

$$Q'_x = -\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a}$$

De ahí que la condición conjunta relativa a momento torsor M_{xy} y esfuerzo cortante Q_x a lo largo del borde libre $x = a$ toma la forma

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = 0 \qquad (a)$$

Sustituyendo Q_x y M_{xy} por sus expresiones (106) y (102) obtenemos finalmente para el borde libre $x = a$:

$$\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right]_{x=a} = 0 \qquad (112)$$

la condición de momentos flectores nulos a lo largo del borde libre exige que

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} = 0 \qquad (113)$$

Las ecuaciones (112) y (113) representan las dos condiciones de borde necesarias en toda la extensión del borde libre de la placa $x = a$.

Transformando los momentos torsores como se ha hecho en el estudio anterior y se indica en la figura 50, obtenemos no sólo los esfuerzos cortantes Q_x distribuidos a lo largo del borde $x = a$ sino también dos fuerzas

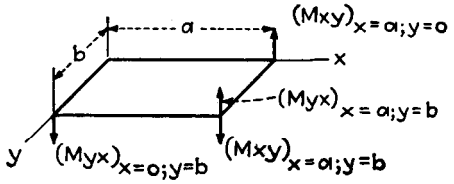


FIG. 51

concentradas en las esquinas como indica la figura 51. Los valores de estas fuerzas son iguales a los del momento torsor[1] M_{xy} en las correspondientes esquinas de la placa.

Haciendo análoga transformación de los momentos torsores M_{xy} en el borde $y = b$ veremos de nuevo que además de los esfuerzos cortantes Q_y uniformemente repartidos, habrá fuerzas concentradas M_{xy} en las esquinas.

[1] El momento M_{xy} es un momento por unidad de longitud y tiene las dimensiones de una fuerza.

Librodot

Esto indica que una placa rectangular apoyada en alguna forma por sus bordes y bajo carga transversal producirá ordinariamente no sólo reacciones repartidas en el contorno sino también fuerzas concentradas en las esquinas.

En cuanto a los sentidos de estas reacciones concentradas, puede determinarse si se conoce la forma general de la deformada. Sea, por ejemplo, una placa cuadrada simplemente apoyada en sus bordes sometida a carga uniformemente repartida. La forma general de la deformada se indica en la figura 52 *a*) por las líneas de puntos que representan las secciones de la

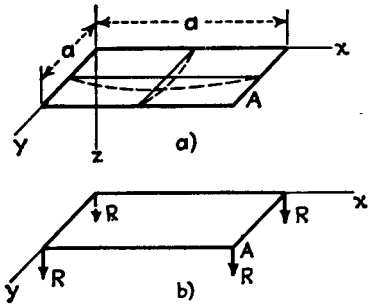


FIG. 52

superficie media de la placa por planos paralelos a los planos coordenados xz e yz. Considerando estas líneas puede verse que junto a la esquina A la derivada $\partial w/\partial x$ que representa la pendiente de la deformada en la dirección x es negativa y disminuye en valor absoluto cuando y aumenta. De ahí que $\partial^2 w/\partial x\,\partial y$ es positiva en la esquina A. De la ecuación (102) se deduce que M_{xy} es positivo y M_{yx} negativo. De ahí y de los sentidos de M_{xy} y M_{yx} en la figura 48 *a*) se sigue que ambas fuerzas concentradas indicadas en la figura 51 para el punto $x = a$, $y = b$ tienen sentido hacia abajo. Por razón de simetría se deduce que las fuerzas tienen los mismos valores y sentido en las otras esquinas de la placa. De ahí que las condiciones son las indicadas en la figura 52 *b*) en donde

$$R = 2(M_{xy})_{x=a,y=a} = 2D(1 - \nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=a,y=a}$$

Puede verse que cuando una placa cuadrada está uniformemente cargada, las esquinas en general tienen tendencia a levantarse y ello está contrarrestado por las reacciones concentradas en las esquinas como se indica en la figura 52 *b*).

Librodot

Borde elásticamente apoyado y elásticamente empotrado

Si el borde $x = a$ de una placa está rígidamente unido a una viga soporte (fig. 53) la flecha en los puntos de este borde no es nula, sino igual a la flecha de la viga. Igualmente el giro del borde es igual a la torsión de la viga. Sean B y C la rigidez de la viga a flexión y a torsión respectiva-

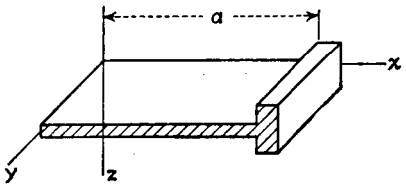


FIG. 53

mente. La carga transmitida de la placa a la viga soporte en la dirección z es, según la ecuación (a)

$$-V_x = -\left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=a}$$

y la ecuación diferencial de la deformada de la viga será

$$B\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{x=a} = D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=a} \tag{114}$$

Esta ecuación da una de las condiciones de borde de la placa para $x = a$.

Para obtener la segunda condición, hay que considerar la torsión de la viga. El ángulo[1] girado por una sección transversal de la viga es $-(\partial w/\partial x)_{x=a}$ y la variación unitaria de este ángulo en el sentido del borde

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=a}$$

Por lo tanto el momento torsor de la viga es $-C(\partial^2 w/\partial xy)_{x=a}$. Este momento varía a lo largo del borde ya que la placa rígidamente unida a la viga, transmite a ésta los momentos torsores repartidas de un modo continuo. El valor de estos momentos aplicados por unidad de longitud, es igual y de signo contrario al de los momentos flectores M_x de la placa. De ahí, considerando el equilibrio de un elemento de la viga, respecto al giro en su plano, tenemos

$$-C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=a} = -(M_x)_{x=a}$$

[1] Para el signo del ángulo se aplica la regla del tornillo de la mano derecha.

Librodot

o bien sustituyendo M_x por su expresión (101)

$$-C\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{x=a} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=a} \tag{115}$$

Esta es la segunda condición de borde de la placa para $x = a$.

En el caso de una placa con contorno curvo (fig. 54), tomamos para un punto A del borde los ejes de coordenadas en las direcciones de la tangente t y la normal n como se indica en la figura. Los momentos flectores y torsores en ese punto son

$$M_n = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_n\,dz \qquad M_{nt} = -\int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{nt}\,dz \tag{b}$$

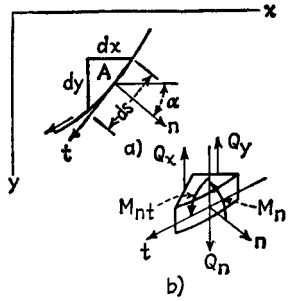


FIG. 54

Empleando para las tensiones σ_n y τ_{nt} las conocidas expresiones[1]

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \operatorname{sen}^2\alpha + 2\tau_{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\tau_{nt} = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (\sigma_y - \sigma_x)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

podemos escribir las expresiones (*b*) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x\cos^2\alpha + M_y\operatorname{sen}^2\alpha - 2M_{xy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \\ M_{nt} &= M_{xy}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (M_x - M_y)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \end{aligned} \tag{c}$$

El esfuerzo cortante Q_n en el punto A del contorno se deduce de la ecuación de equilibrio del elemento de placa indicado en la figura 54 *b*) de donde

$$Q_n ds = Q_x dy - Q_y dx$$

o bien

$$Q_n = Q_x\cos\alpha + Q_y\operatorname{sen}\alpha \tag{d}$$

Teniendo las expresiones (*c*) y (*d*) pueden en cada caso particular escribirse sin dificultad las condiciones de borde.

[1] Las direcciones x e y no son las direcciones principales en el caso de flexión pura; por lo tanto, las expresiones de M_n y M_{nt} difieren de las dadas por las ecuaciones (39) y (40).

Librodot

Si el borde curvo de la placa está empotrado tenemos

$$w = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \tag{e}$$

En caso de borde simplemente apoyado tenemos

$$w = 0 \qquad M_n = 0 \tag{f}$$

Sustituyendo M_n por su expresión en la primera de las ecuaciones (*c*) y utilizando las ecuaciones (101) y (102) pueden expresarse las condiciones de borde (*f*) en función de w y sus derivadas.

Si el borde de la placa está libre las condiciones de borde son

$$M_n = 0 \qquad V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = 0 \tag{g}$$

donde el término $-\partial M_{nt}/\partial s$ se obtiene en la forma indicada en la figura 50 y representa la parte de reacción en el borde debida al reparto de momentos torsores M_{nt} a lo largo del mismo. Sustituyendo M_n, M_{nt} y Q_n por sus valores en (*c*) y (*d*) y valiéndonos de las ecuaciones (101), (102), (106) y (107) podemos escribir las condiciones de borde en la forma siguiente

$$\begin{aligned} &\nu\,\Delta w + (1-\nu)\left(\cos^2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \operatorname{sen}^2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \operatorname{sen} 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) = 0 \\ &\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + \operatorname{sen}\alpha\,\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + (1-\nu)\,\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos 2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right. \\ &\qquad\left. + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{116}$$

donde como en casos anteriores

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

En el próximo apartado se da otra forma de obtener estas condiciones.

23. *Otra forma de obtención de las condiciones de borde*

La ecuación diferencial (104) de la deformada de una placa y las condiciones de borde pueden obtenerse mediante el principio de trabajos virtuales junto con la expresión de la energía de deformación de una placa flectada[1]. Puesto que en la obtención de la ecuación (104) se despreció por completo el efecto de las tensiones tangenciales sobre la deformación, la expresión correspondiente de la energía de deformación incluirá únicamente términos dependientes de los momentos flectores y

[1] Por este método se obtuvieron por primera vez de modo satisfactorio las condiciones de contorno; véase G. Kirchhoff en *J. Crelle*, vol. 40, 1850, y también su «Vorlesungen über Mathematische Physik», *Mechanik*, pág. 450, 1877. Lord Kelvin se tomó gran interés en las deducciones de Kirchhoff y habló de ellas con Helmholtz; véase la biografía de Kelvin por Sylvanus Thompson, vol. 1, pág. 432.

Librodot

torsores como en el caso de flexión pura estudiado en el apartado 12. Empleando la ecuación (48) obtenemos la energía de deformación para un elemento infinitesimal

$$dV = \frac{1}{2} D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \, dy \qquad (a)$$

La energía total de deformación de la placa se obtiene por integración

$$V = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx \, dy \qquad (117)$$

estando la integral extendida a toda la superficie de la placa.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales, supongamos que se produce una variación infinitamente pequeña δw de las flechas w. Entonces el cambio correspondiente de la energía de deformación debe ser igual al trabajo producido por las fuerzas exteriores en el desplazamiento virtual supuesto. Para calcular este trabajo, debemos tener en cuenta no sólo la carga transversal q repartida sobre la superficie sino también los momentos flectores M_n y las fuerzas $Q_n - (\partial M_{nt} / \partial s)$ repartidas en el contorno de la placa. Por lo tanto la ecuación general dada por el principio de los trabajos virtuales es

$$\delta V = \iint q \, \delta w \, dx \, dy - \int M_n \frac{\partial \, \delta w}{\partial n} \, ds + \int \left(Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \right) \delta w \, ds \qquad (b)$$

La primera integral del segundo miembro de esta ecuación representa el trabajo de la carga transversal al producirse el desplazamiento δw. La segunda, extendida a lo largo de la placa, da el trabajo de los momentos flectores debido al giro $\partial(\delta w)/\delta n$ del borde de la placa. El signo menos se debe a los sentidos elegidos para M_n y la norma n indicados en la figura 54. La tercera integral da el trabajo de las fuerzas transversales aplicadas en el borde de la placa.

Para el cálculo de la variación δV de la energía de deformación aplicaremos al primer término de la expresión (117) algunas transformaciones que vamos a explicar con detalle.

Una variación pequeña de este término es

$$\begin{aligned} \delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \, dy &= 2 \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \, \delta w}{\partial x^2} \, dx \, dy \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \, \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \frac{\partial \, \delta w}{\partial x} \right] dx \, dy \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial \, \delta w}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w \right] dx \, dy \end{aligned} \qquad (c)$$

En los primeros dos términos siguientes al último signo igual en la expresión (c) la integral doble pueden sustituirse por integrales simples si recordamos que para toda función F de x e y se cumplen las expresiones

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial F}{\partial x} \, dx \, dy &= \int F \cos \alpha \, ds \\ \iint \frac{\partial F}{\partial y} \, dx \, dy &= \int F \operatorname{sen} \alpha \, ds \end{aligned} \qquad (d)$$

Librodot

En estas expresiones las integrales simples se extienden a todo el contorno y es el ángulo entre la normal y el eje x como se indica en la figura 54. Mediante la primera de las expresiones (d) podemos poner la expresión (e) como sigue

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\,\delta w\,dx\,dy + 2 \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial\,\delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\,\delta w\right)\cos\alpha\,ds \quad (e)$$

Recorriendo el contorno en el sentido indicado en la figura 54, tenemos

$$\frac{\partial\,\delta w}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\frac{dn}{dx} + \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\frac{ds}{dx} = \frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\operatorname{sen}\alpha$$

Con esta transformación la expresión (e) toma la forma:

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\,\delta w\,dx\,dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\operatorname{sen}\alpha\right)\cos\alpha\,ds - 2 \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\,\delta w\cos\alpha\,ds \quad (f)$$

Integrando por partes tenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\,ds = \left|\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\delta w\right| - \int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)\delta w\,ds$$

El primer término del segundo miembro de esta expresión se anula, puesto que estamos integrando sobre el contorno completo de la placa. Así obtenemos

$$\int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\frac{\partial\,\delta w}{\partial s}\,ds = -\int \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right)\delta w\,ds$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (f) obtenemos finalmente la variación del primer término de la expresión de la energía de deformación, tal variación toma la forma siguiente:

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\,\delta w\,dx\,dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds + 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\cos\alpha\right]\delta w\,ds \quad (g)$$

Transformando de modo análogo las variaciones de los otros términos de la expresión (117) obtenemos

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\,\delta w\,dx\,dy + 2 \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds - 2 \int \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right) + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\operatorname{sen}\alpha\right]\delta w\,ds \quad (h)$$

$$\delta \iint \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\,dx\,dy = 2 \iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\,\delta w\,dx\,dy + \int \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds - \int \left\{\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]\right\}\delta w\,ds \quad (i)$$

Librodot

$$\delta \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy = 2\iint \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}\,\delta w\,dx\,dy + 2\int \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\,\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds + \int \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\right] - \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\cos\alpha - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\right\}\delta w\,ds \quad (j)$$

Usando estas fórmulas la variación de la energía potencial vendrá dada en la forma siguiente:

$$\delta V = D\left(\iint \Delta\Delta w\,\delta w\,dx\,dy + \int\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,dy}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \nu\,\Delta w\right]\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds + \int\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right)\operatorname{sen}\alpha\right\}\delta w\,ds\right) \quad (118)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (b) y recordando que δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son cantidades arbitrariamente pequeñas que satisfacen las condiciones de contorno, deducimos que la ecuación (b) se satisface solamente si se cumplen las tres ecuaciones siguientes:

$$\iint (D\Delta\Delta w - q)\,\delta w\,dx\,dy = 0 \quad (k)$$

$$\int\left\{D\left[(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \nu\,\Delta w\right] + M_n\right\}\frac{\partial\,\delta w}{\partial n}\,ds = 0 \quad (l)$$

$$\int\left(D\left\{(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\right] - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right)\operatorname{sen}\alpha\right\} - \left(Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}\right)\right)\delta w\,ds = 0 \quad (m)$$

La primera de estas ecuaciones se cumple únicamente si en todo punto de la superficie media de la placa tenemos

$$D\Delta\Delta w - q = 0$$

que es la ecuación diferencial (104) de la deformada. Las ecuaciones (l) y (m) dan las condiciones de borde.

Si la placa está empotrada en un borde δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ son nulas en todo el borde y se satisfacen las ecuaciones (l) y (m) en el caso de borde simplemente apoyado $\delta w = 0$ y $M_n = 0$.

Por lo tanto se satisface la ecuación (m) y se satisfará (l) si

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \nu\,\Delta w = 0 \quad (n)$$

Librodot

En el caso particular de borde recto paralelo al eje y, es $\alpha = 0$ y de (n) obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

como debía ser para borde simplemente apoyado.

Si el borde de una placa está totalmente libre, los valores δw y $\partial(\delta w)/\partial n$ en las ecuaciones (l) y (m) son arbitrarios; además $M_n = 0$ y $Q_n - (\partial M_{nt}/\partial s) = 0$. Por consiguiente, de las ecuaciones (l) y (m) obtenemos para borde libre

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + \nu\,\Delta w = 0$$

$$(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\right]$$
$$-\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\alpha - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right)\operatorname{sen}\alpha = 0$$

Estas condiciones están de acuerdo con las ecuaciones (116) que ya se obtuvieron (v. pág. 108). En el caso particular de un borde recto paralelo al eje y, es $\alpha = 0$ y obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} = 0$$

Estas ecuaciones coinciden con las ecuaciones (112) y (113) ya obtenidas anteriormente.

En el caso en que haya unos momentos M_n y fuerzas transversales $Q_n - (\partial M_{nt}/\partial s)$ dados repartidos en el contorno de la placa, pueden determinarse de nuevo las correspondientes condiciones de borde a partir de las ecuaciones (l) y (m).

24. *Reducción del problema de la flexión de una placa a la deformación de una membrana*

Se presentan casos en que es más sencillo sustituir la ecuación diferencial (103) de cuarto orden deducida para una placa por dos ecuaciones de segundo orden que representan las flechas de una membrana[1]. Para ello empleamos la forma (104) de esta ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{q}{D} \qquad (a)$$

y teniendo en cuenta que sumando las dos expresiones (101) de los momentos flectores tenemos

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (b)$$

[1] Este método de estudio de la flexión de las placas fue introducido por H. Marcus en su libro *Die. Theorie elastischer Gewebe*, 2.ª ed., pág. 12, Berlín, 1932.

Librodot

Introduciendo una nueva rotación

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{119}$$

Las ecuaciones (*a*) y (*b*) pueden escribirse en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= -q \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \tag{120}$$

Ambas ecuaciones son de la misma clase que la que se obtiene para una membrana[1] uniformemente tensada bajo carga transversal.

La solución de estas ecuaciones se simplifica mucho en el caso de placa simplemente apoyada de forma poligonal, en el cual en cada parte recta del contorno tenemos $\partial^2 w/\partial s^2 = 0$ por ser $w = 0$ en el contorno. Teniendo en cuenta que por ser el borde simplemente apoyado $M_n = 0$ deducimos también $\partial^2 w/\partial n^2 = 0$ en el contorno. Por lo tanto [v. ec. (34)] tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M}{D} = 0 \tag{c}$$

en el contorno según la segunda de las ecuaciones (111). Se ve que la solución del problema de la placa se reduce en este caso a la integración sucesiva de las dos ecuaciones (120). Comencemos con la primera y determinemos una solución que satisfaga la condición $M = 0$ en el contorno[2]. Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación e integrándola, hallamos las flechas w. Ambos problemas son de la misma clase que el problema de calcular las flechas de una membrana uniformemente tensada, con carga lateral y flecha nula en el contorno. Este último problema es mucho más sencillo que el problema de la placa y puede siempre resolverse con aproximación suficiente utilizando un método de integración aproximado como el de Ritz o el método de diferencias finitas. Se estudiarán más adelante (v. aps. 80 y 82) algunos ejemplos de aplicación de estos últimos métodos. En el estudio de los problemas de torsión[3] se dan varias aplicaciones del método Ritz.

Otro caso sencillo de aplicación de la ecuaciones (120) es el de la placa poligonal simplemente apoyada flexada por momentos M_n uniformemente repartidos en el contorno. En este caso las ecuaciones (120) toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \tag{121}$$

[1] Véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 269, 1951.

[2] Nótese que si la forma de la placa no es poligonal, M generalmente no se anula en el contorno cuando es $M_n = 0$.

[3] Véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 280.

Librodot

En el borde recto tenemos de nuevo $\partial^2 w/\partial s^2 = 0$. De donde

$$M_n = -D\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}$$

y en el contorno tenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = -\frac{M_n}{D} = -\frac{M}{D}$$

Esta condición de contorno y la primera de las ecuaciones (121) se cumplirán dando a M el valor constante $M = M_n$ en todos los puntos de la placa, lo que equivale a que la suma de momentos flectores M_x y M_y es constante en toda la placa. Las flechas se hallarán entonces de la segunda de las ecuaciones (121)[1] que toma la forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{M_n}{D} \qquad (d)$$

Puede deducirse de esto que, en el caso de una placa poligonal simplemente apoyada, flexada por momentos M_n uniformemente distribuidos en el contorno, la deformada de la placa es la misma que para una membrana

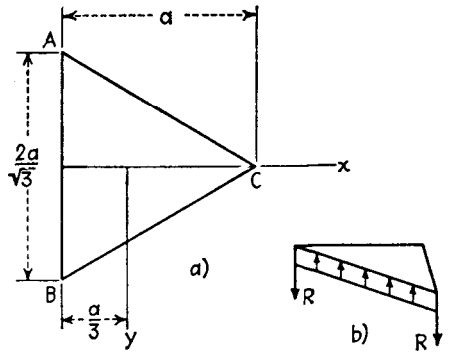


FIG. 55

uniformemente tensada con carga uniformemente distribuida. Hay muchos casos para los cuales las soluciones del problema de la membrana son conocidas. Estas soluciones pueden aplicarse inmediatamente en el estudio de los correspondientes casos de placas. Sea, por ejemplo, el caso de una placa triangular regular simplemente apoyada flexada por momentos M_n uniformemente distribuidos en el contorno. La deformada es la misma que la de la membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada. Esta última se puede obtener experimentalmente con facilidad, tendiendo una lámina de agua de jabón sobre un contorno triangular y cargándola uniformemente con aire a presión[2].

[1] El primero que lo demostró fue S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 254, 1933.

[2] Tales experimentos se usan para resolver problemas de torsión; véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 289.

Librodot

La expresión analítica de la deformada es también comparativamente sencilla en este caso. Tomemos el producto de los primeros miembros de las ecuaciones de los tres lados del triángulo

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - y - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27}$$

Esta expresión evidentemente se anula en el contorno. Por lo tanto la condición de contorno $w = 0$ se cumple para la membrana si las flechas tienen la expresión

$$w = N\left[\frac{x^3 - 3y^2x}{3} - \frac{a(x^2 + y^2)}{3} + \frac{4a^3}{3 \cdot 27}\right] \qquad (e)$$

Donde N es un factor constante cuyo valor se elige de modo que se cumpla la ecuación (d). De este modo obtenemos la solución buscada

$$w = \frac{M_n}{4aD}\left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3\right] \qquad (f)$$

Sustituyendo $x = y = 0$, obtenemos la flecha en el centro del triángulo

$$w_0 = \frac{M_n a^2}{27D} \qquad (g)$$

Las expresiones de los momentos flectores y torsores son según las ecuaciones (101) y (102)

$$M_x = \frac{M_n}{2}\left[1 + \nu - (1 - \nu)\frac{3x}{a}\right]$$
$$M_y = \frac{M_n}{2}\left[1 + \nu + (1 - \nu)\frac{3x}{a}\right] \qquad (h)$$
$$M_{xy} = -\frac{3(1 - \nu)M_n y}{2a}$$

Los esfuerzos cortantes según las ecuaciones (106) y (107) son

$$Q_x = Q_y = 0 \qquad (1)$$

En el contorno según la ecuación (d) de el apartado 22, el esfuerzo cortante es $Q_n = 0$ y el momento flector es igual a M_n. El momento torsor en el lado BC (fig. 55) según las ecuaciones (e) del apartado 22 es:

$$M_{nt} = \frac{3(1 - \nu)M_n}{4a}(y - \sqrt{3}\,x)$$

Las reacciones verticales que actúan en el lado BC (fig. 55) son

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = -\frac{3(1 - \nu)}{2a}M_n \qquad (i)$$

Librodot

Por simetría deducimos que las mismas reacciones uniformemente distribuidas actúan también en los otros bordes de la placa. Estas fuerzas están compensadas por las reacciones en las esquinas de la placa rectangular, cuyo valor puede hallarse como se indica en la página 105 y es

$$R = 2(M_{nt})_{x=\frac{1}{2}a,y=0} = (1 - \nu)\sqrt{3}\,M_n \qquad (j)$$

La distribución de las reacciones en el contorno está indicada en la figura 55 *b*). Las máximas tensiones de flexión están en las esquinas y actúan en el sentido de los planos bisectores de los ángulos. El valor de los correspondientes momentos flectores es según las ecuaciones (*h*)

$$(M_y)_{\text{máx}} = (M_y)_{x=\frac{1}{2}a} = \frac{M_n(3 - \nu)}{2} \qquad (k)$$

Este método de determinar la flexión de una placa poligonal debida a momentos uniformemente repartidos en el contorno puede aplicarse al cálculo de las tensiones térmicas producidas en tales placas por calentamiento no uniforme. Al estudiar las tensiones térmicas en placas sometidas a tracción se vio en el apartado 14 [ec. (*b*)] que el calentamiento no uniforme produce momentos flectores uniformemente repartidos en el contorno de la placa, momentos que evitan toda flexión de la placa. El valor de estos momentos es[1]

$$M_n = \frac{\alpha t D(1 + \nu)}{h} \qquad (l)$$

Para obtener las tensiones térmicas en el caso de una placa simplemente apoyada basta superponer a las tensiones producidas en la flexión pura debida da los momentos (*l*) las tensiones que se producen en una placa simplemente apoyada en los bordes por los momentos flectores $-\alpha t d(1 + \nu)/h$ uniformemente repartidos en el contorno. La solución de este último problema puede obtenerse sin gran dificultad, en el caso de una placa de forma poligonal[2], como ya se explicó.

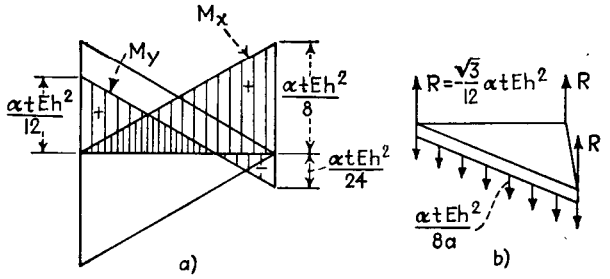


FIG. 56

[1] Se supone que la cara superior de la placa mantiene una temperatura más alta que la cara inferior y la placa así tiene tendencia a flexar con la convexidad hacia arriba.

[2] Véase el estudio de J. L. Maulbetsch, *J. Appl. Mechanics*, vol. 2, pág. 141, 1935.

Librodot

Tomemos de nuevo como ejemplo una placa triangular regular si los bordes están sujetos, los momentos flectores debidos a un calentamiento no uniforme son

$$M'_x = M'_y = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} \qquad (m)$$

Para hallar los momentos flectores M_x y M_y para una placa simplemente apoyada debemos superponer a los momentos (m) los que se obtienen de las ecuaciones (h) haciendo $M_n = -\alpha t D(1+\nu)/h$.

De esta forma se obtiene finalmente

$$M_x = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} - \frac{\alpha t D(1+\nu)}{2h}\left[1+\nu-(1-\nu)\frac{3x}{a}\right] = \frac{\alpha t E h^2}{24}\left(1+\frac{3x}{a}\right)$$

$$M_y = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} - \frac{\alpha t D(1+\nu)}{2h}\left[1+\nu+(1-\nu)\frac{3x}{a}\right] = \frac{\alpha t E h^2}{24}\left(1-\frac{3x}{a}\right)$$

$$M_{xy} = \frac{1}{8}\frac{\alpha t E h^2 y}{a}$$

Las reacciones pueden obtenerse de las ecuaciones (i) y (g) sustituyendo $M_n = -\alpha t D(1+\nu)/h$. De ahí deducimos

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \frac{\alpha t E h^2}{8a} \qquad R = -\frac{\sqrt{3}\,\alpha t E h^2}{12}$$

Los valores obtenidos para los momentos y reacciones ocasionados por un calentamiento no uniforme están representados en la figura 56 *a*) y *b*), respectivamente.

25. *Influencia de las constantes elásticas en el valor de los momentos flectores*

Se ha visto en las ecuaciones (101) y (102) que los valores de los momentos flectores y torsores están considerablemente influidos por el valor numérico del coeficiente de Poisson. Por otra parte puede demostrarse con facilidad que para casos de carga transversal el valor de Dw es independiente de E y ν esté la placa simplemente apoyada o empotrada y sean sus bordes rectos o no lo sean.

Suponiendo cualquier combinación de estas condiciones de contorno consideremos el siguiente problema. Dados unos momentos M_x y M_y para un valor de ν, calcular los nuevos valores de estos momentos para un valor ν' de la misma constante elástica. Sean M'_x y M'_y los nuevos valores de los momentos flectores. Escribiendo las ecuaciones (101) primero para ν y después para ν', eliminando entre ellas las curvaturas $\partial^2 w/\partial x^2$ y $\partial^2 w/\partial y^2$ y resolviendo las ecuaciones resultantes, obtenemos para M'_x y M'_y

$$M'_x = \frac{1}{1-\nu^2}[(1-\nu\nu')M_x + (\nu'-\nu)M_y]$$
$$M'_y = \frac{1}{1-\nu^2}[(1-\nu\nu')M_y + (\nu'-\nu)M_x] \qquad (122)$$

Librodot

Así pueden calcularse M'_x y M'_y si se conocen M_x y M_y.

Si la constante ν está incluida en alguna de las condiciones de contorno, como ocurre en el caso de borde libre [ec. (112)], las ecuaciones (122) ya no son válidas.

Si la placa está elásticamente apoyada o elásticamente empotrada, los momentos dependen también del valor de la rigidez a flexión D de la placa respecto a la rigidez de la coacción.

Las tensiones térmicas, finalmente están afectadas no sólo por los factores mencionados, sino también por el valor absoluto de la rigidez D de la placa.

En la tabla 5 se dan valores medios de ν, para algunos materiales. El último valor de la tabla varía considerablemente según la edad del hormigón, tipo de áridos y otros factores[1].

TABLA 5

Valores medios del módulo de Poisson ν

Material	ν
Acero	0,30
Aluminio	0,30
Vidrio	0,25
Hormigón	0,15-0,25

26. Teoría exacta de placas

La ecuación diferencial (103) que junto con las condiciones de borde, define las flechas de una placa, se dedujo (v. ap. 21) despreciando el efecto que tienen sobre la flexión la tensión normal σ_z y las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz}. Esto significa que en la deducción de esta ecuación se ha considerado que las capas delgadas en planos paralelos al plano medio están en estado de tensión plana en que sólo las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} pueden ser distintas de cero. Uno de los casos más sencillos de esta clase es el de flexión pura. La deformada en este caso es una función de segundo grado en x e y [v. ec. (c), ap. 11] que satisface la ecuación (103). Las tensiones σ_x, σ_y y τ_{xy} son proporcionales a z e independientes de x e y.

Hay otros casos de flexión en que se produce rigurosamente una distribución plana de tensiones. Sea por ejemplo una placa circular con un agujero circular en el centro, flexada por momentos M_r uniformemente repartidos en el contorno del agujero (fig. 57). Cada capa delgada de la placa, separada por dos planos próximos paralelos al plano medio está en las mismas condiciones tensionales que un cilindro de pared delgada sometido a compresión o tracción uniforme [fig. 57 *b*)]. La suma $\sigma_r + \sigma_t$ de las tensiones principales es constante en este caso[2] y puede deducirse que la deformación de la capa en la dirección z es también constante y no interfiere con la deformación de las capas adyacentes. Por lo tanto tenemos de nuevo una distribución plana de tensiones y la ecuación (103) es válida.

Veamos ahora el caso general de la forma de la deformada de una placa cuando la flexión da por resultado una distribución plana de tensiones. Para resolver esta cuestión hay que considerar las tres ecuaciones diferenciales de equilibrio y las seis condiciones de compatibilidad. Si se desprecian las fuerzas de masa estas ecuaciones son[3]:

[1] El código alemán (DIN 4227) de valores de ν que pueden expresarse aproximadamente por $\nu = \sqrt{f'_c}/350$, siendo f'_c la resistencia a compresión del hormigón a 28 días en libras por pulgada cuadrada. Véase también J. C. Simmons, *Mag. of Concrete Research*, vol. 8, página 39, 1956.

[2] Véase Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 60.

[3] Véase *ibid.*, págs. 229, 232.

Librodot

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (a)$$
$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\Delta_1 \sigma_x = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$
$$\Delta_1 \sigma_y = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \qquad (b)$$
$$\Delta_1 \sigma_z = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

$$\Delta_1 \tau_{xy} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}$$
$$\Delta_1 \tau_{xz} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial z} \qquad (c)$$
$$\Delta_1 \tau_{yz} = -\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y\, \partial z}$$

en las cuales

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

y

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Sumando las ecuaciones (b) hallamos que

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \Delta_1 \theta = 0 \qquad (d)$$

es decir, que la suma de las tensiones normales es una función armónica. En el caso de tensiones planas $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$ y de las dos últimas ecuaciones (c) y la última de las (b) se deduce que $\partial\theta/\partial z$ es una constante que denominaremos β. Según esto la expresión general de θ en el caso de tensiones planas es

$$\theta = \theta_0 + \beta z \qquad (e)$$

donde θ_0 es una función armónica plana, es decir, tal que

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} = \Delta \theta_0 = 0$$

Vemos que en el caso de tensiones planas θ se compone de dos partes, θ_0 independiente de z y β proporcional a z. La primera parte no varía en el espesor de la placa. Depende de la deformación de la placa en su propio plano y puede omitirse si interesa únicamente la flexión de las placas. De este modo podemos tomar en adelante

$$\theta = \beta z \qquad (f)$$

Las ecuaciones de equilibrio (a) se satisfarán en el caso de distribución plana de tensiones si tomamos

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} \qquad (g)$$

donde φ es la función de tensiones. Veamos ahora la forma general de esta función.

Librodot

Sustituyendo las expresiones (g) en la ecuación (f) tenemos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \beta z \tag{h}$$

Además de la primera de las ecuaciones (b) deducimos que

$$\Delta_1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{o bien} \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta_1\varphi = 0$$

que utilizando la ecuación (h) puede ponerse en la forma siguiente

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{i}$$

De la misma manera que deducimos de la segunda y tercera de las ecuaciones (b)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{j}$$

De las ecuaciones (i) y (j) se sigue que $\partial^2\varphi/\partial z^2$ es función lineal de x e y. Esta función puede tomarse igual a cero sin que ello modifique los valores de las tensiones dadas por las expresiones (g). En tal caso, la expresión general de la función de tensiones es

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 z \tag{3}$$

donde φ_0 es una función armónica plana y φ_1, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = \beta \tag{k}$$

Puesto que no estamos interesados en las deformaciones de la placa en su plano podemos prescindir en este estudio de φ_0 y tomar como expresión general de la función de tensiones

$$\varphi = \varphi_1 z \tag{l}$$

Sustituyéndola en las ecuaciones (g) pueden ahora calcularse las tensiones y determinarse los desplazamientos mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ &\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{m}$$

Para los desplazamientos perpendiculares a la placa obtenemos de este modo[1]

$$w = -\frac{\beta}{2E}(x^2 + y^2 + \nu z^2) + \frac{1+\nu}{E}\varphi_1$$

y la flecha de la superficie media de la placa es

$$w = -\frac{\beta}{2E}(x^2 + y^2) + \frac{1+\nu}{E}\varphi_1 \tag{n}$$

las tensiones correspondientes son según las ecuaciones (g) y (l)

$$\sigma_x = z\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} \qquad \sigma_y = z\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} \qquad \tau_{xy} = -z\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}$$

[1] En la última obra citada se dan varios ejemplos de cálculo de u, v y w mediante las ecuaciones (m).

Librodot

y los momentos flectores y torsor

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz = \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} \qquad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz = \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}$$
$$M_{xy} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz = \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} \qquad (o)$$

Para las curvaturas y torsión de la placa, de la ecuación (n) hallamos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\beta}{E} + \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}$$

de donde mediante las ecuaciones (k) y (o) obtenemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{M_x}{D}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{M_y}{D} \qquad (p)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} = \frac{M_{xy}}{(1-\nu)D}$$

De este análisis puede deducirse que cuando la flexión de una placa se resuelve en una distribución plana de tensiones, las flechas w [v. ec. (n)] verifican rigurosamente la ecuación (103) e igualmente los momentos flectores y torsor vienen dados por las ecuaciones (101) y (102). Si se toma la solución de la ecuación (k) en la forma de función de segundo grado en x e y, la deformada (n) es también de segundo grado, lo que corresponde a las flechas en flexión pura. En general de la ecuación (k) puede deducirse que la flecha de una placa, en el caso de distribución plana de tensiones es

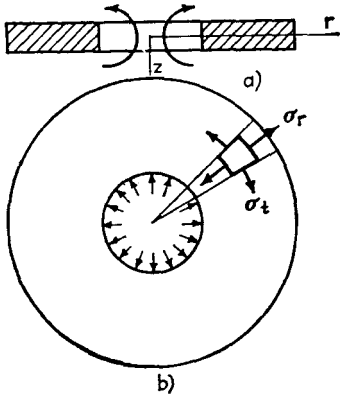


FIG. 57

la misma que la de una membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada. La placa indicada en la figura 57 representa un caso particular de tal flexión, caso para el cual la solución de la ecuación (k), en coordenadas polares, es

$$\varphi_1 = Ar^2 + B \ln r + C$$

donde A, B y C son constantes a determinar de modo que se cumplan las condiciones de borde.

Librodot

Las placas de forma poligonal simplemente apoyadas y flexadas por momentos uniformemente repartidas en el contorno, son otro ejemplo de flexión en que la deformada satisface la ecuación (*n*) y se cumplen rigurosamente las ecuaciones (101), (102) y (103). Como puede verse por las ecuaciones (*k*) y (*o*) en todos estos casos tenemos

$$M_x + M_y = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right) = \frac{\beta h^3}{12}$$

es decir, la suma de los momentos flectores en dos direcciones perpendiculares es constante en toda la placa.

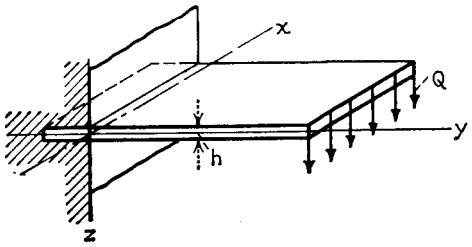


FIG. 58

Consideremos ahora el caso en que la flexión de la placa da por resultados una distribución de tensiones plana generalizada, es decir, tal que la tensión normal σ_z es nula en todos los puntos de la placa y las tensiones transversales τ_{xz} y τ_{yz} son cero en las caras de la placa $z = \pm h/2$. La flexión de una placa rectangular empotrada en un borde y con carga uniformemente repartida en el borde opuesto (fig. 58) es un ejemplo de este tipo de flexión. Por la teoría de flexión de vigas rectangulares sabemos que en este caso $\sigma_z = 0$ en todos los puntos de la placa y τ_{xz} es cero en las caras de la placa y varía a lo largo del espesor de la placa de acuerdo con la ley parabólica

$$\tau_{xz} = \frac{6Q}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones generales (*a*), (*b*) y (*c*) y siguiendo el procedimiento seguido en el caso de distribución plana de tensiones[1] hallamos que la expresión general de la deformada en este caso tiene la forma

$$w = \frac{1}{E}\left[\frac{h^2\varphi}{4} + (1+\nu)\varphi_1\right] \qquad (q)$$

en que φ es una función armónica de x e y y φ_1 satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} = -\frac{1-\nu}{1+\nu}\varphi$$

Puede deducirse de nuevo en este caso que se mantiene la ecuación (103) con $q = 0$.

[1] La solución rigurosa de este caso fue dada por Saint-Venant; véase la traducción de Clebsch de *Théorie de l'élasticité des corps solides*, pág. 337. Un estudio riguroso de la teoría de flexión de placas fue dado por J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 31, pág. 100, 1900. Véase también A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, pág. 473, 1927. Los resultados que damos en nuestro estudio anterior están tomados de este último libro.

Librodot

Las expresiones de los momentos flectores y torsor y de los esfuerzos cortantes en este caso son

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{8+\nu}{40}Dh^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{8+\nu}{40}Dh^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w \\ M_{xy} &= D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{8+\nu}{40}Dh^2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta w \\ Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w \qquad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w \end{aligned} \tag{123}$$

Por lo tanto las expresiones de los esfuerzos cortantes coinciden con las expresiones (108) dadas por la teoría aproximada, pero las expresiones de los momentos son diferentes; los segundos términos de estas expresiones representan el efecto de los esfuerzos cortantes.

Estos términos correctores pueden obtenerse de un modo elemental utilizando el mismo razonamiento que en el caso de flexión de vigas. Considerando la curvatura en el plano xz, podemos establecer que la curvatura total viene producida por dos factores, los momentos flectores M_x y M_y y el esfuerzo cortante Q_x. La curvatura producida por los momentos flectores se obtiene restando de la curvatura total $-\partial^2 w/\partial x^2$ la parte $-\partial(kQ_x/hG)/\partial x$ producida por el esfuerzo cortante[1]. Sustituyendo

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial\left(\dfrac{kQ_x}{hG}\right)}{\partial x}$$

y $-(\partial^2 w/\partial y^2) + \partial(kQ_y/hG)/\partial y$ en lugar de $-\partial^2 w/\partial x^2$ y $-\partial^2 w/\partial y^2$ en las ecuaciones (101) y empleando las dos últimas ecuaciones del sistema (123) hallamos para los momentos flectores las expresiones

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{kDh^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{kDh^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w \end{aligned}$$

Estas ecuaciones coinciden con las dos primeras ecuaciones del sistema (123) si tomamos

$$\frac{k}{6} = \frac{8+\nu}{40}$$

Para $\nu = 0{,}3$ esto da $k = 1{,}245$.

Por la teoría de flexión de vigas sabemos que la corrección debida al esfuerzo cortante es pequeña y puede despreciarse si el canto h es pequeño en comparación con la luz de la viga. La misma conclusión se mantiene en el caso de placas.

[1] k es un factor numérico que en el caso de vigas depende de la forma de la sección transversal.

Librodot

Las expresiones exactas de las tensiones son

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h^2 z}{4}-\frac{2-\nu}{6}z^3\right)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h^2 z}{4}-\frac{2-\nu}{6}z^3\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w \qquad (r)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h^2 z}{4}-\frac{2-\nu}{6}z^3\right)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta w$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w \qquad \tau_{yz} = -\frac{E(h^2-4z^2)}{8(1-\nu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w \qquad \sigma_z = 0$$

Los segundos términos de los segundos miembros de las ecuaciones que dan σ_x, σ_y y τ_{xy} son las correcciones debidas al efecto de los esfuerzos cortantes en la flexión. Se ve que las tensiones ya no son proporcionales a la distancia z al plano medio, sino que contienen un término z^3. Las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} varían de acuerdo con la misma ley parabólica en el caso de vigas rectangulares. En el caso de distribución plana de tensiones, Δw es constante, y las fórmulas (r) coinciden con las dadas por la teoría aproximada.

El problema de una placa uniformemente cargada puede también estudiarse rigurosamente del mismo modo. Así puede demostrarse que la expresión general de las flechas en este caso se obtiene sumando a la expresión (q) el término

$$\frac{1}{64}\frac{q}{D}(x^2+y^2)\left(x^2+y^2-\frac{2h^2}{1-\nu}\right) \qquad (s)$$

que satisface también la ecuación (103) de la teoría aproximada. Las expresiones de los momentos flectores no coinciden con las ecuaciones (101) de la teoría aproximada, sino que contienen términos adicionales de corrección. Si el espesor de la placa es pequeño en comparación con las otras dimensiones, estos términos son pequeños y pueden despreciarse.

En todos los casos anteriores se han estudiado soluciones generales de problemas de flexión de placas sin considerar las condiciones de borde. Hay también soluciones rigurosas de varios problemas teniendo en cuenta las condiciones de borde[1].

Estas soluciones demuestran que si la placa puede considerarse «delgada», la teoría usual es suficientemente aproximada para casos prácticos excepto:

1. En la proximidad de cargas transversales fuertemente concentradas; y
2. En zonas estrechas de borde, especialmente cerca de las esquinas de las placas y en torno a agujeros de un diámetro del mismo orden de magnitud que el propio espesor de la placa.

[1] En estos últimos tiempos la teoría rigurosa de placas ha atraído el interés de los ingenieros y se han publicado varias memorias importantes sobre este tema. Mencionaremos aquí las siguientes: S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, págs. 203 y 305, 1933. B. Galerkin, *Compt. rend.*, vol. 190, pág. 1047; vol. 193, pág. 568; vol. 194, pág. 1440. G. D. Birkhoff, *Phil. Mag.*, vol. 43, pág. 953, 1922. C. A. Garabedian, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 25, página 343, 1923. *Compt. rend.*, vols. 178 (1924), 180 (1925), 186 (1928), 195 (1932). R. Archie Higdon y D. L. Holl, *Duke Math. J.*, vol. 3, pág. 18, 1937. A. C. Stevenson, *Phil. Mag.*, ser. 7, vol. 33, pág. 639, 1942. R. Ohlig, *Ingr.-Arch.*, vol. 13, pág. 155, 1942. I. N. Sneddon, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 42, pág. 260, 1946. L. Leibenson, *Works*, vol. 1, pág. 111, Moscú, 1951. H. Jung, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 57, 1952. E. Koppe, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 37, pág. 38, 1957. Para tensiones térmicas véase K. Marguerre, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 15, pág. 369, 1935, e I. S. Sokolnikoff y E. S. Sokolnikoff, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 45, pág. 235, 1939.

Librodot

En el primero de estos casos la tensión normal σ_z y las tensiones tangenciales deben considerarse de la misma importancia en cuanto a su efecto sobre la deformación de la placa. En la determinación de la corrección necesaria sobre las tensiones dadas por la teoría aproximada (v. pág. 90) puede prescindirse de considerar las condiciones de borde. En tales circunstancias la solución más conveniente del problema la proporciona la teoría de placas gruesas.

En el segundo caso el efecto de la tensión normal σ_z sobre la deformación es secundario comparado con el efecto de las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz}. Recientemente se han desarrollado varias teorías modificadas de placas delgadas, teniendo en cuenta este último efecto (v. ap. 39). Estas teorías son más aceptables que la teoría más rigurosa de placas gruesas para el análisis de tensiones en las zonas de borde de las placas.

Librodot