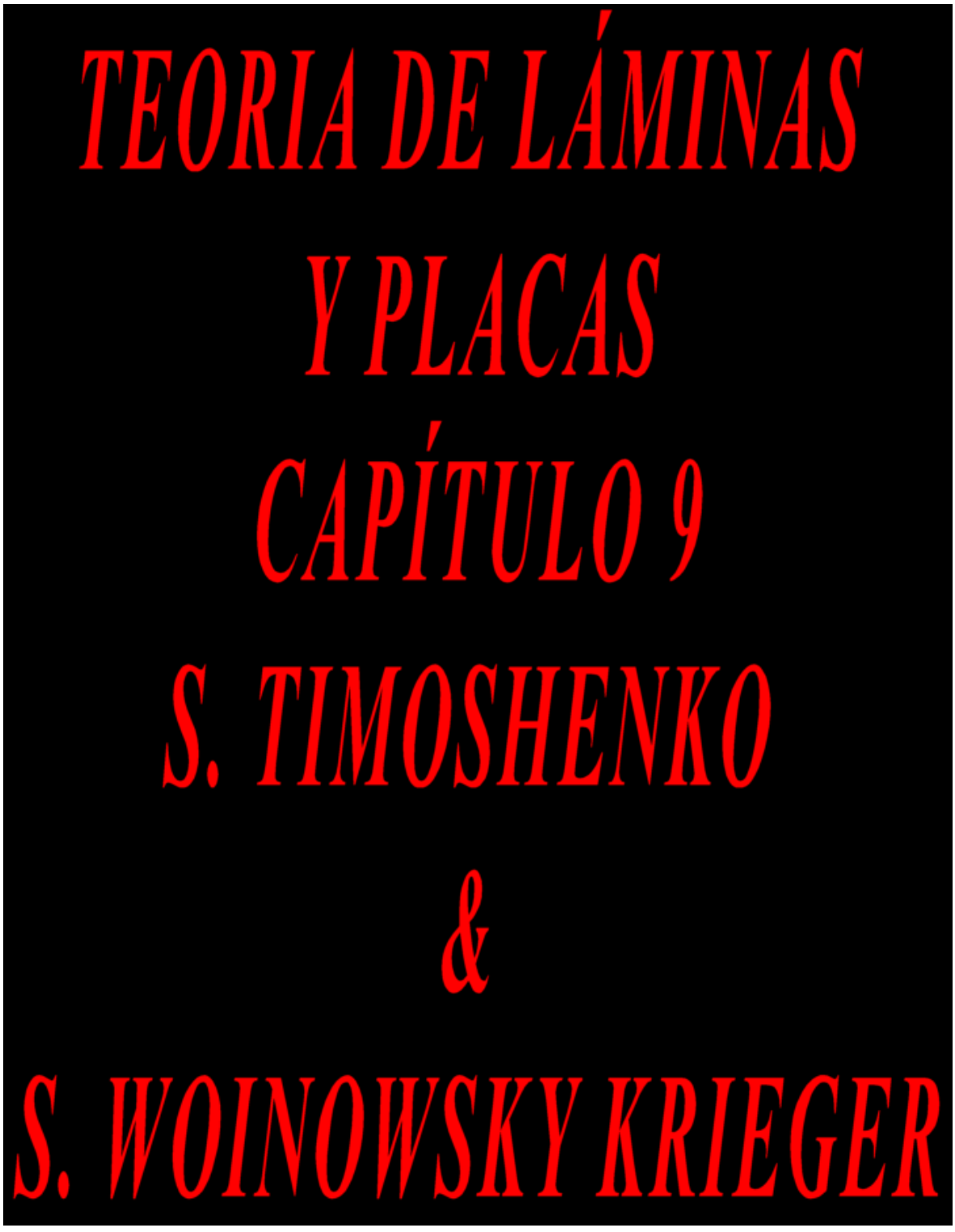
TEORIA DE LÁMINAS Y PLACAS, CAPÍTULO 9
S. TIMOSHENKO & S. WOINOWSKY KRIEGER



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

9

Placas de formas diversas

62. *Ecuaciones de la flexión de placas en coordenadas polares*

Se han utilizado (cap. 3) las coordenadas polares en el estudio de la flexión simétrica de placas circulares. Pueden utilizarse ventajosamente en el caso general de flexión de placas circulares.

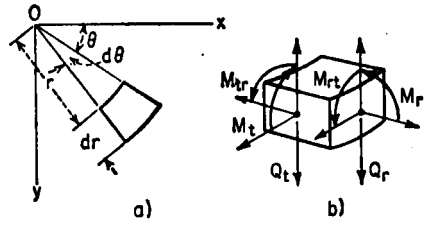


FIG. 136

Si se toman las coordenadas r y θ como indica la figura 136 *a*), las relaciones entre coordenadas polares y cartesianas son

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \text{arctg}\ \frac{y}{x} \tag{a}$$

de donde

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos}{r} \tag{b}$$

Utilizando estas expresiones, se obtiene la pendiente de la deformada de una placa, en la dirección de las x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta \qquad (c)$$

Puede escribirse una relación similar para la pendiente en la dirección de las y. Para determinar la curvatura en coordenadas polares se precisan las derivadas segundas. Repitiendo dos veces la operación indicada en (c), se encuentra

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 w}{\partial \theta\,\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}$$

$$+ 2\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} \qquad (d)$$

De la misma manera se obtiene

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \theta\,\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}$$

$$- 2\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} \qquad (e)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta}\frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

$$- \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2} \qquad (f)$$

Con esta transformación de coordenadas, se obtiene

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \qquad (g)$$

Repitiendo dos veces esta operación, la ecuación diferencial en derivadas parciales (103) de la deformada de una placa cargada transversalmente resulta, en coordenadas polares:

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) = \frac{q}{D} \qquad (191)$$

Cuando la carga está repartida simétricamente respecto al centro de la placa, la flecha w es independiente de θ y (191) coincide con (58) (v. pág. 72), obtenida en el caso de placas circulares cargadas simétricamente.

Librodot

Consideremos un elemento determinado en la placa por dos planos axiales adyacentes, que forman un ángulo $d\theta$ y por dos superficies cilíndricas de radios r y $r + dr$ [fig. 136 *b*)]. Representamos por M_r, M_t y M_{rt} los momentos flectores y torsor que actúan sobre el elemento por unidad y de longitud y tomamos las direcciones positivas como indica la figura. Para expresar estos momentos en función de la flecha w de la placa, suponemos que el eje x coincide con el radio r. Los momentos M_r, M_t y M_{rt} tienen entonces los mismos valores que M_x, M_y M_{xy} en el mismo punto y sustituyendo θ por 0 en (*d*), (*e*) y (*f*), se tiene

$$M_r = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\theta=0} = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]$$

$$M_t = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\theta=0} = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) \qquad (192)$$

$$M_{rt} = (1-\nu)D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)_{\theta=0} = (1-\nu)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

De la misma manera, con ayuda de (108), se encuentran las expresiones de los esfuerzos cortantes[1]:

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) \qquad \text{y} \qquad Q_t = -D\frac{\partial(\Delta w)}{r\,\partial\theta} \qquad (193)$$

donde w está dado por la expresión (*g*).

En el caso de un borde empotrado las condiciones de contorno de una placa circular de radio a, son:

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \qquad (h)$$

En el caso de borde simplemente apoyado

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad (M_r)_{r=a} = 0 \qquad (i)$$

Para un borde libre (v. pág. 108)

$$(M_r)_{r=a} = 0 \qquad V = \left(Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r\,\partial\theta}\right)_{r=a} = 0 \qquad (j)$$

La solución general de (191) se escribe, como anteriormente, en forma de una suma

$$w = w_0 + w_1 \qquad (k)$$

donde w_0 es una solución particular de (191) y w_1 la solución de la ecuación homogénea

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_1}{\partial\theta^2}\right) = 0 \qquad (194)$$

[1] La dirección de Q_r en la figura 136 *b*) es opuesta a la de la figura 28. Lo que explica el signo negativo de (193).

Librodot

Esta última se puede escribir mediante la siguiente serie[1]:

$$w_1 = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} R'_m \operatorname{sen} m\theta \tag{195}$$

en la que R_0, R_1..., R'_1, R'_2... son funciones únicamente de la coordenada radial r. Sustituyendo esta serie en (194), se obtiene para cada una de estas funciones, una ecuación diferencial ordinaria de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2R_m}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_m}{dr} - \frac{m^2R_m}{r^2}\right) = 0$$

cuya solución general para $m > 1$, es

$$R_m = A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \tag{l}$$

Para $m = 0$ y $m = 1$ las soluciones son:

$$R_0 = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \ln r$$

y

$$R_1 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \tag{m}$$

Se pueden escribir expresiones similares para las funciones R'_m. Sustituyendo R_m y R'_m por estas expresiones en la serie (195), se obtiene la solución general de la ecuación (194). Las constantes A_m, B_m..., D_m deben estar determinadas en cada caso particular de forma que cumplan las condiciones de contorno. La solución R_0 que es independiente de θ, representa la flexión simétrica de las placas circulares. En el capítulo 3 se han estudiado varios casos particulares de este tipo

63. *Placas circulares bajo carga que varía linealmente*

Si una placa circular está sometida a una carga repartida como indica la figura 137, podemos dividirla en dos partes: 1) una carga uniformemente repartida de intensidad $1/2(p_2 + p_1)$ y 2) una carga que varía linealmente con intensidad nula en el diámetro CD de la placa e intensidades $-p$ y $+p$ en los extremos A y B del diámetro AB. El caso de carga uniforme se ha estudiado en el capítulo 3. Aquí tenemos que considerar únicamente la carga no uniforme representada en la figura por los dos triángulos rayados[2].

La intensidad de la carga q en un punto de coordenadas r y θ es

$$q = \frac{pr \cos \theta}{a} \tag{a}$$

[1] Solución debida a A. Clebsch en *Theorie der Elasticität fester Körper*, 1862.
[2] Este problema ha sido estudiado por W. Flugge, *Bauingenieur*, vol. 10, pág. 221, 1929.

Librodot

La solución particular de la ecuación (191) puede tomarse entonces en la forma siguiente

$$w_0 = A\,\frac{pr^5 \cos\theta}{a}$$

que después de sustituir en la ecuación (191), da

$$A = \frac{1}{192D}$$

De donde

$$w_0 = \frac{pr^5 \cos\theta}{192aD} \qquad (b)$$

Como solución de la ecuación homogénea (194) tomamos únicamente el término en R_1 de la serie (195) y suponemos

$$w_1 = (A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r)\cos\theta \qquad (c)$$

Siendo preferible trabajar con magnitudes adimensionales, introducimos en lugar de r la relación

$$\rho = \frac{r}{a}$$

Con la nueva notación la flecha de la placa resulta

$$w = w_0 + w_1 = \frac{pa^4}{192D}(\rho^5 + A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho)\cos\theta \qquad (d)$$

donde ϱ varía de 0 a 1. Las constantes A, B..., en esta expresión deben ahora determinarse a partir de las condiciones de contorno.

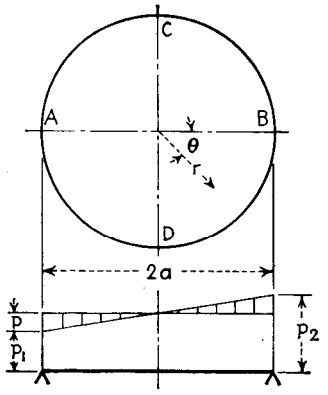


FIG. 137

Comencemos con el caso de una placa simplemente apoyada (fig. 137). En este caso la flecha w y el momento M_r en el contorno se anulan y obtenemos:

$$(w)_{\rho=1} = 0 \qquad (M_r)_{\rho=1} = 0 \qquad (e)$$

Librodot

En el centro de la placa ($\varrho = 0$) la flecha w y el momento M_r deben ser finitos. De aquí se deduce simultáneamente que las constantes C y D de la expresión (d) deben ser nulas. Las constantes que quedan A y B se hallan ahora de las ecuaciones (e) que dan:

$$(w)_{\rho=1} = \frac{pa^4}{192D}(1 + A + B)\cos\theta = 0$$

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{pa^2}{192}[4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B]\cos\theta = 0$$

Como estas ecuaciones deben ser realizadas para cualquier valor de θ, los factores delante del cos θ deben anularse. De este modo, resulta:

$$1 + A + B = 0$$
$$4(5 + \nu) + 2(3 + \nu)B = 0$$

y obtenemos

$$B = -\frac{2(5 + \nu)}{3 + \nu} \qquad A = \frac{7 + \nu}{3 + \nu}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (d) obtenemos para la flecha w:

$$w = \frac{pa^4\rho(1 - \rho^2)}{192(3 + \nu)D}[7 + \nu - (3 + \nu)\rho^2]\cos\theta \qquad (f)$$

Para calcular los momentos flectores y esfuerzos cortantes sustituimos la expresión (f) en las ecuaciones (192) y (193) de las cuales:

$$M_r = \frac{pa^2}{48}(5 + \nu)\rho(1 - \rho^2)\cos\theta$$
$$M_t = \frac{pa^2}{48(3 + \nu)}\rho[(5 + \nu)(1 + 3\nu) - (1 + 5\nu)(3 + \nu)\rho^2]\cos\theta \qquad (g)$$

$$Q_r = \frac{pa}{24(3 + \nu)}[2(5 + \nu) - 9(3 + \nu)\rho^2]\cos\theta$$
$$Q_t = -\frac{pa}{24(3 + \nu)}\rho[2(5 + \nu) - 3(3 + \nu)\rho^2]\operatorname{sen}\theta \qquad (h)$$

Se ve que $(M_r)_{\text{máx}}$ se produce para $\varrho = 1/\sqrt{3}$ y vale

$$(M_r)_{\text{máx}} = \frac{pa^2(5 + \nu)}{72\sqrt{3}}$$

El valor máximo de M_t se produce para

$$\rho = \sqrt{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}/\sqrt{3(1 + 5\nu)(3 + \nu)}$$

y vale

$$(M_t)_{\text{máx}} = \frac{pa^2}{72}\frac{(5 + \nu)(1 + 3\nu)}{3 + \nu}$$

Librodot

El valor de la reacción vertical en el contorno por unidad de longitud es[1]

$$-V = -Q_r + \frac{\partial M_{rt}}{r\,\partial\theta} = \frac{pa}{4}\cos\theta$$

El momento de esta reacción respecto al diámetro CD de la placa (fig. 137) es

$$4\int_0^{\pi/2} \frac{pa}{4}\cos\theta\, a^2\cos\theta\, d\theta = \frac{\pi a^3 p}{4}$$

Este momento compensa el momento de la carga repartida sobre la placa tomado respecto al mismo diámetro.

Como segundo ejemplo consideremos el caso de una placa circular con borde libre. Tal condición se encuentra en el caso de una losa circular de cimentación que sostiene una chimenea. A consecuencia del empuje del viento se transmite a la losa un momento M (fig. 138). Suponiendo que las reacciones correspondientes a este momento se reparten según una ley

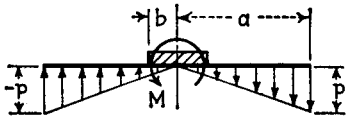


FIG. 138

lineal, como la indicada en la figura, obtenemos la misma clase de carga que en el caso anterior, y la solución general puede tomarse en la misma forma (*d*) que antes. Las condiciones de contorno en el borde exterior de la placa, que está libre de esfuerzos, son

$$(M_r)_{\rho=1} = 0 \qquad (V)_{\rho=1} = \left(Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r\,\partial\theta}\right)_{\rho=1} = 0 \tag{i}$$

La parte de la placa interior a un círculo de radio b se considera absolutamente rígida. Se supone también que el borde de la placa está empotrado a lo largo de la circunferencia de radio b. Por lo tanto para $\varrho = b/a = \beta$ deben cumplirse las siguientes condiciones de contorno

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{w}{\rho}\right)_{\rho=\beta} \tag{j}$$

Sustituyendo la expresión (*d*) en las ecuaciones (*i*) y (*j*) obtenemos las siguientes ecuaciones para determinar las constantes

$$\begin{aligned} 4(5+\nu) + 2(3+\nu)B + 2(1-\nu)C + (1+\nu)D &= 0 \\ 4(17+\nu) + 2(3+\nu)B + 2(1-\nu)C - (3-\nu)D &= 0 \\ 4\beta^4 + 2\beta^2 B - 2\beta^{-2}C + D &= 0 \end{aligned}$$

[1] La reacción se considera positiva cuando su sentido es hacia **arriba.**

Librodot

De estas ecuaciones

$$B = -2\frac{4(2+\nu)+(1-\nu)\beta^2(3+\beta^4)}{(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4}$$

$$C = -2\frac{4(2+\nu)\beta^4-(3+\nu)\beta^2(3+\beta^4)}{(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4} \qquad D = 12$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (*d*) y utilizando las ecuaciones (192) y (193), podemos obtener los valores de los momentos y esfuerzos cortantes. La constante A no aparece en estas ecuaciones. El término correspondiente en la expresión (*d*) representa el giro de la placa, como sólido rígido, respecto al diámetro perpendicular al plano de la figura 138.

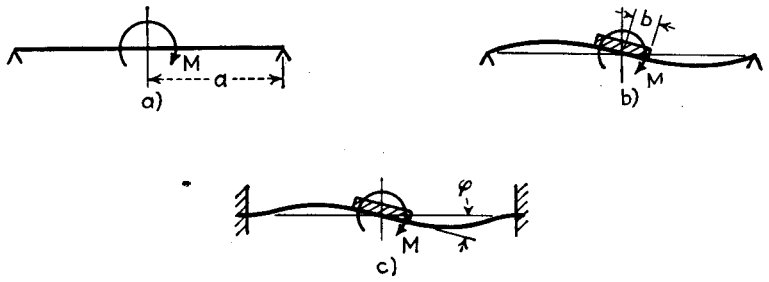


FIG. 139

Si se conoce el módulo de cimentación, el ángulo de giro puede calcularse mediante la condición de equilibrio del momento M y las reacciones del cimiento.

Utilizando la expresión (*d*) puede resolverse el caso de una placa circular simplemente apoyada, cargada con un momento M en el centro [fig. 139 *a*)]. En este caso ha de omitirse el término en ϱ^5, que corresponde a la carga repartida. Para evitar una flecha infinita en el centro la constante c debe ser nula. Así la expresión (*d*) se reduce a

$$w = (A\rho + B\rho^3 + D\rho \ln \rho)\cos\theta \tag{k}$$

Las tres constantes A, B y D se determinan ahora a partir de las siguientes condiciones de contorno

$$(w)_{\rho=1} = 0 \qquad (M_r)_{\rho=1} = 0$$
$$-a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_{rt})_{\rho=1}\operatorname{sen}\theta\,d\theta + a^2\int_{-\pi}^{+\pi}(Q_r)_{\rho=1}\cos\theta\,d\theta + M = 0 \tag{l}$$

Las dos primeras representan las condiciones de borde simplemente apoyado; la última establece la condición de equilibrio de las fuerzas y momentos que actúan en el contorno de la placa y el momento exterior M. De las ecuaciones (*l*) obtenemos

$$A = -\frac{1+\nu}{3+\nu}\frac{Ma}{8\pi D} \qquad B = \frac{1+\nu}{3+\nu}\frac{Ma}{8\pi D} \qquad D = -\frac{Ma}{4\pi D}$$

Librodot

de donde

$$w = -\frac{Ma}{8\pi D(3+\nu)}\rho[(1+\nu)(1-\rho^2)+2(3+\nu)\ln\rho]\cos\theta \qquad (m)$$

A causa del término logarítmico entre corchetes, la pendiente de la deformada, calculada a partir de la ecuación (*m*) resulta infinita. Para eliminar esta dificultad puede considerarse absolutamente rígida[1] la parte central de radio *b*. Suponiendo la placa empotrada en su contorno interior, que gira por efecto del momento M [fig. 139 *b*)], hallamos

$$w = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]}\{-[(1+\nu)+(1-\nu)\beta^4]\rho^2 + (1+\nu)(1-\beta^2)^2\rho + 2[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]\rho\ln\rho - \beta^2[(1+\nu)\beta^2-(3+\nu)]\rho^{-1}\}\cos\theta \qquad (n)$$

donde $\beta = b/a$. Cuando β vale cero, la ecuación (*n*) se reduce a la ecuación (*m*) antes obtenida. Sustituyendo la expresión (*n*) en la ecuación (192) pueden calcularse los momentos flectores M_r y M_t.

El caso en que el contorno exterior de la placa está empotrado [fig. 139 *b*)] puede estudiarse de modo similar. Este caso tiene interés práctico para el proyecto de acoplamiento de ejes[2]. Las tensiones radiales máximas en los contornos interior y exterior y el ángulo de giro φ de la parte central rígida son en este caso

$$(\sigma_r)_{r=b} = \alpha\frac{h}{a}E\varphi \qquad (\sigma_r)_{r=a} = \alpha_1\frac{h}{a}E\varphi \qquad \varphi = \frac{M}{\alpha_2 Eh^3}$$

donde α, α_1, α_2 son constantes cuyos valores figuran en la tabla 64.

TABLA 64

$\beta = b/a$	α	α_1	α_2
0,5	14,17	7,10	12,40
0,6	19,54	12,85	28,48
0,7	36,25	25,65	77,90
0,8	82,26	66,50	314,00

64. *Placas circulares bajo carga concentrada*

El caso de una carga aplicada en el centro de la placa se ha estudiado en el apartado 19. Supondremos aquí que la carga P está aplicada en un punto A a una distancia b del centro de la placa 0 (fig. 140)[3]. Dividiendo

[1] R. J. Roark, *Univ. Wisconsin Bull.*, 74, 1932, ha hecho experiencias con tales placas.

[2] H. Reissner, *Ingr.-Arch.*, vol. 1, pág. 72, 1929.

[3] Este problema ha sido resuelto por Clebsch, *op. cit.* Véase también A. Föppl, *Sitzber. bayer. Akad. Wiss. Jahrg.*, 1912, pág. 155. El estudio del mismo problema en coordenadas esféricas fue hecho por E. Melan, *Eisenbau*, 1920, pág. 190, y por W. Flügge, «Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten», Berlín, 1928. Véase también el trabajo de H. Schmidt, *Ingr.-Arch.*, vol. 1, pág. 147, 1930, y W. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 13, pág. 355, 1943.

Librodot

la placa en dos partes por la sección cilíndrica de radio b como indica la línea de puntos en la figura, podemos aplicar la solución (195) a cada una de las partes de la placa. Si el ángulo θ se mide a partir del radio OA sólo deben conservarse los términos en cos $m\,\theta$. De ahí obtenemos para la parte exterior de la placa

$$w = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m\theta \qquad (a)$$

donde

$$\begin{aligned} R_0 &= A_0 + B_0 r^2 + C_0 \log r + D_0 r^2 \ln r \\ R_1 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_m &= A_m r^m + B_m r^{-m} + C_m r^{m+2} + D_m r^{-m+2} \end{aligned} \qquad (b)$$

Para las funciones R_0', R_1', ... R_m' correspondientes a la parte interior de la placa pueden escribirse expresiones similares. Utilizando los símbolos A_m', B_m', ... en lugar de A_m, B_m, ... para las constantes de esta parte de la placa, de la condición de que la flecha, la pendiente y los momentos sean finitos en el centro de la placa, obtenemos

$$\begin{aligned} C_0' &= D_0' = 0 \\ C_1' &= D_1' = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ B_m' &= D_m' = 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, para cada término de la serie (a) tenemos que determinar cuatro constantes para la parte exterior y dos para la parte interior.

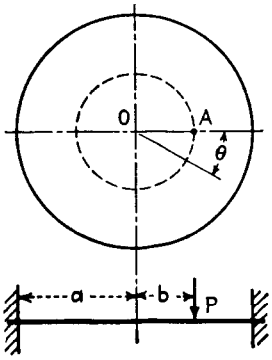


FIG. 140

Las seis ecuaciones necesarias para esta determinación pueden obtenerse a partir de las condiciones de contorno en el borde de la placa y las condiciones de continuidad en el círculo de radio b. Si se supone que el borde exterior está empotrado, las condiciones de contorno son:

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \qquad (c)$$

Librodot

Representando la flecha de la parte interior por w_1 y observando que no hay momentos exteriores aplicados en el círculo de radio b, las condiciones de continuidad dan:

$$w = w_1 \qquad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w_1}{\partial r} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} \quad \text{para} \quad r = b \qquad (d)$$

La última ecuación se obtiene de la consideración del esfuerzo cortante Q_r a lo largo del círculo de radio b. Este esfuerzo es continuo en todos los puntos del círculo excepto el punto A, donde tiene una discontinuidad debida a la fuerza P. Representando esta fuerza por la serie[1].

$$\frac{P}{\pi b}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta\right) \qquad (e)$$

y para el esfuerzo cortante la primera de las expresiones (193) obtenemos

$$D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w)_{r=b} - D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w_1)_{r=b} = \frac{P}{\pi b}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta\right) \qquad (f)$$

A partir de las seis ecuaciones (c), (d) y (f) pueden calcularse las seis constantes y las funciones R_m y R'_m pueden ponerse en la forma siguiente:

$$R_0 = \frac{P}{8\pi D}\left[(r^2 + b^2)\ln\frac{r}{a} + \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - r^2)}{2a^2}\right]$$

$$R'_0 = \frac{P}{8\pi D}\left[(r^2 + b^2)\ln\frac{b}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - b^2)}{2a^2}\right]$$

$$R_1 = -\frac{Pb^2}{16\pi D}\left[\frac{1}{r} + \frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} - \frac{(2a^2 - b^2)r^3}{a^4b^2} - \frac{4r}{b^2}\ln\frac{a}{r}\right]$$

$$R'_1 = -\frac{Pb^2}{16\pi D}\left[\frac{2(a^2 - b^2)r}{a^2b^2} + \frac{(a^2 - b^2)^2r^3}{a^4b^4} - \frac{4r}{b^2}\ln\frac{a}{b}\right]$$

$$R_m = \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{a^{2m}}\left[(m-1)b^2 - ma^2 + (m-1)r^2 - \frac{m(m-1)}{m+1}\frac{b^2r^2}{a^2}\right] + \frac{1}{r^m}\left(r^2 - \frac{m-1}{m+1}b^2\right)\right\}$$

$$R'_m = \frac{Pb^m}{8m(m-1)\pi D}\left\{\frac{r^m}{a^{2m}}\left[(m-1)b^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{b^{2m-2}}\right] + (m-1)\frac{r^{m+2}}{a^{2m}}\left[1 - \frac{m}{m+1}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{m+1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}\right]\right\}$$

Utilizando estas funciones, obtenemos para la flecha bajo el punto de aplicación de la carga:

$$(w)_{r=b,\theta=0} = \frac{P}{16\pi D}\frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} \qquad (196)$$

[1] Esta serie es análoga a la utilizada en el caso de placas continuas (véase pág. 274).

Librodot

Para $b = 0$ esta fórmula coincide con la fórmula (92) correspondiente a placa bajo carga en el centro. El caso de placa con borde simplemente apoyado puede tratarse de forma parecida.

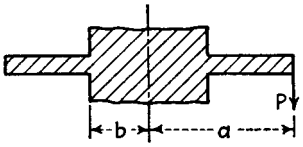


FIG. 141

El problema de una placa anular empotrada en el borde interior y con una carga concentrada P en el contorno exterior (fig. 141) puede resolverse también utilizando la serie (a). En este caso las condiciones de contorno en el borde interior empotrado son

$$(w)_{r=b} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=b} = 0 \tag{g}$$

En el contorno exterior, que está cargado en un solo punto las condiciones son

$$(M_r)_{r=a} = 0$$

$$(V)_{r=a} = \frac{P}{\pi a}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta\right) \tag{h}$$

Los cálculos hechos para el caso particular $b/a = 2/3$ dan[1] para el máximo momento flector M_r en el contorno interior

$$(M_r)_{r=b,\theta=0} = -4{,}45\,\frac{P}{2\pi}$$

En la figura 142 se da la variación del momento a lo largo del contorno interior y a lo largo del círculo de radio $r = 5a/6$. Puede verse que este

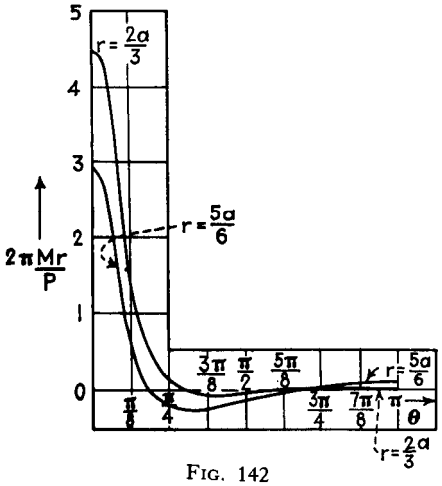


FIG. 142

[1] H. Reissner, *op. cit.*

Librodot

momento disminuye rápidamente al aumentar el ángulo θ medido a partir del punto de aplicación de la carga. Los casos de carga simétricamente repartida respecto al centro de la placa[1] o los casos de placas anulares pueden abreviarse utilizando la solución general del tipo (*a*). Para placas circulares completas bajo carga excéntrica, pueden obtenerse soluciones más sencillas por el método de variable compleja[2] o, cuando la placa está empotrada por el método de inversión[3]. En este último caso la deformada toma la forma

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi D}\left[(1 - x^2)(1 - \xi^2) + (x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\theta)\ln\frac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\theta}{1 + x^2\xi^2 - 2x\xi\cos\theta}\right] \quad (197)$$

donde $x = r/a$ y $\xi = b/a$ (fig. 140). La expresión (197) es válida en toda la placa y para $x = \xi$ y $\theta = 0$, esto es, en el punto de aplicación de la carga, da el valor (196) obtenido por el método de la serie.

65. Placas circulares apoyadas en varios puntos del contorno

Considerando el caso de una carga simétricamente repartida respecto al centro de la placa, tomamos para la deformada una expresión general de la forma[1]

$$w = w_0 + w_1 \qquad (a)$$

en la que w_0 es la flecha de la placa simplemente apoyada en todo el contorno y w_1 satisface la ecuación diferencial homogénea

$$\Delta\Delta w_1 = 0 \qquad (b)$$

Representando las reacciones concentradas en los puntos de apoyo 1, 2, 3, ... por N_1, N_2, ..., N_i y utilizando para representar las fuerzas concentradas, la serie (*h*) del apartado anterior, tenemos para cada reacción N_i la expresión

$$\frac{N_i}{\pi a}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\cos m\theta_i\right) \qquad (c)$$

donde

$$\theta_i = \theta - \gamma_i$$

[1] El problema de una losa flotante de contorno circular puede resolverse combinando unas reacciones de este tipo con la carga uniformemente repartida; véase K. Hajnal-Konyi, «Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken», Berlín, 1929.

[2] La placa simplemente apoyada fue tratada en esta forma por E. Reissner, *Math. Ann.*, volumen 111, pág. 777, 1935; para la aplicación del método de Muschelišvili, véase A. I. Lourye, *Bull. Polytech. Inst. Leningrad*, vol. 31, pág. 305, 1928, y *Priklad. Math. Mekhan.*, volumen 4, pág. 93, 1940. Véanse también K. Nasitta, *Ingr.-Arch.*, vol. 23, pág. 85, 1955, y R. J. Roark, *Wisconsin Univ. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 74, 1932.

[3] J. H. Michell, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 34, pág. 223, 1902.

[1] A. Nádai ha estudiado varios problemas de este tipo, véase *Z. Physik*, vol. 23, pág. 366, 1922. Las placas apoyadas en varios puntos han sido estudiadas también por W. A. Bassali, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 53, pág. 728, 1957, y las placas circulares con condiciones de contorno mixtas por G. M. L. Gladwell, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 11, pág. 159, 1958.

Librodot

siendo γ_i el ángulo que define la posición del apoyo i (fig. 143). La intensidad de la reacción en cualquier punto del contorno está dada entonces por la expresión

$$\sum_{1}^{i} \frac{N_i}{\pi a}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i\right) \tag{d}$$

en la que la suma se extiende a todas las reacciones concentradas (c).

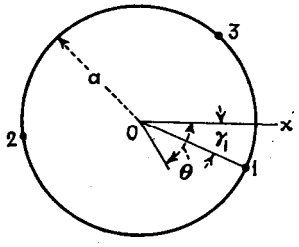


FIG. 143

La solución general de la ecuación homogénea (b) está dada por la expresión (195) (pág. 312). Suponiendo la placa continua y suprimiendo los términos que dan flechas o momentos infinitos en el centro, de la expresión (195) obtenemos

$$w_1 = A_0 + B_0 r^2 + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m + C_m r^{m+2}) \cos m\theta + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m r^m + C'_m r^{m+2}) \operatorname{sen} m\theta \tag{e}$$

Para determinar las constantes tenemos las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} (M_r)_{r=a} &= -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]_{r=a} = 0 \\ (V)_{r=a} &= \left(Q_r - \frac{\partial M_{rt}}{r\,\partial\theta}\right)_{r=a} = -\sum_{1}^{i} \frac{N_i}{\pi a}\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta_i\right) \end{aligned} \tag{f}$$

en las que M_{rt} y Q_r están dados por las ecuaciones (192) y (193).

Consideremos el caso particular en que la placa está apoyada en los extremos de un diámetro. Mediremos θ desde este diámetro. Entonces $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi$ y obtenemos

$$w = w_0 + \frac{Pa^2}{2\pi(3+\nu)D}\left\{2 \ln 2 - 1 + \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}\right) - \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m-1)} + \frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)(m-1)m^2} - \frac{\rho^2}{m(m+1)}\right]\rho^m \cos m\theta\right\} \tag{g}$$

en la que w_0 es la flecha de la placa cargada simétricamente y simplemente apoyada,

Librodot

P la carga total repartida en la placa y $\rho = r/a$. Cuando la carga está aplicada en el centro, suponiendo $\nu = 0{,}25$, de la expresión (g) obtenemos:

$$(w)_{\rho=0} = 0{,}116\frac{Pa^2}{D}$$

$$(w)_{\rho=1,\theta=\pi/2} = 0{,}118\frac{Pa^2}{D}$$

Para una placa uniformemente cargada obtenemos

$$(w)_{\rho=0} = 0{,}269\frac{qa^4}{D}$$

$$(w)_{\rho=1,\theta=\pi/2} = 0{,}371\frac{qa^4}{D}$$

Combinando dos soluciones del tipo (g) puede resolverse también el caso indicado en la figura 144.

Cuando una placa circular está apoyada en tres puntos con separaciones de 120°, la flecha producida en el centro de la placa, cuando la carga se aplica en el centro es

$$(w)_{\rho=0} = 0{,}0670\frac{Pa^2}{D}$$

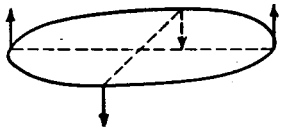


FIG. 144

Cuando la carga está uniformemente repartida, la flecha en el centro es

$$(w)_{\rho=0} = 0{,}0362\frac{Pa^2}{D}$$

donde $P = \pi a^2 q$.

El caso de una placa circular apoyada en tres puntos se ha estudiado experimentalmente con placas de vidrio. Estos ensayos dieron resultados satisfactoriamente concordantes con la teoría[1].

66. Placas en forma de sector

La solución general desarrollada para placas circulares (ap. 62) puede adaptarse también a placas en forma de sector con los bordes rectos simplemente apoyados[2]. Tomemos como ejemplo una placa semicircular simplemente apoyada a lo largo del diámetro AB y uniformemente cargada (fig. 145). La flecha de esta placa es eviden-

[1] Experiencias verificadas por Nádai, *ibid.*

[2] Problemas de este tipo fueron estudiados por Nádai, *Z. Ver. deut. Ing.*, vol. 59, pág. 169, 1915. Véase también B. G. Galerkin, *Collected Papers*, vol. 2, pág. 320, Moscú, 1953, que da tablas numéricas para estos casos.

Librodot

temente la misma que se produciría en la placa circular indicada por el contorno de puntos y cargada como indica la figura 145 *b*). La carga repartida está representada en tal caso por la serie:

$$q = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \operatorname{sen} m\theta \tag{a}$$

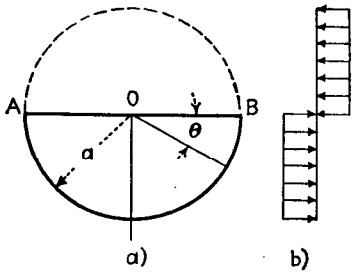


FIG. 145

y la ecuación diferencial de la deformada es

$$\Delta\Delta w = \frac{1}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4q}{m\pi} \operatorname{sen} m\theta \tag{b}$$

La solución particular de esta ecuación que satisface las condiciones de contorno a lo largo del diámetro AB es

$$w_0 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{4qr^4}{\pi m(16 - m^2)(4 - m^2)D} \operatorname{sen} m\theta \tag{c}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (194) que satisface las condiciones de contorno en el diámetro AB es

$$w_1 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (A_m r^m + B_m r^{m+2}) \operatorname{sen} m\theta \tag{d}$$

Sumando las expresiones (*c*) y (*d*) obtenemos la expresión de la flecha de una placa semicircular. Las constantes A_m y B_m se determinan en cada caso particular mediante las condiciones en el contorno circular de la placa.

En el caso de placa simplemente apoyada tenemos

$$(w)_{r=a} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right]_{r=a} = 0 \tag{e}$$

Sustituyendo w por la suma de las series (*c*) y (*d*), obtenemos para calcular A_m y B_m las siguientes ecuaciones:

$$A_m a^m + B_m a^{m+2} = -\frac{4qa^2}{m\pi(16 - m^2)(4 - m^2)D}$$

$$A_m a^m[m(m-1) - \nu m(m-1)] + B_m a^{m+2}(m+1)[m+2+\nu(2-m)] = -\frac{4qa^2[12 + \nu(4 - m^2)]}{m\pi(16 - m^2)(4 - m^2)D}$$

Librodot

De estas ecuaciones

$$A_m = \frac{qa^4(m + 5 + \nu)}{a^m m\pi(16 - m^2)(2 + m)[m + \frac{1}{2}(1 + \nu)]D}$$

$$B_m = -\frac{qa^4(m + 3 + \nu)}{a^{m+2} m\pi(4 + m)(4 - m^2)[m + \frac{1}{2}(1 + \nu)]D}$$

Con estos valores de las constantes, la expresión de la flecha toma la forma

$$w = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left\{ \frac{4r^4}{a^4} \frac{1}{m\pi(16 - m^2)(4 - m^2)} + \frac{r^m}{a^m} \frac{m + 5 + \nu}{m\pi(16 - m^2)(2 + m)[m + \frac{1}{2}(1 + \nu)]} - \frac{r^{m+2}}{a^{m+2}} \frac{m + 3 + \nu}{m\pi(4 + m)(4 - m^2)[m + \frac{1}{2}(1 + \nu)]} \right\} \operatorname{sen} m\theta$$

Con esta expresión de la flecha, los momentos flectores se obtienen fácilmente mediante las ecuaciones (192).

De forma similar puede obtenerse la solución para cualquier sector con ángulo π/k siendo k un número entero. Las expresiones finales de las flechas y momentos flectores en un punto dado pueden darse en cada caso particular por las fórmulas:

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \qquad M_r = \beta q a^2 \qquad M_t = \beta_1 q a^2 \tag{f}$$

en las que α, β, β_1 son factores numéricos. En la tabla 65 se dan varios valores de estos factores para puntos del eje de simetría de un sector.

TABLA 65

Valores de los factores α, β y β_1 para distintos valores π/k del ángulo en el centro de un sector simplemente apoyado en el contorno

$\nu = 0{,}3$

π/k	$r/a = {}^1/_4$			$r/a = {}^1/_2$			$r/a = {}^3/_4$			$r/a = 1$		
	α	β	β_1	α	β	β_1	α	β	β_1	α	β	β_1
$\pi/4$	0,00006	−0,0015	0,0093	0,00033	0,0069	0,0183	0,00049	0,0161	0,0169	0	0	0,0025
$\pi/3$	0,00019	−0,0025	0,0177	0,00080	0,0149	0,0255	0,00092	0,0243	0,0213	0	0	0,0044
$\pi/2$	0,00092	0,0036	0,0319	0,00225	0,0353	0,0352	0,00203	0,0381	0,0286	0	0	0,0088
π	0,00589	0,0692	0,0357	0,00811	0,0868	0,0515	0,00560	0,0617	0,0468	0	0	0,0221

TABLA 66

Valores de los factores α y β para distintos valores π/k del ángulo en el centro de un sector empotrado en el contorno circular y simplemente apoyado en los bordes rectos

$\nu = 0{,}3$

π/k	$r/a = \frac{1}{4}$		$r/a = \frac{1}{2}$		$r/a = \frac{3}{4}$		$r/a = 1$	
	α	β	α	β	α	β	α	β
$\pi/4$	0,00005	−0,0008	0,00026	0,0087	0,00028	0,0107	0	0,0250
$\pi/3$	0,00017	−0,0006	0,00057	0,0143	0,00047	0,0123	0	0,0340
$\pi/2$	0,00063	0,0068	0,00132	0,0272	0,00082	0,0113	0	0,0488
π	0,00293	0,0473	0,00337	0,0446	0,00153	0,0016	0	0,0756

Librodot

El caso en que la placa con forma de sector está empotrada en el borde circular y simplemente apoyada en los bordes rectos puede tratarse por el mismo método de solución usado en el caso precedente. En la tabla 66 se dan los valores de los coeficientes α y β para puntos tomados en el eje de simetría del sector.

Puede verse que en este caso la máxima tensión de flexión se produce en el punto medio del borde circular del sector.

Si el borde circular de una placa uniformemente cargada con forma de sector está libre, la flecha máxima se produce en el punto medio de dicho borde. Para el caso en que $\pi/k = \pi/2$ obtenemos

$$w_{\text{máx}} = 0{,}0633\,\frac{qa^4}{D}$$

El momento flector en el mismo punto es

$$M_t = 0{,}1331qa^2$$

En el caso de una placa con forma de sector circular con bordes radiales empotrados o libres, deben aplicarse métodos aproximados[1]. Sin embargo, el problema particular de la placa en forma de cuña con carga lateral puede resolverse rigurosamente (v. ap. 78). Otro problema que permite una solución exacta es el de la flexión de una placa empotrada a lo largo de dos arcos circulares[2]. En este caso deben introducirse coordenadas bipolares; en la tabla 67 se dan los resultados relativos a una placa semicircular empotrada.

TABLA 67

Valores de los factores α, β y β_1 [ecs. (*f*)] para placa semicircular empotrada en el contorno (fig. 145*a*)

$\nu = 0{,}3$

Reparto de carga	$r/a = 0$	$r/a = 0{,}483$	$r/a = 0{,}486$	$r/a = 0{,}525$	$r/a = 1$
	β	$\beta_{\text{máx}}$	$\alpha_{\text{máx}}$	$\beta_{1\ \text{máx}}$	β
Carga hidrostática q . . .	−0,0731	0,0355	0,00202	0,0194	−0,0584
Carga uniforme y/a . . .	−0,0276	. . . . .	. . . . .	. . . . .	−0,0355

Pueden usarse también con ventaja en el caso de una placa empotrada entre un círculo exterior y uno interior (excéntrico) bajo una carga única[3].

[1] Véase G. F. Carrier y F. S. Shaw, *Proc. Symposia Appl. Math.*, vol. 3, pág. 125, 1950; H. D. Conway y M. K. Huang, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 5, 1952; H. R. Hassé, *Quart. Mech. Appl. Math.*, vol. 3, pág. 271, 1950. El caso de una carga concentrada ha sido estudiado por T. Sekiya y A. Saito, *Proc. Fourth Japan. Congr. Appl. Mech.*, pág. 195, 1954. Para placas limitadas por dos radios y dos arcos y empotradas, véase G. F. Carrier, *J. Appl. Mechanics*, volumen 11, pág. A-134, 1944. El mismo problema con distintas condiciones de borde fue estudiado por L. I. Deverall y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 359, 1951. La flexión de una placa semicircular uniformemente cargada simplemente apoyada en el borde curvo y libres en el diámetro (un «diafragma» de una turbina de vapor) ha sido estudiado con detalle por D. F. Master y M. A. Sadowsky, *J. Appl. Mechanics*, vol. 23, pág. 329, 1956. Además H. Müggenburg ha tratado un caso similar con el borde curvo empotrado, *Ingr.-Arch.*, volumen 24, pág. 308, 1956.

[2] La función de Green para estas condiciones de contorno fue obtenida por A. C. Dixon, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 19, pág. 373, 1920. Para un caso límite interesante, véase W. R. Dean, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 49, pág. 1953. Para los casos de cargas repartidas el uso de la función de Green, bastante engorroso puede evitarse; véase S. Woinowsky-Krieger, *J. Appl. Mechanics*, vol. 22, pág. 129, 1955; e *Ingr.-Arch.*, vol. 24, pág. 48, 1956.

[3] Este problema fue estudiado por N. V. Kudriartzer, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, volumen 53, pág. 203, 1946.

Librodot

67. Placas circulares de espesor no uniforme

Se encuentran a veces placas circulares de espesor no uniforme en el proyecto de elementos de máquinas tales como diafragmas de máquinas de vapor y pistones de máquinas oscilantes. En tales placas normalmente el espesor es función de la distancia al centro y la carga simétrica respecto al mismo. Limitaremos nuestro estudio a este caso de simetría.

Procediendo como se vio en el apartado 15 y utilizando las notaciones de ese apartado, de la condición de equilibrio del elemento indicado en la figura 28 (pág. 71) deducimos la ecuación siguiente:

$$M_r + \frac{dM_r}{dr} r - M_t + Qr = 0 \tag{a}$$

en la que, como anteriormente

$$M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right)$$
$$M_t = D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right) \tag{b}$$

donde

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \tag{c}$$

y Q es el esfuerzo cortante por unidad de longitud de una sección circular de radio r. En el caso de una placa completa Q está dado por la ecuación

$$Q = \frac{1}{2\pi r}\int_0^r q\, 2\pi r\, dr \tag{d}$$

en la que q es la intensidad de la carga lateral.

Sustituyendo las expresiones (b), (c) y (d) en la ecuación (a) y observando que la rigidez a flexión D ya no es constante sino función de r, obtenemos la siguiente ecuación

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r}\right) + \frac{dD}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\frac{\varphi}{r}\right) = -\frac{1}{r}\int_0^r q\, r\, dr \tag{e}$$

De esta forma el problema de la flexión de placas circulares cargadas simétricamente se reduce a la solución de la ecuación diferencial (e) de segundo orden con coeficientes variables. Para poner la ecuación en forma adimensional utilizamos las siguientes notaciones:

a = radio exterior de la placa
h = espesor de la placa en un punto cualquiera
h_0 = espesor de la placa en el centro

entonces

$$\frac{r}{a} = x \qquad \frac{h}{h_0} = y \tag{f}$$

Supongamos también que la carga está uniformemente repartida. Utilizando la notación

$$p = \frac{6(1-\nu^2)a^3 q}{Eh_0^3} \tag{g}$$

Librodot

la ecuación (*e*) toma entonces la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} + \frac{d \ln y^3}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\nu}{x}\frac{d \ln y^3}{dx}\right)\varphi = -\frac{px}{y^3} \tag{198}$$

En muchos casos la variación de espesor de la placa puede representarse con suficiente aproximación por la ecuación[1].

$$y = e^{-\beta x^2/6} \tag{h}$$

en la que β es una constante que debe elegirse en cada caso particular de modo que se obtenga la mejor aproximación posible a las dimensiones reales de la placa. En la figura 146 da la variación de espesor de una placa a lo largo del diámetro para diversos valores de β. Sustituyendo la expresión (*h*) en la ecuación (198), hallamos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - \beta x\right)\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \nu\beta\right)\varphi = -pxe^{\beta x^2/2} \tag{i}$$

Puede comprobarse fácilmente que

$$\varphi_0 = -\frac{p}{(3-\nu)\beta}xe^{\beta x^2/2} \tag{j}$$

es una solución particular de la ecuación (*i*). Una de las dos soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a la ecuación (*i*) puede tomarse en forma de serie de potencias

$$\varphi_1 = a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n(1+\nu)(3+\nu)\cdots(2n-1+\nu)}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot\cdots 2n\cdot 2n(2n+2)}x^{2n+1}\right] \tag{k}$$

en la que a_1 es una constante arbitraria. La segunda solución de la misma ecuación se hace infinita en el centro de la placa, es decir, para $x = 0$ y por consiguiente no debe considerarse en el caso de placas sin agujeros en el centro. Combinando las soluciones (*j*) y (*k*) puede ponerse la solución general de la ecuación (*i*) para una placa completa en la forma siguiente:

$$\varphi = p\left[C\varphi_1 - \frac{x}{(3-\nu)\beta}e^{\beta x^2/2}\right] \tag{l}$$

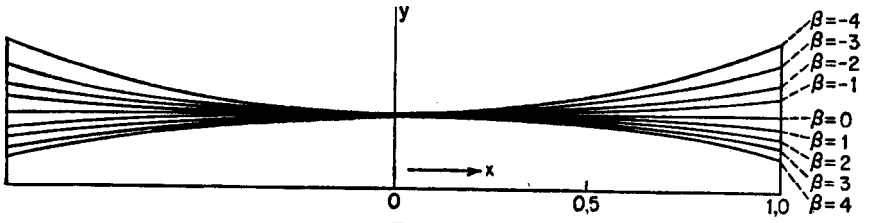


FIG. 146

La constante *C* en cada caso particular debe determinarse a partir de las condiciones en el contorno de la placa. Puesto que la serie (*k*) es uniformemente convergente, puede derivarse y obtener las expresiones de los momentos flectores sustituyendo en las ecuaciones (*b*). Las flechas pueden obtenerse de la ecuación (*c*).

[1] La primera investigación sobre flexión de placas circulares de espesor no uniforme fue hecha por H. Holzer, *Z. ges. Turbinenwesen*, vol. 15, pág. 21, 1918. Los resultados dados en este apartado se han tomado de la tesis doctoral de O. Pichler, «Die Biegung Kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke», Berlín, 1928. Véase también el trabajo de R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 81, 1937.

Librodot

En el caso de placa *empotrada en el borde*, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=1} = 0 \qquad (\varphi)_{x=1} = 0 \tag{m}$$

y la constante C en la solución (l) es

$$C = \frac{e^{\beta/2}}{(3 - \nu)\beta(\varphi_1)_{x=1}} \tag{n}$$

Para determinar el valor numérico de C para un valor dado de β, que define la forma de la sección diametral (v. fig. 146), debe calcularse la suma de la serie (k) para x 1. En el mencionado trabajo de Pichler se dan los resultados de estos cálculos. Este trabajo da también los valores de la derivada y la integral de la serie (k) mediante los cuales pueden calcularse los momentos y flechas de una placa.

La flecha de la placa en el centro puede darse por la fórmula

$$w_{\text{máx}} = \alpha a p = \alpha \frac{6(1 - \nu^2)a^4 q}{E h_0^3} \tag{o}$$

en la que α es un factor numérico que depende del valor de la constante β. En la primera línea de la tabla 68 se dan varios valores de este factor, calculados para $\nu = 0{,}3$.

TABLA 68

Factores α y α' para el cálculo de flechas en el centro de placas circulares de espesor variable

$\nu = 0{,}3$

β	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
α	0,0801	0,0639	0,0505	0,0398	0,0313	0,0246	0,0192	0,0152	0,01195
α'	0,2233	0,1944	0,1692	0,1471	0,1273	0,1098	0,0937	0,0791	0,06605

Las tensiones máximas de flexión para distintas distancias radiales pueden darse por las fórmulas

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = \pm\gamma \frac{3qa^2}{h_0^2} \qquad (\sigma_t)_{\text{máx}} = \pm\gamma_1 \frac{3qa^2}{h_0^2} \tag{p}$$

En las figuras 147 y 148 se dan gráficamente los valores numéricos de los factores γ y γ^1 para distintas proporciones de la placa y varios valores de $x = r/a$. Para $\beta = 0$

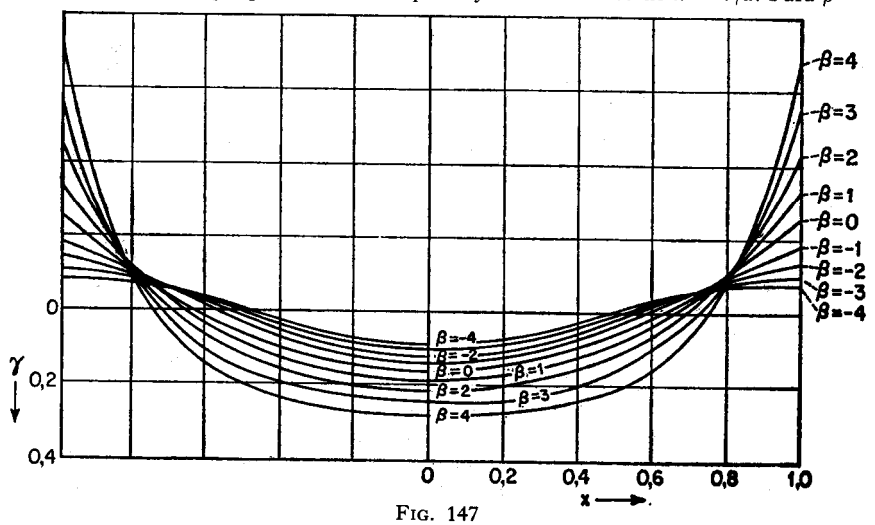


FIG. 147

Librodot

estas curvas dan los mismos valores de las tensiones ya obtenidas para placas de espesor uniforme (v. fig. 29, pág. 75).

En el caso de una placa *simplemente apoyada en el borde*, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=1} = 0 \qquad (M_r)_{x=1} = 0 \tag{q}$$

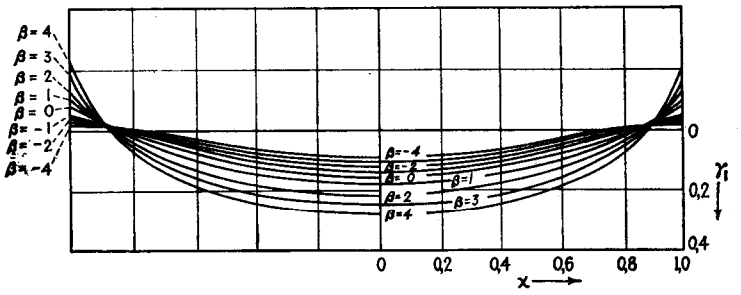


FIG. 148

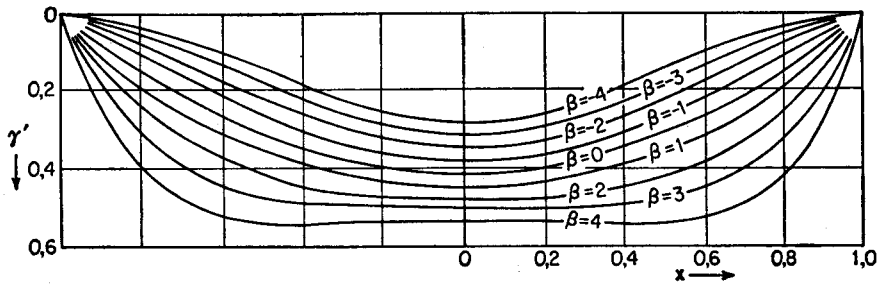


FIG. 149

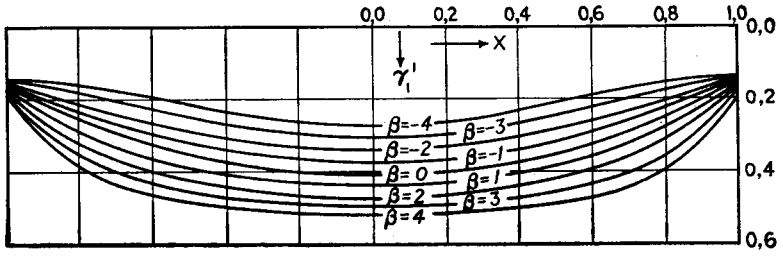


FIG. 150

Se puede demostrar que las flechas y tensiones máximas pueden ponerse también en forma análoga a las ecuaciones (*o*) y (*p*). En este caso utilizaremos para las constantes las notaciones α', γ', γ_1' en lugar de α, γ, γ_1 usadas para placas empotradas. Los valores de α' se dan en la última línea de la tabla 68 y los valores de γ', γ_1' en las curvas de las figuras 149 y 150 respectivamente.

Para calcular las flechas y tensiones de una placa dada de espesor variable comenzamos eligiendo el valor apropiado de la constante β dado por las curvas en la figura 146. Cuando se ha determinado el valor de β y se conocen las condiciones de contorno, podemos utilizar los valores de la tabla 68 para calcular la flecha en el centro, y las curvas de las figuras 147 y 148 ó 149 y 150 para calcular las tensiones

Librodot

máximas. Si la forma de la sección diametral de la placa dada no puede representarse con aproximación satisfactoria por una de las curvas de la figura 146, puede siempre aplicarse un método aproximado para resolver el problema. Este método consiste en dividir la placa en varios anillos mediante círculos concéntricos y utilizar para cada anillo las fórmulas deducidas para una placa anular de espesor constante. El procedimiento de cálculo es entonces similar al propuesto por R. Grammel para calcular tensiones en discos rotatorios[1].

68. Placas anulares con variación lineal de espesor

Consideremos una placa circular con un agujero circular y cuyo espesor varía en la forma que se indica en la figura 151. La placa soporta una carga superficial

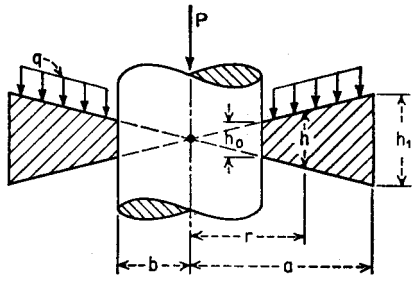


FIG. 151

uniformemente repartida q y una carga $p = P/2\pi b$ uniformemente repartida en el borde del agujero[2]. Siendo $D_0 = Eh_0^3/12(1 - \nu^2)$ la rigidez a flexión para $r = b$, tenemos a cualquier distancia r del centro

$$D = \frac{D_0 r^3}{b^3} \tag{a}$$

Sustituyendo en la ecuación (e) del apartado 67 y teniendo en cuenta el esfuerzo cortante adicional $P/2\pi r$ debido a la carga del borde, llegamos a la ecuación diferencial

$$r^2\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 4r\frac{d\varphi}{dr} + (3\nu - 1)\varphi = -\frac{qb^2}{2D_0}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{Pb^2}{2\pi D_0 r^2} \tag{b}$$

La solución de la ecuación homogénea correspondiente a (b) se obtiene fácilmente haciendo $\varphi = r^\alpha$. Combinando esta solución con una solución particular de (b) llegamos a

$$\varphi = Ar^{\alpha_1} + Br^{\alpha_2} + \frac{qb^3}{2D_0(1 - 3\nu)} - \frac{qb^5}{6(1 - \nu)D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{6\pi(1 - \nu)D_0 r^2} \tag{c}$$

en la que

$$\alpha_1 = -1{,}5 + \sqrt{3{,}25 - 3\nu} \qquad \alpha_2 = -1{,}5 - \sqrt{3{,}25 - 3\nu} \tag{d}$$

[1] R. Grammel, *Dinglers Polytech. J.*, vol. 338, pág. 217, 1923. La analogía entre el problema de un disco rotatorio y el problema de la flexión lateral de una placa circular de espesor variable fue indicada por L. Föppl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 92, 1922. La flexión no simétrica de placas circulares de espesor no uniforme fue estudiada por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 10, pág. 14, 1939.

[2] Este caso ha sido estudiado por H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 1, 1948. Los resultados numéricos dados en la tabla 69 se han tomado de este trabajo.

Librodot

En el caso especial $\nu = 1/3$ la expresión (c) debe sustituirse por

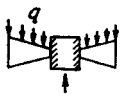
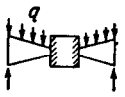
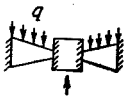
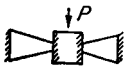
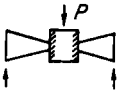
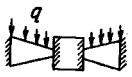
$$\varphi = A + \frac{B}{r^3} - \frac{qb^3}{6D_0} \ln \frac{r}{b} - \frac{qb^5}{4D_0 r^2} + \frac{Pb^3}{4\pi D_0 r^2} \qquad (e)$$

Las constantes arbitrarias A y B deben determinarse de las condiciones de contorno en cada caso. La última columna de la tabla 69 contiene las condiciones de contorno y valores especiales de q y P en seis casos distintos, escribiendo para abreviar φ_b en lugar de $(\varphi)_{r=b}$ y M_b en lugar de $(M_r)_{r=b}$. La misma tabla da los

TABLA 69

Valores de los coeficientes de las ecuaciones (f) para distintos valores de la relación a/b (fig. 151)

$\nu = 1/3$

Caso (número correspondiente a la tabla 3)		Coeficiente	a/b						Condiciones de contorno
			1,25	1,5	2	3	4	5	
3		k	0,249	0,638	3,96	13,64	26,0	40,6	$P=Q^*$
		k_1	0,00372	0,0453	0,401	2,12	4,25	6,28	$\varphi_b=0$ $M_a=0$
4		k	0,149	0,991	2,23	5,57	7,78	9,16	$P=0$
		k_1	0,00551	0,0564	0,412	1,673	2,79	3,57	$\varphi_b=0$ $M_a=0$
5		k	0,1275	0,515	2,05	7,97	17,35	30,0	$P=Q^*$
		k_1	0,00105	0,0115	0,0934	0,537	1,261	2,16	$\varphi_b=0$ $\varphi_a=0$
6		k	0,159	0,396	1,091	3,31	6,55	10,78	$q=0$
		k_1	0,00174	0,0112	0,0606	0,261	0,546	0,876	$\varphi_b=0$ $\varphi_a=0$
8		k	0,353	0,933	2,63	6,88	11,47	16,51	$q=0$
		k_1	0,00816	0,0583	0,345	1,358	2,39	3,27	$\varphi_b=0$ $M_a=0$
—		k	0,0785	0,208	0,52	1,27	1,94	2,52	$P=0$
		k_1	0,00092	0,008	0,0495	0,193	0,346	0,482	$\varphi_b=0$ $\varphi_a=0$

*Cuando $Q = \pi q(a^2 - b^2)$.

Librodot

valores de los coeficientes k y k_1 calculados mediante la solución (e) y definidos por las expresiones siguientes de las máximas tensiones y flechas de la placa

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = k\frac{qa^2}{h_1^2} \quad \text{o} \quad (\sigma_r)_{\text{máx}} = k\frac{P}{h_1^2}$$
$$w_{\text{máx}} = k_1\frac{qa^4}{Eh_1^3} \quad \text{o} \quad w_{\text{máx}} = k_1\frac{Pa^2}{Eh_1^3} \qquad (f)$$

En la tabla 3 se han dado resultados numéricos válidos para placas similares de espesor constante

69. *Placas circulares con variación lineal de espesor*

Para estudiar la flexión de la placa circular indicada en la figura 152[1] tenemos que considerar separadamente dos partes de placa.

1. La superficie anular $b < r < a$. Si $\nu \neq 1/3$ la pendiente $\varphi = dw/dr$ viene dada de nuevo por la expresión (c) del apartado 68, pero sin su penúltimo término.
2. La superficie central $r < \varphi$. Aquí tenemos $dD/dr = 0$ y la ecuación (e) del apartado 67 se reduce a

$$r^2\frac{d^2\varphi_i}{dr^2} + r\frac{d\varphi_i}{dr} - \varphi_i = -\frac{qr^3}{2D_0} - \frac{Pr}{2\pi D_0} \qquad (a)$$

donde el subíndice i se refiere a la parte central de la placa. La solución general de la ecuación (a) es

$$\varphi_i = A_i r + \frac{B_i}{r} - \frac{qr^3}{16D_0} - \frac{Pr}{8\pi D_0}(2\log r + 1) \qquad (b)$$

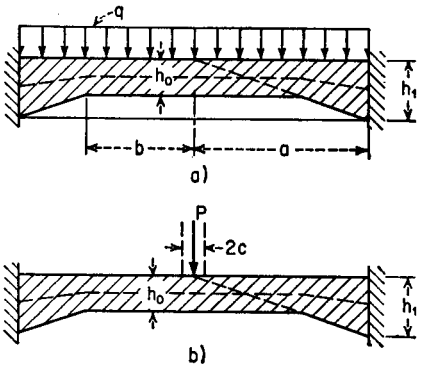


FIG. 152

Las constantes A_i, B_i de esta ecuación y las constantes A, B de la ecuación (c) del apartado 68 pueden obtenerse de la condición de contorno

$$(\varphi)_{r=a} = 0$$

y las condiciones de continuidad

$$(\varphi_i)_{r=0} = 0 \qquad (\varphi - \varphi_i)_{r=b} = 0 \qquad \left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{d\varphi_i}{dr}\right)_{r=b} = 0$$

[1] Placas de esta forma empotradas y simplemente apoyadas fueron estudiadas por H. Favre, *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 75, 1949. Los resultados numéricos dados más adelante se deben sustancialmente a H. Favre y E. Chabloz, *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 78, 1952.

Librodot

Las tablas 70 y 71 dan la flecha $w_{máx}$ y los valores de los momentos flectores en dos casos de carga. Para calcular el momento flector en el centro en el caso de carga central P, suponemos la carga uniformemente repartida en una superficie circular de radio c. El momento $M_r = M_t$ para $r = 0$ puede ponerse entonces en la forma

$$M_{máx} = M_0 - \frac{P}{4\pi}\left(1 - \frac{c^2}{2a^2}\right) + \gamma_1 P \qquad (c)$$

En esta fórmula M_0 está dado por la ecuación (83), válida para placa apoyada de espesor constante; el segundo término representa el efecto del momento de borde, y el tercer término, debido a la variación de espesor de la placa, está dado en la tabla 71.

TABLA 70

Flechas y momentos flectores de placas circulares empotradas uniformente cargadas (fig. 152*a*)

$\nu = 0{,}25$

$\frac{b}{a}$	$w_{máx} = \alpha\frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = \beta qa^2$			$M_t = \beta_1 qa^2$		
		$r = 0$	$r = b$	$r = a$	$r = 0$	$r = b$	$r = a$
	α	β	β	β	β_1	β_1	β_1
0,2	0,008	0,0122	0,0040	−0,161	0,0122	0,0078	−0,040
0,4	0,042	0,0332	0,0007	−0,156	0,0332	0,0157	−0,039
0,6	0,094	0,0543	−0,0188	−0,149	0,0543	0,0149	−0,037
0,8	0,148	0,0709	−0,0591	−0,140	0,0709	0,0009	−0,035
1,0	0,176	0,0781	−0,125	−0,125	0,0781	−0,031	−0,031

TABLA 71

Flechas y momentos flectores de placas circulares empotradas bajo carga central (fig. 152*b*)

$\nu = 0{,}25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{máx} = \alpha\frac{Pa^2}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$ $r = 0$	$M_r = \beta P$		$M_t = \beta_1 P$	
			$r = b$	$r = a$	$r = b$	$r = a$
	α	γ_1^*	β	β	β_1	β_1
0,2	0,031	−0,114	−0,034	−0,129	−0,028	−0,032
0,4	0,093	−0,051	−0,040	−0,112	−0,034	−0,028
0,6	0,155	−0,021	−0,050	−0,096	−0,044	−0,024
0,8	0,203	−0,005	−0,063	−0,084	−0,057	−0,021
1,0	0,224	0	−0,080	−0,080	−0,020	−0,020

* En la ecuación (*c*).

En el caso de cargas fuertemente concentradas que requieren el empleo de la teoría de placas gruesas, la tensión en el centro de la cara inferior de la placa está dada por la expresión

$$\sigma_{máx} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_1}{h_0^2} \qquad (d)$$

en la que σ_0 puede calcularse mediante la expresión (97).

Suponiendo, como generalización, una placa en que la rigidez a flexión varía según la ley

$$D = D_0\left(1 - \frac{r}{a_0}\right)^m \qquad (e)$$

Librodot

en la que a_0 representa una longitud igual o mayor que el radio de la placa, llegamos en general a una pendiente φ que puede expresarse mediante una función hipergeométrica[1]. La hipótesis particular $m = 1/\nu$ lleva sin embargo a una solución finita. Tomando además $\nu = 1/3$ llegamos de nuevo a una placa con variación lineal de espesor[2].

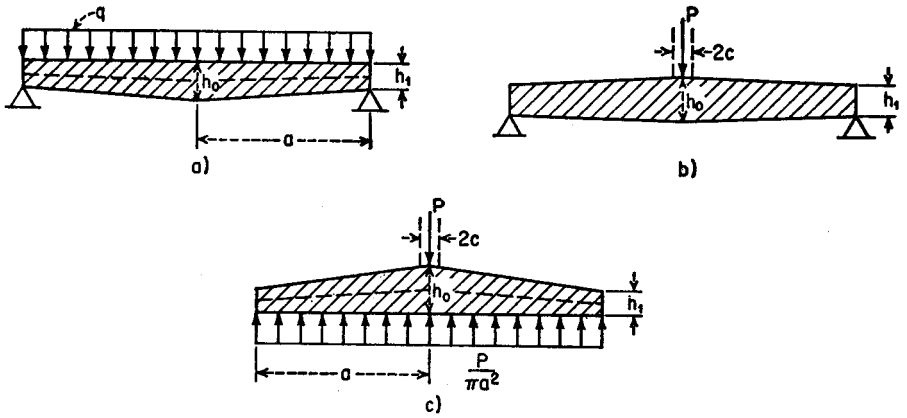


FIG. 153

La deformación simétrica de placas tales como las indicadas en la figura 153 puede estudiarse también por un método de variación de parámetros análogo al descrito en el apartado 39. En las tablas 72 y 73 se dan algunos resultados numéricos[3] obtenidos de esta forma.

TABLA 72

Flechas y momentos flectores de placas simplemente apoyadas bajo carga uniforme (fig. 153*a*)

$\nu = 0{,}25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{máx} = \alpha \frac{qa^4}{Eh_0^3}$	$M_r = \beta qa^2$		$M_t = \beta_1 qa^2$		
	α	$r = 0$ β	$r = a/2$ β	$r = 0$ β_1	$r = a/2$ β_1	$r = a$ β_1
1,00	0,738	0,203	0,152	0,203	0,176	0,094
1,50	1,26	0,257	0,176	0,257	0,173	0,054
2,33	2,04	0,304	0,195	0,304	0,167	0,029

Para los momentos flectores y tensiones de tracción bajo carga central P [fig. 153 *b*)], pueden usarse las expresiones

$$M_{máx} = M_0 + \gamma_2 P \qquad (f)$$

y

$$\sigma_{máx} = \sigma_0 + \frac{6P\gamma_2}{h_0^2} \qquad (g)$$

[1] R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 270, 1937.

[2] Véase en particular H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 140, 1951, y volumen 20, pág. 564, 1953.

[3] Debidos, así como el propio método a H. Favre y E. Chabloz, *Z. angew. Math. u. Phys.*, volumen 1, pág. 317, 1950, y *Bull. Tech. Suisse romande*, vol. 78, 1952.

Librodot

análogas a las ecuaciones (*c*) y (*d*). M_0 está dado una vez más por la expresión (83), σ_0 representa el valor calculado mediante la expresión (96), y γ_2 está dado en la tabla 73.

TABLA 73

Flechas y momentos flectores de placas circulares simplemente apoyadas bajo carga central (fig. 153*b*)

$\nu = 0{,}25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$w_{máx} = \alpha \frac{Pa^2}{Eh_0^3}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
		$r = 0$	$r = a/2$	$r = a/2$	$r = a$
	α	γ_2	β	β_1	β_1
1,00	0,582	0	0,069	0,129	0,060
1,50	0,93	0,029	0,088	0,123	0,033
2,33	1,39	0,059	0,102	0,116	0,016

Tiene también interés práctico la combinación de cargas indicadas en la figura 153 *a*) y *b*). Tomando $q = -P/\pi a^2$, tenemos el estado de equilibrio de un apoyo circular que soporta una carga central P y sometido a una reacción del terreno uniformemente repartida [fig. 153 *c*)]. En la tabla 74[1] se dan datos relativos a este caso, en particular valores del factor γ_2 a emplear en las fórmulas (*f*) y (*g*).

TABLA 74

Momentos flectores en una zapata circular con carga central y reacción del terreno uniformemente repartida (fig. 153*c*)

$\nu = 0{,}25$

$\frac{h_0}{h_1}$	$M_r = M_t$	$M_r = \beta P$	$M_t = \beta_1 P$	
	$r = 0$	$r = a/2$	$r = a/2$	$r = a$
	γ_2	β	β_1	β_1
1,00	−0,065	0,021	0,073	0,030
1,50	−0,053	0,032	0,068	0,016
2,33	−0,038	0,040	0,063	0,007

70. *Problemas no lineales en la flexión de placas circulares*

Por la teoría de la flexión de vigas es ya sabido que, si las condiciones de apoyo o la carga varían con la flecha, esta flecha no será ya proporcional a la carga y ya no es aplicable el principio de superposición[2]. Problemas

[1] Respecto a datos más amplios sobre placas circulares de espesor variable, véase W. Gittleman, *Aircraft Eng.*, vol. 22, pág. 224, 1950, y J. Paschoud, *Schweiz. Arch.*, vol. 17, pág. 305, 1951. P. F. Chenea y P. M. Naghdi han dado un método gráfico de proyecto, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 561, 1952.

[2] Se ha estudiado un ejemplo de estos problemas en S. Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 69, 1956.

Librodot

similares pueden presentarse en la flexión de placas[1]. En la figura 154 se indica un ejemplo sencillo de este tipo. Una placa circular de radio a está comprimida por una carga q contra una cimentación absolutamente rígida. Si se aplican momentos de intensidad M_a en el borde de la placa, una parte de ella, de forma anular, puede flexar como indica la figura, mientras la parte central, de radio b permanece plana.

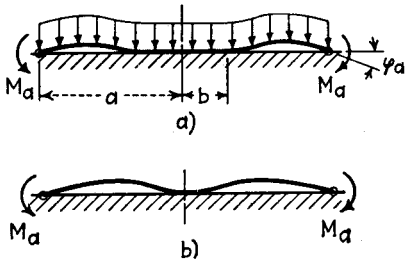


FIG. 154

Tales condiciones se presentan por ejemplo, en la placa de fondo de un recipiente cilíndrico lleno de líquido. Los momentos M_a representan en este caso el efecto de la pared cilíndrica del recipiente que sufre una flexión local en el fondo. Aplicando a la parte anular del fondo de la placa la solución conocida para una placa circular uniformemente cargada [v. expresión (m) del apartado 62], obtenemos la flecha

$$w = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D} \qquad (a)$$

Para determinar las constantes de integración C_1, ..., C_4 tenemos las siguientes condiciones de contorno en el borde exterior:

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad (M_r)_{r=a} = -M_a \qquad (b)$$

En todo el círculo de radio b la flecha y la pendiente se anulan. El momento flector debe ser también nulo en su circunferencia puesto que la parte interior de la placa permanece plana. Por consiguiente las condiciones en la circunferencia de radio b son

$$(w)_{r=b} = 0 \qquad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = 0 \qquad (M_r)_{r=b} = 0 \qquad (c)$$

Aplicando las condiciones (b) y (c) a la expresión (a) obtenemos las cinco condiciones siguientes

[1] Véase K. Girkmann, *Stahlbau*, vol. 18, 1931. Varios ejemplos de tales problemas han sido estudiadas por R. Hofmann, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 18, pág. 226, 1938.

Librodot

$$C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a = -\frac{qa^4}{64D}$$

$$C_1 + C_2 \ln b + C_3 b^2 + C_4 b^2 \ln b = -\frac{qb^4}{64D}$$

$$C_2 \frac{\nu - 1}{a^2} + C_3 2(\nu + 1) + C_4(3 + 2 \ln a + 2\nu \ln a + \nu) = -\frac{qa^2}{16D}(3 + \nu) + \frac{M_a}{D} \qquad (d)$$

$$C_2 \frac{\nu - 1}{b^2} + C_3 2(\nu + 1) + C_4(3 + 2 \ln b + 2\nu \ln b + \nu) = -\frac{qb^2}{16D}(3 + \nu)$$

$$C_2 \frac{1}{b} + C_3 2b + C_4 b(2 \ln b + 1) = -\frac{qb^3}{16D}$$

Eliminando de estas ecuaciones las constantes $C_1, \ldots, C_4$ obtenemos una ecuación que relaciona el momento M_a con la relación b/a, mediante la cual puede calcularse el radio de la parte plana para cada valor dado de M_a. Con este valor de b pueden calcularse las constantes de integración y obtenerse de la ecuación (a) la expresión de la flecha de la placa. Representando el momento M_a y el ángulo de giro φ_a del borde de la placa por las ecuaciones

$$M_a = \alpha \frac{qa^2}{32} \qquad \text{y} \qquad \varphi_a = \beta \frac{qa^3}{32D} \qquad (e)$$

y repitiendo los cálculos mencionados para distintos valores del momento M_a, podemos representar gráficamente la relación entre los factores α y β, como se indica en la figura 155, para el caso particular[1] $\nu = 0$. En esta figura se ve que β no varía proporcionalmente a α y la resistencia de la placa

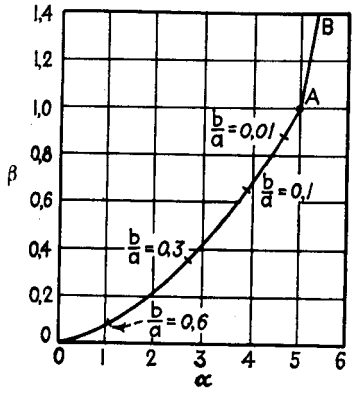


FIG. 155

[1] Este caso ha sido estudiado en la citada obra de Hofmann.

Librodot

al giro en el borde disminuye cuando disminuye b/a. Esta condición es válida hasta el valor $\alpha = 5$, para el cual $\beta = 1$, $b/a = 0$, y la placa toca el terreno únicamente en el centro como se ve en la figura 154 *b*). Para valores mayores de α, esto es, para momentos mayores que $M_a = 5qa^2/32$, la placa no toca el terreno y la relación entre α y β está representada por la línea recta AB. El valor $M_a = 5qa^2/32$ es el valor para el cual la flecha en el centro de la placa producida por los momentos M_a es igual a la flecha de una placa uniformemente cargada simplemente apoyada en su borde [v. ec. (68)].

En la figura 156 se indica otro ejemplo del mismo tipo.

Una placa circular uniformemente cargada está simplemente apoyada en el borde y queda en su centro sobre una cimentación absolutamente rígida. Nuevamente puede tratarse la parte anular de radio exterior a y radio interior b como placa uniformemente cargada y puede utilizarse la

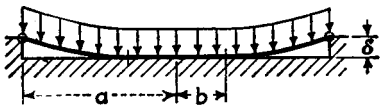


FIG. 156

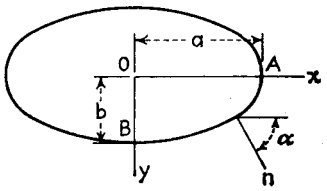


FIG. 157

solución (*a*). La relación b/a depende de la flecha δ y la intensidad de carga q.

71. *Placas elípticas*

Placa elíptica uniformemente cargada con borde empotrado

Tomando las coordenadas como indica la figura 157, la ecuación del contorno de la placa es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a)$$

La ecuación diferencial

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad (b)$$

y las condiciones de contorno

$$w = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \qquad (c)$$

Librodot

se verifican tomando para la flecha w la expresión[1]

$$w = w_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \qquad (d)$$

Debe notarse que debido a la ecuación (a) del contorno la expresión (d) y sus primeras derivadas respecto a x e y se anulan en el contorno. Sustituyendo (d) en la ecuación (b) vemos que la ecuación se satisface también así

$$w_0 = \frac{q}{D\left(\frac{24}{a^4} + \frac{24}{b^4} + \frac{16}{a^2b^2}\right)} \qquad (199)$$

Así pues, la expresión (d) que satisface la ecuación (b) y las condiciones de contorno, representa la solución rigurosa de una placa elíptica uniformemente cargada empotrada en el borde. Sustituyendo en la expresión (d) $x = y = 0$ hallamos que w_0 dada por la expresión (199) es la flecha en el centro de la placa. Si $a = b$ obtenemos para la flecha el valor ya obtenido para una placa circular empotrada [ec. (62), pág. 74]. Si $a = \infty$ la flecha w_0 se hace igual a la flecha de una franja uniformemente cargada con extremos empotrados y luz $2b$.

Los momentos flectores y torsor se obtienen sustituyendo la expresión (d) en las ecuaciones (101) y (102). De este modo hallamos

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -4w_0D\left[\frac{3x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} + \nu\left(\frac{x^2}{a^2b^2} + \frac{3y^2}{b^4} - \frac{1}{b^2}\right)\right] \qquad (e)$$

Para el centro de la placa y para los extremos del eje horizontal obtenemos respectivamente

$$(M_x)_{x=0,y=0} = 4w_0D\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \qquad \text{y} \qquad (M_x)_{x=a,y=0} = -\frac{8w_0D}{a^2} \qquad (f)$$

De modo análogo encontramos para los momentos M_y en el centro y en los extremos del eje menor

$$(M_y)_{x=0,y=0} = 4w_0D\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2}\right) \qquad \text{y} \qquad (M_y)_{x=0,y=b} = -\frac{8w_0D}{b^2} \qquad (g)$$

Se ve que las tensiones de flexión máximas se producen en los extremos del eje menor de la elipse. Conociendo los momentos M_x, M_y y M_{xy}, los valores del momento flector M_n y el momento torsor M_{nt} en cualquier

[1] Esta solución y la solución para una carga q con variación uniforme fueron obtenidas por G. H. Bryan; véase el libro de A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, 4.ª ed., pág. 484. El caso de placa elíptica de espesor variable fue estudiado por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, volumen 9, pág. 108, 1938.

Librodot

punto del contorno se obtienen mediante las ecuaciones (*c*) (ap. 22, pág. 107) sustituyendo en ellas

$$\cos\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{b^2x}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}} \quad \text{sen} \quad \alpha = -\frac{dx}{ds} = \frac{a^2y}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}} \qquad (h)$$

Los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y en cualquiera punto se obtienen sustituyendo la expresión (*d*) en las ecuaciones (106) y (107). En el contorno el esfuerzo cortante Q_n se obtiene mediante la ecuación (*d*) (ap. 22. pág. 107), y la reacción V_n mediante la ecuación (*g*) del mismo apartado. De esta forma encontramos que la reacción por unidad de longitud es máxima en los extremos del eje menor de la elipse y su valor absoluto es

$$(V_n)_{\text{máx}} = \frac{a^2b(3a^2 + b^2)q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} \quad \text{para} \quad a > b \qquad (i)$$

El mínimo valor absoluto de V_n se presenta en los extremos del eje mayor de la elipse donde

$$(V_n)_{\text{mín}} = \frac{ab^2(a^2 + 3b^2)q}{3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2} \qquad (j)$$

Para un círculo, $a = b$ y tenemos $(V_n)_{\text{máx}} = (V_n)_{\text{mín}} = qa/2$.

Placa elíptica con borde empotrado y carga con intensidad que varía linealmente

Suponiendo $q = q_0x$, hallamos que la ecuación (*b*) y las condiciones de contorno (*c*) se satisfacen tomando

$$w = \frac{q_0x}{24D}\,\frac{\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2}{\dfrac{5}{a^4} + \dfrac{1}{b^4} + \dfrac{2}{a^2b^2}} \qquad (200)$$

A partir de esta expresión pueden calcularse los momentos flectores y las reacciones en el contorno como en el caso anterior.

Placa elíptica simplemente apoyada en su borde bajo carga uniforme

La solución de este caso es más complicada que para borde empotrado[1] por ello únicamente damos aquí los resultados numéricos finales. Suponiendo $a/b > 1$, la flecha y los momentos flectores en el centro vienen dados por las fórmulas

$$(w)_{x=y=0} = \alpha\frac{qb^4}{Eh^3} \qquad M_x = \beta qb^2 \qquad M_y = \beta_1 qb^2 \qquad (k)$$

En la tabla 75 se dan los valores de las constantes α, β y β_1 para distintos valores de la relación a/b y $\nu = 0{,}3$.

La comparación de estos valores numéricos con los obtenidos antes para placas rectangulares (tabla 8, pág. 141) pone de manifiesto que para valores idénticos de la razón de los lados de una placa rectangular y la razón a/b de los semiejes de una placa

[1] Véase B. G. Galerkin, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 3, pág. 113, 1923.

Librodot

TABLA 75

Factores α, β, β_1 de las fórmulas (k) para placas elípticas simplemente apoyadas uniformemente cargadas

$\nu = 0{,}3$

a/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	∞
α	0,70	0,83	0,96	1,07	1,17	1,26	1,58	1,88	2,02	2,10	2,28
β	0,206	0,215	0,219	0,223	0,223	0,222	0,210	0,188	0,184	0,170	0,150
β_1	0,206	0,235	0,261	0,282	0,303	0,321	0,379	0,433	0,465	0,480	0,500

elíptica, los valores de la flecha y los momentos en el centro difieren muy poco. También está estudiado el caso de placa semielíptica limitada por el eje transversal[1].

72. *Placas triangulares*

Placa en forma de triángulo equilatero simplemente apoyada en sus bordes

Ya se ha estudiado (v. pág. 114) la flexión de este tipo de placa triangular por momentos M_n uniformemente repartidos en el contorno. Se ha demostrado que la deformada de la placa coincide con la de una membrana uniformemente tensada y uniformemente cargada y viene dada por la ecuación

$$w = \frac{M_n}{4aD}\left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3\right] \qquad (a)$$

en la que a representa la altura del triángulo y los ejes coordenados se han tomado como indica la figura 158.

En el caso de una placa uniformemente cargada la deformada es[2]

$$w = \frac{q}{64aD}\left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3\right]\left(\frac{4}{9}a^2 - x^2 - y^2\right) \qquad (201)$$

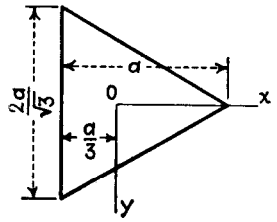


FIG. 158

[1] B. G. Galerkin, *Messenger Math.*, vol. 52, pág. 99, 1923. Respecto a flexión de placas elípticas empotradas bajo cargas concentradas, véase H. Happel, *Math. Z.*, vol. 6, pág. 203, 1920, y C. L. Perry, *Proc. Symposia Appl. Math.*, vol. 3, pág. 131, 1950. Véase también H. M. Sengupta, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, vol. 41, pág. 163, 1949, y vol. 43, pág. 123, 1950; este último trabajo contiene una corrección del anterior. B. Sen ha obtenido soluciones para placas uniformemente cargadas empotradas en contornos diversos utilizando coordenadas curvilíneas, véase *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 294, 1942.

[2] El problema de la flexión de una placa en forma de triángulo equilátero fue resuelto por S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 254, 1933.

Librodot

Derivando hallamos

$$\Delta w = -\frac{q}{4aD}\left[x^3 - 3y^2x - a(x^2 + y^2) + \frac{4}{27}a^3\right] \qquad (b)$$

En las expresiones (201) y (*b*) puede verse que la flecha y el momento flector se anulan en el contorno, puesto que la expresión entre corchetes se anula en él. Una nueva derivación da

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \qquad (c)$$

Por lo tanto se satisfacen también la ecuación diferencial de la deformada y la expresión (201) representa la solución del problema. Teniendo la expresión de las flechas, pueden obtenerse fácilmente las expresiones de los momentos flectores y los esfuerzos cortantes. Los máximos momentos flectores se producen en las bisectrices. Considerando los puntos del eje x y tomando $\nu = 0{,}3$, hallamos

$$\begin{aligned}(M_x)_{\text{máx}} &= 0{,}0248qa^2 \quad \text{para} \quad x = -0{,}062a \\ (M_y)_{\text{máx}} &= 0{,}0259qa^2 \quad \text{para} \quad x = 0{,}129a\end{aligned} \qquad (202)$$

En el centro de la placa

$$M_x = M_y = (1 + \nu)\frac{qa^2}{54} \qquad (203)$$

El caso de una fuerza concentrada que actúa sobre la placa puede resolverse mediante el *método de imágenes* (v. pág. 179). Consideremos el

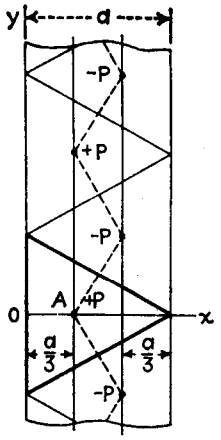


FIG. 159

caso en que el punto de aplicación de la carga sea el centro A de la placa (fig. 159). Considerando la placa indicada en la figura con líneas gruesas como una parte de una placa rectangular infinitamente larga de ancho a,

Librodot

aplicamos las cargas ficticias P de signos alternos como indica la figura. Las líneas nodales de la deformada producida por dicha carga, evidentemente dividen la placa infinitamente larga en triángulos equiláteros, cada uno de los cuales está exactamente en las mismas condiciones que la placa dada. Así pues, nuestro problema se reduce al de la flexión de una placa infinitamente larga cargada con dos filas de cargas equidistantes $+P$ y $-P$. Conociendo la solución para una carga concentrada (v. ap. 36) y utilizando el método de superposición, pueden calcularse fácilmente la flecha en el punto A y las tensiones en las proximidades de este punto, puesto que el efecto de las fuerzas ficticias sobre la flexión decrece rápidamente cuando su distancia al punto A aumenta. De esta forma hallamos en el punto A la flecha

$$w_0 = 0{,}00575\,\frac{Pa^2}{D} \tag{204}$$

Los momentos flectores a una distancia pequeña del punto A que representaremos por c, vienen dados por las expresiones

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(\ln\frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0{,}379\right) - \frac{(1-\nu)P}{8\pi} \\ M_y &= \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(\ln\frac{a\sqrt{3}}{\pi c} - 0{,}379\right) + \frac{(1-\nu)P}{8\pi} \end{aligned} \tag{205}$$

Puesto que para una placa circular de radio a_0 simplemente apoyada y cargada en el centro los momentos tangencial y radial a una distancia c del centro son respectivamente (v. pág. 87),

$$M_r = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\ln\frac{a_0}{c}$$

y (d)

$$M_t = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\ln\frac{a_0}{c} + \frac{(1-\nu)P}{4\pi}$$

puede concluirse que los primeros términos del segundo miembro de las ecuaciones (205) son idénticos a los términos logarítmicos correspondientes a una placa circular de radio

$$a_0 = \frac{a\sqrt{3}}{\pi}\,e^{-0{,}879} \tag{e}$$

Por lo tanto las tensiones locales junto al punto de aplicación de la carga pueden calcularse utilizando la teoría de placas gruesas desarrollada para placas circulares (v. ap. 19).

Placa en forma de triángulo equilátero con dos o tres bordes empotrados

Las placas triangulares se utilizan con frecuencia como placas de fondo de carboneras y silos. En tal caso cada placa triangular está rígidamente empotrada en

Librodot

los dos bordes inclinados y elásticamente empotrada en el borde horizontal (fig. 160). Solamente presentan interés práctico la carga uniformemente repartida o la carga de tipo hidrostático. Los máximos momentos flectores en el vano y el momento de empotramiento en el centro de un borde empotrado vienen dados por

$$M = \beta q a^2 \qquad \text{o} \qquad M = \beta_1 q_0 a^2 \tag{f}$$

según el tipo de carga (fig. 160). La tabla 76 da los coeficientes β y β_1 obtenidos por el método de diferencias finitas[1].

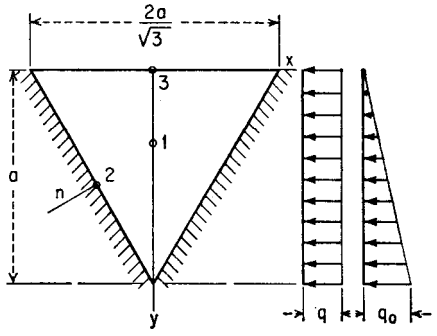


FIG. 160

TABLA 76

Valores de los factores β, β_1 en las ecuaciones (*f*) para placas en forma de triángulo equilátero (fig. 160)

$\nu = 0{,}20$

Reparto de carga	Borde $y = 0$ simplemente apoyado				Borde $y = 0$ empotrado			
	M_{x1}	M_{y1}	M_{n2}	M_{y3}	M_{x1}	M_{y1}	M_{n2}	M_{y3}
Uniforme . . . β	0,0126	0,0147	−0,0285	0	0,0113	0,0110	0,0238	0,0238
Hidrostática . . β_1	0,0053	0,0035	−0,0100	0	0,0051	0,0034	0,0091	0,0060

Debe notarse finalmente, que una placa triangular con ángulos $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/6$ y con todos sus bordes simplemente apoyados puede considerarse como la mitad de una placa equilátera (fig. 158) cargada en forma antisimétrica respecto al eje x. El problema de la flexión de esta placa puede estudiarse por diversos métodos, por ejemplo por el método de imágenes[2].

Placa en forma de triángulo rectángulo isósceles con bordes simplemente apoyados

Esta placa puede considerarse como la mitad de una placa cuadrada, como se indica en la figura 161 con línea de trazos y pueden aplicarse los métodos ya vistos para placas rectangulares[3]. Si existe una carga P aplicada en un punto A de coorde-

[1] Véase A. Smotrov, «Solutions for Plates Loaded According to the Law of Trapeze», Moscú, 1936.

[2] Para la solución de este problema en serie doble, véase R. Girtler, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, vol. 145, pág. 61, 1936. La flexión de placas en forma de triángulo equilátero con espesor variable ha sido estudiada por H. Göttlicher, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, pág. 12, 1938.

[3] Este método de solución se debe a A. Nádai, *Elastische Platten*, pág. 178, 1925. Otra forma de tratar el mismo problema fue dada por B. G. Galerkin, *Bull. acad. sci. Russ.*, pág. 223, 1919, y *Bull. Polytech. Inst.*, vol. 28, pág. 1, San Petersburgo, 1919.

Librodot

nadas ξ, η (fig. 161) suponemos una carga ficticia P aplicada en A', que es la imagen del punto A respecto a la línea BC. Estas dos cargas producen evidentemente una deformada tal que en ella BC es una línea nodal. Así la parte OBC de la placa cuadrada se encuentra en las mismas condiciones que la placa triangular OBC simplemente apoyada. Considerando la carga $+P$ y utilizando la solución de Navier para la placa cuadrada (pág. 132), obtenemos la flecha

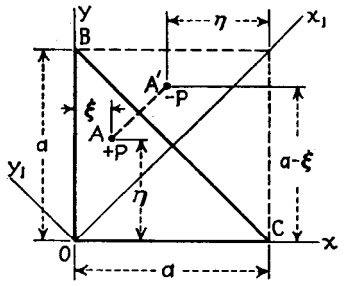


FIG. 161

$$w_1 = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{a}}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \qquad (g)$$

Del mismo modo, considerando la carga $-P$ y poniendo $a-\eta$ en lugar de ξ y $a-\xi$ en lugar de η, tenemos

$$w_2 = -\frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\eta}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{a}}{(m^2+n^2)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \qquad (h)$$

La flecha completa de la placa triangular se obtiene sumando las expresiones (g) y (h):

$$w = w_1 + w_2 \qquad (i)$$

Para obtener la flecha de la placa triangular producida por una carga uniformemente repartida de intensidad q, sustituimos en lugar de P $q\,d\xi\,d\eta$ e integramos la expresión (i) sobre la superficie del triángulo OBC. De esta forma obtenemos

$$w = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \left[\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}}{m(n^2-m^2)(m^2+n^2)^2} + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}}{n(m^2-n^2)(m^2+n^2)^2} \right] \qquad (j)$$

Esta serie converge rápidamente y puede utilizarse para calcular la flecha y los momentos flectores en cualquier punto de la placa. Tomando el eje de simetría del triángulo de la figura 161 como eje x_1 y representando las flechas y momentos M_{x_1} y M_{y_1} a lo largo de este eje por las fórmulas

$$w = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3} \qquad M_{x_1} = \beta qa^2 \qquad M_{y_1} = \beta_1 qa^2 \qquad (k)$$

Librodot

los valores de los factores numéricos α, β, β_1 son los dados en las figuras 162 y 163. Comparando estos resultados con los dados en la tabla 8 para una placa cuadrada uniformemente cargada, puede deducirse que para el mismo valor de a el momento flector máximo de la placa triangular es algo menor que la mitad del momento flector máximo de la placa cuadrada.

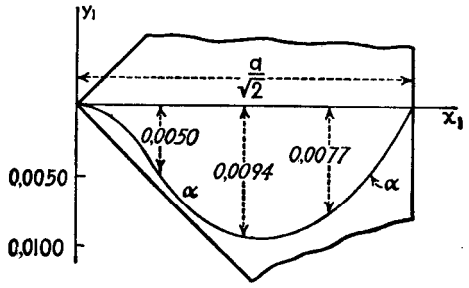


FIG. 162

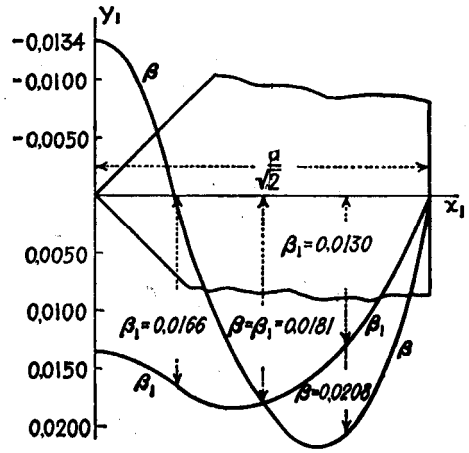


FIG. 163

Para simplificar el cálculo de flechas y momentos puede transformarse la serie doble (j) en una serie sencilla[1]. Para ello usemos la conocida serie

$$U_m(x) = \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2+m^2)^2} = -\frac{2}{m^4} + \frac{\pi}{2m^3}\,\frac{\operatorname{ch} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{sh}\frac{\pi m}{2}} + \frac{\pi^2}{4m^2}\,\frac{\operatorname{ch}\, mx}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi m}{2}} + \frac{\pi x}{2m^2}\,\frac{\operatorname{sh} m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\operatorname{sh}\frac{m\pi}{2}} \qquad (l)$$

[1] Esta transformación fue comunicada a S. Timoshenko por J. V. Uspensky.

Librodot

que puede ponerse en la forma siguiente

$$U_m(x) = (\alpha_m + \beta_m x) \operatorname{ch} mx + (\gamma_m + \delta_m x) \operatorname{sh} mx - \frac{2}{m^4} \qquad (m)$$

Considerando ahora la serie

$$V_m(x) = \sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2(n^2 - m^2)} \qquad (n)$$

obtenemos

$$\frac{dV_m}{dx} = -\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{n \operatorname{sen} nx}{(n^2 + m^2)^2(n^2 - m^2)} \qquad (o)$$

y

$$\frac{d^2V_m}{dx^2} + m^2V_m = -\sum_{n=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n^2 + m^2)^2} = -U_m \qquad (p)$$

Integrando la ecuación (p) hallamos

$$V_m = A_m \cos mx + B_m \operatorname{sen} mx + \frac{1}{m}\int_0^x U_m(\xi) \operatorname{sen} m(\xi - x)\, d\xi \qquad (q)$$

y

$$\frac{dV_m}{dx} = -mA_m \operatorname{sen} mx + mB_m \cos mx - \int_0^x U_m(\xi) \cos m(\xi - x)\, d\xi \qquad (r)$$

Las constantes A_m y B_m pueden determinarse a partir de las condiciones

$$\left(\frac{dV_m}{dx}\right)_{x=0} = 0 \qquad \text{y} \qquad V_m(0) = V_m(\pi) \qquad (s)$$

que se deducen de las series (o) y (n). Con estos valores de las constantes la expresión (r) da la suma de la serie (o), que reduce la serie doble de la expresión (j) a una serie sencilla.

73. Placas sesgadas

Se han utilizado placas en forma de paralelogramo oblicuo como losas de forjado en puentes sesgados. Tales losas ordinariamente están simplemente apoyadas en los estribos, en tanto, los otros lados quedan libres o elásticamente apoyados en las vigas.

En la mayoría de los casos es recomendable utilizar un sistema de coordenadas oblicuas elegido de acuerdo con el ángulo de inclinación dado; en algunos casos particulares pueden tratarse con ventaja las placas sesgadas en coordenadas rectangulares y en general el método de diferencias finitas se presenta como el más prometedor. Los resultados numéricos siguientes para placas sesgadas uniformemente cargadas se han obtenido de esta forma[1]. En el centro de una placa sesgada con todos los bordes simplemente apoyados [fig. 164 *a*)] es

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D} \qquad M_{\text{máx}} = \beta q a^2 \qquad (a)$$

[1] La mayoría de los datos se deben a V. P. Jensen, *Univ. Illinois Bull.*, 332, 1941, y V. P. Jensen y J. W. Allen, *Univ. Illinois Bull.*, 369, 1947. Véase también C. P. Siess, *Proc. ASCE*, volumen 74, pág. 323, 1948. H. Favre ha aplicado métodos analíticos, véase *Schweiz. Bauztg.*, vol. 60, pág. 35, 1942; P. Lardy, *Schweiz. Bauztg.*, vol. 67, pág. 207, 1949; igualmente J. Krettner, *Ingr.-Arch.*, vol. 22, pág. 47, 1954, donde se da la bibliografía más amplia. Respecto a uso del método de la energía, véase A. M. Guzmán y C. J. Luisoni, *Publs. Univ. Nacl. Buenos Aires*, pág. 452, 1953. La flexión pura de placas sesgadas ha sido estudiada por E. Reissner, *Quart. Appl. Math.*, vol. 10, pág. 395, 1953. Modelos de placas sesgadas han sido ensayados por L. Schmerber, G. Brandes, y H. Schambeck, *Bauingenieur*, vol. 33, pág. 174, 1958. Respecto al empleo de la diferencias finitas, véase también el apartado 83.

Librodot

El momento flector $M_{máx}$ actúa en una dirección muy aproximada a la del vano menor de la placa.

Si los bordes $y = 0$ e $y = a$ están libres y los otros dos bordes simplemente apoyados [fig. 164 *b*)] la parte central de la placa soporta una carga en dirección normal a los estribos. Siendo w_0 y $(M_0)_{máx}$ la flecha y momento flector en el centro

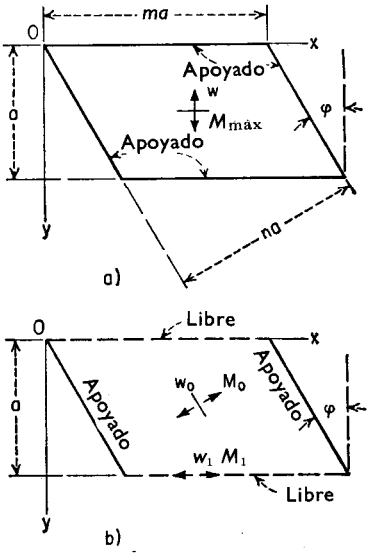


FIG. 164

de la placa respectivamente y $(w_1)_{máx}$ y $(M_1)_{máx}$ los valores correspondientes en el borde libre, podemos expresar estas cantidades en la forma

$$w_0 = \alpha_0 \frac{qa^4}{D} \qquad (M_0)_{máx} = \beta_0 q a^2$$
$$(w_1)_{máx} = \alpha_1 \frac{qa^4}{D} \qquad (M_1)_{máx} = \beta_1 q a^2 \qquad (b)$$

Los valores numéricos de los coeficientes están dados en la tabla 77.

TABLA 77

Valores de los coeficientes de las ecuaciones (*a*) y (*b*) para el cálculo de flechas y momentos flectores de placas oblicuas uniformemente cargadas

$\nu = 0{,}2$

$\varphi°$	m	n	Placa de la figura 164*a*		Placa de la figura 164*b*			
			α	β	α_0	α_1	β_0	β_1
0	2	2	0,01013	0,0999	0,214	0,224	0,495	0,508
30	2,02	1,75	0,01046	0,0968				
30	1,92	1,67	. . . . .	. . . . .	0,1183	0,1302	0,368	0,367
45	2	1,414	0,00938	0,0898	0,0708	0,0869	0,291	0,296
60	2	1	0,00796	0,0772	0,0186	0,0396	0,166	0,152
75	2	0,518	0,00094	0,0335				

Librodot

74. *Distribución de tensiones alrededor de agujeros*

Para estudiar la distribución de tensiones alrededor de un agujero, es más sencillo considerar una placa de gran extensión; los resultados obtenidos de este modo son aplicables a placas de cualquier forma sin error apreciable, siempre que el ancho del agujero sea pequeño en comparación con las dimensiones totales de la placa.

Tomemos como ejemplo una placa infinitamente larga en estado uniforme de tensiones definidas por los momentos

$$M'_x = M_0 \qquad M'_y = 0 \tag{a}$$

que corresponden a una deformada

$$w' = \frac{M_0(x^2 - \nu y^2)}{2D(1 - \nu^2)} = -\frac{M_0 r^2}{4D(1 - \nu^2)}[1 - \nu + (1 + \nu)\cos 2\theta] \tag{b}$$

Para obtener la perturbación producida en tal estado de flexión pura por un agujero circular de radio a (fig. 165) suponemos que se ha suprimi-

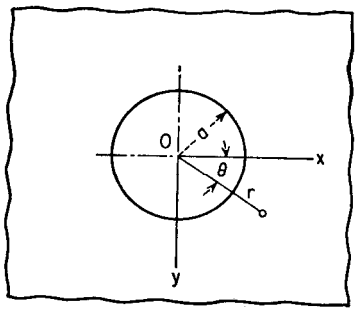


FIG. 165

do el material en el interior del círculo. Entonces tenemos que sustituir la acción de las tensiones iniciales a lo largo del contorno del agujero por la acción de los momentos y fuerzas exteriores

$$\begin{aligned}(M'_r)_{r=a} &= \frac{M_0}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ (V'_r)_{r=a} &= \frac{M_0}{a}\cos 2\theta\end{aligned} \tag{c}$$

que se obtienen fácilmente derivando la expresión (b) de acuerdo con las ecuaciones (192).

Al estado inicial de tensiones superponemos ahora un estado adicional de tensiones tal que: 1) los momentos y esfuerzos resultantes se anulen para $r = a$, y 2) las tensiones añadidas se anulen en el infinito ($r = \infty$).

Podemos cumplir ambas condiciones tomando como flecha adicional

$$w'' = -\frac{M_0 a^2}{2D}\left[A \ln r + \left(B + C\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right] \tag{d}$$

Librodot

Esta ecuación satisface también la ecuación diferencial homogénea (194) y da los siguientes esfuerzos en el contorno del agujero:

$$(M_r'')_{r=a} = -\frac{M_0}{2}\{(1-\nu)A + [4\nu B - 6(1-\nu)C]\cos 2\theta\}$$
$$(V_r'')_{r=a} = \frac{M_0}{a}[(6-2\nu)A + 6(1-\nu)C]\cos 2\theta \qquad (e)$$

Puesto que las expresiones (*c*) y (*e*) de M_r contienen un término constante y un término proporcional a cos 2θ en tanto que ambas expresiones para V_r sólo constan de un término es necesario satisfacer tres ecuaciones para que se cumplan las condiciones requeridas $M_r' + M_r'' = 0$ y $V_r' + V_r'' = 0$ en el contorno del agujero. Resolviendo estas ecuaciones respecto a los coeficientes indeterminados A, B y C obtenemos las flechas finales $w = w' + w''$ y los siguientes esfuerzos en el contorno

$$M_t = M_0\left[1 - \frac{2(1+\nu)}{3+\nu}\cos 2\theta\right]$$
$$Q_t = \frac{4M_0}{(3+\nu)a}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (f)$$

Para $\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/4$, obtenemos respectivamente

$$(M_t)_{\text{máx}} = \frac{5+3\nu}{3+\nu}M_0$$
$$(Q_t)_{\text{máx}} = \frac{4}{(3+\nu)a}M_0 \qquad (g)$$

Es normal representar el mayor valor de una tensión debida a la perturbación local en la forma

$$\sigma_{\text{máx}} = k\sigma \qquad (h)$$

donde σ representa el valor medio de esa tensión en la misma sección y k es el denominado factor de concentración de tensiones. Pensando en la máxima tensión de flexión en el contorno del agujero, podemos poner también $k = (M_t)_{\text{máx}}/M_0$, siendo M_0 el valor inicial del momento para $\theta = \pi/2$, donde se produce la tensión máxima. Así en el caso de flexión pura tenemos

$$k = \frac{5+3\nu}{3+\nu} \qquad (i)$$

que para el acero ($\nu = 1/3$) vale 1,80.

De modo parecido podrían obtenerse factores de concentración de tensiones para otros estados uniformes de tensiones y para agujeros de forma distinta de la circular[1]. Sin embargo tales resultados resultan de escaso valor por la siguiente razón.

[1] Véase J. N. Goodier, *Phil. Mag.*, vol. 22, pág. 69, 1936, y G. N. Savin, «Stress Concentration around Holes», Moscú, 1951.

Librodot

Mientras las tensiones de flexión (para referirnos únicamente al caso visto) no pasan de valor $\sigma_{máx} = 6M_0k/h^2$, el valor máximo de la tensión tangencial correspondiente está dado por

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2h} Q_{máx} = \frac{6M_0}{(3 + \nu)ah} = \frac{\sigma_{máx}}{(3 + \nu)k} \frac{h}{a} \qquad (j)$$

Así, disminuyendo la relación a/h podemos aumentar la relación $\tau_{máx}/\sigma_{máx}$ indefinidamente. De esta forma llegamos enseguida a tensiones cortantes de tal valor que su efecto sobre la deformación de la placa deja de ser despreciable frente al efecto de los momentos. En consecuencia, para

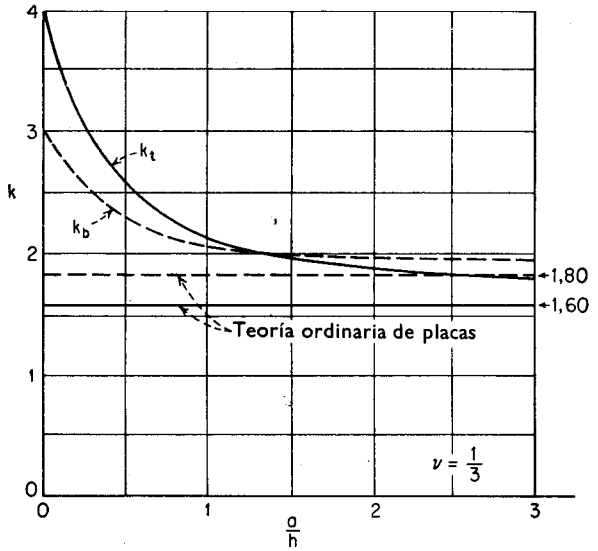


FIG. 166

obtener resultados confiables, tenemos que recurrir a teorías especiales que tengan en cuenta la deformación transversal.

En la figura 166 se han llevado en función de a/h los factores de concentración de tensiones obtenidos[1] mediante la teoría de E. Reissner (v. ap. 39). La curva k_b es válida en el caso de flexión pura antes considerado; la curva k_t da la concentración de tensiones en el caso de torsión uniforme, producida por momentos $M_x = M_0$, $M_y = -M_0$ en el estado inicial de tensiones. Los valores $k_b = 1{,}80$ y $k_t = 1{,}60$ dados para estos casos por la teoría ordinaria, que figuran como líneas rectas, dan aproximaciones asintóticas de ambas curvas, cuando la relación a/h crece indefinida-

[1] E. Reissner, *J. Appl. Mechanics*, vol. 12, pág. A-75, 1945. El caso ha sido estudiado con más rigor por J. B. Alblas, «Theorie van de driedimensionale Spanningstoestand in een doorborde plaat», Amsterdam, 1957. Respecto a flexión de una placa cuadrada con un agujero circular, véase M. El-Hashimy, «Ausgewählte Plattenprobleme», Zürich, 1956, donde se aplica la teoría ordinaria.

Librodot

mente. Se ve en la figura que aun para agujeros de radio tres veces mayor que el espesor de la placa el error resultante de la aplicación de la teoría ordinaria supera el 10 % del verdadero valor de k_b. Es también digno de notarse que para agujero cuyo diámetro se anula, el valor límite $k_b = 3$ del factor de concentración de tensiones resulta igual al que se obtiene en estado plano de tensiones cuando se considera una tensión uniforme en una dirección.

Si el agujero (fig. 165) se llena con un material elástico distinto del de la placa, tenemos el caso de una «inclusión elástica». El agujero vacío y la inclusión rígida pueden considerarse como casos límites de inclusión elástica en que el material de relleno tiene módulo de Young cero o infinito respectivamente. En lo que sigue se considera brevemente el efecto de una inclusión rígida.

Exactamente como en el caso de un agujero, tenemos que combinar un estado inicial de tensiones con otro suplementario; sin embargo, ahora las condiciones que han de cumplirse en el contorno del agujero $r = a$ son (en el caso simétrico)

$$(w)_{r=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \tag{k}$$

donde w es la flecha total de la placa. De las expresiones (192) de los esfuerzos, concluimos fácilmente que en la periferia de la inclusión, debe verificarse $M_t = \nu M_r$ en tanto que los momentos M_{rt} se anulan.

En el caso particular de flexión pura, supuesto en la página 59, obtenemos en torno a la inclusión rígida una distribución de momentos radiales dada por[1]

$$M_r = M_0\left(\frac{1}{1+\nu} + \frac{2\cos 2\theta}{1-\nu}\right) \tag{l}$$

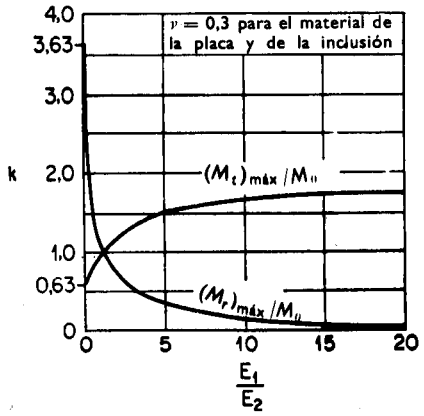


FIG. 167

El factor de concentración de tensiones correspondientes es igual a $k = (3 + \nu)/(1 - \nu^2)$, esto es, para el acero 3,63. En este resultado no se incluye el efecto de la deformación tangencial, por lo que sólo es válido para valores altos de a/h.

[1] M. Goland, *J. Appl. Mechanics*, vol. 10, pág. A-69, 1943. La figura 167 se ha tomado de este estudio. Véase también Yi-Yuan Yu, *Proc. Second U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, página 381, Ann Arbor, Mich., 1954.

Se ve que en las proximidades de una inclusión rígida, los momentos radiales M_r superan notablemente los momentos tangenciales M_t esto está en notable contraste con el estado de tensiones en torno a un agujero, caso en el que los momentos M_t superan a los momentos M_r.

Como puede verse en la figura 167, ambos momentos difieren menos en el caso de una inclusión elástica. En la figura E_1 representa el módulo de Young de la placa y E_2 el del relleno.

Una inclusión elástica puede sustituirse sin cambiar sustancialmente su efecto, por una inclusión elástica anular. Reforzando un agujero con un anillo de rigidez elegida adecuadamente, puede reducirse notablemente la concentración de tensiones en torno al agujero[1].

[1] Respecto a análisis de tensiones y datos numéricos relativos a este caso, véase Savin, *op. cit.*

Librodot