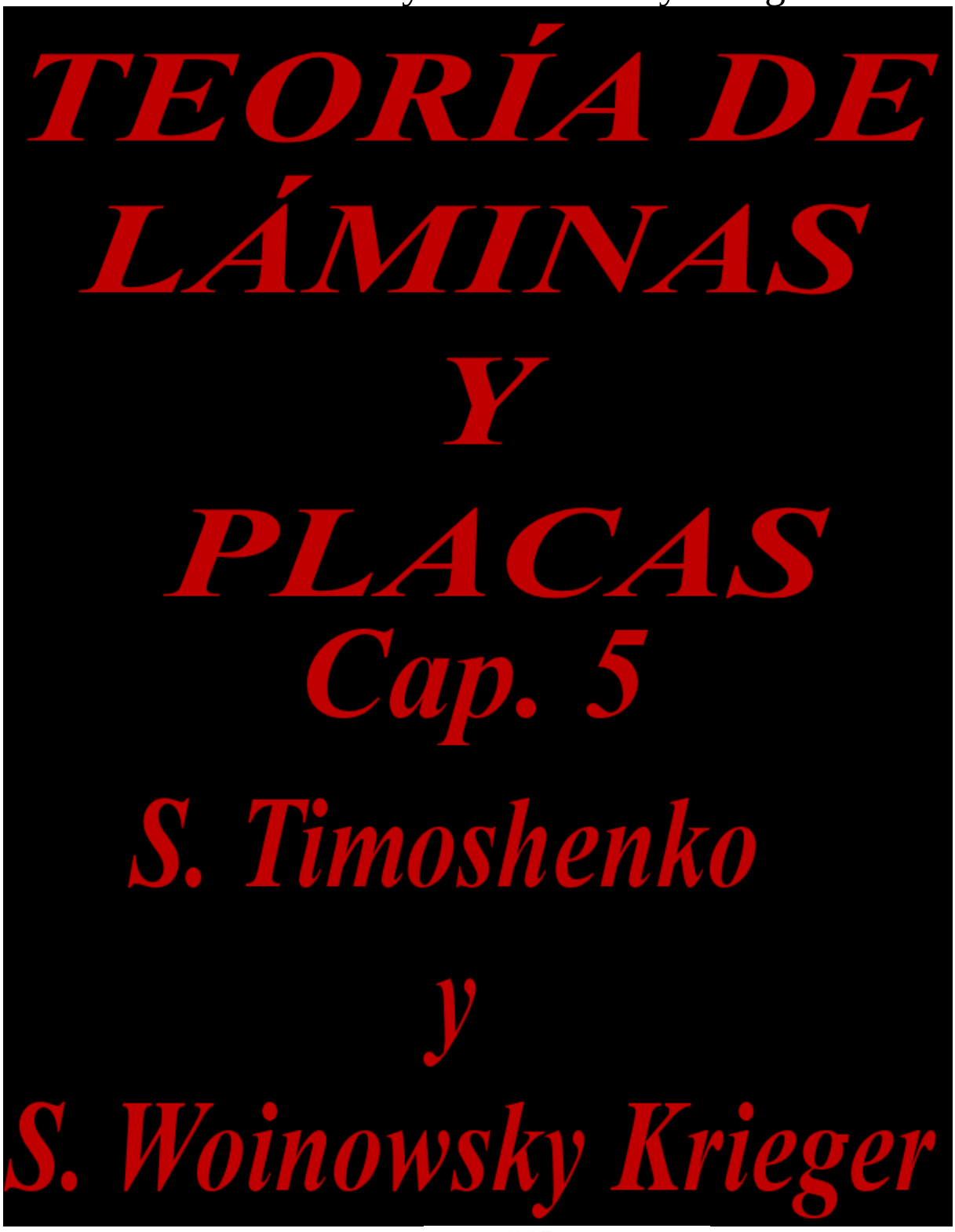
TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
S. Timoshenko y S. Woinowsky Krieger



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

5

Placas rectangulares simplemente apoyadas

27. *Placas rectangulares simplemente apoyadas con carga sinusoidal*

Disponiendo los ejes de coordenadas como indica la figura 59, se supone que la expresión de la carga repartida sobre la placa es

$$q = q_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \qquad (a)$$

donde q_0 representa la intensidad de la carga en el centro de la placa. En este caso la ecuación diferencial (103) de la deformada será

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q_0}{D} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \qquad (b)$$

Las condiciones en los límites para bordes simplemente apoyados, son

$$w = 0 \quad M_x = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = a$$
$$w = 0 \quad M_y = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad \text{y} \quad y = b$$

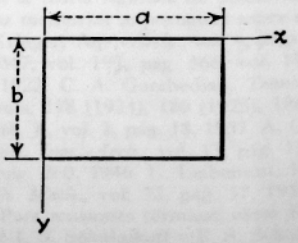


FIG. 59

Librodot

Usando la ecuación (101) de los momentos flectores y observando que por ser en los bordes $w = 0$ y $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ y $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ para los bordes respectivamente paralelos a los ejes x e y, se pueden escribir las condiciones en los límites de la forma:

$$\begin{aligned} &(1)\ w = 0 \qquad (2)\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } x = a \\ &(3)\ w = 0 \qquad (4)\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } y = 0 \text{ y } y = b \end{aligned} \tag{c}$$

Se comprueba que todas las condiciones en los límites se cumplen si se expresan las flechas mediante

$$w = C \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \tag{d}$$

donde la constante C debe elegirse de modo que satisfaga (b). Sustituyendo (d) en (b) se encuentra

$$\pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 C = \frac{q_0}{D}$$

y se llega a que la deformada que satisface a (b) y a las condiciones de contorno (c), es

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \tag{e}$$

Con ayuda de esta expresión y las ecuaciones (101), (102), se encuentra:

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \\ M_y &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{b} \\ M_{xy} &= \frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2 ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \tag{f}$$

Se ve que la flecha máxima y los momentos flectores máximos se producen en el centro de la placa. Sustituyendo x por $a/2$ e y por $b/2$ en (e) y (f) se encuentra:

$$w_{\text{máx}} = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{124}$$

$$\begin{aligned} (M_x)_{\text{máx}} &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2}\right) \\ (M_y)_{\text{máx}} &= \frac{q_0}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \end{aligned} \tag{125}$$

Librodot

En el caso particular de una placa cuadrada, $a = b$, y las fórmulas precedentes serán

$$w_{\text{máx}} = \frac{q_0 a^4}{4\pi^4 D} \qquad (M_x)_{\text{máx}} = (M_y)_{\text{máx}} = \frac{(1+\nu) q_0 a^2}{4\pi^2} \tag{126}$$

Se calculan los esfuerzos cortantes por las ecuaciones (106) y (107) y se tiene

$$Q_x = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \cos\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}$$
$$Q_y = \frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{b} \tag{g}$$

Para obtener las reacciones en los bordes apoyados de la placa, se opera como indica el apartado 22. Para el borde $x = a$ se encuentra

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = -\frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right) \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b} \tag{h}$$

De la misma manera, para $y = b$.

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=b} = -\frac{q_0}{\pi b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \tag{i}$$

Por consiguiente, el reparto de la reacción sigue una ley sinusoidal, el signo menos indica que las reacciones sobre la placa actúan hacia arriba. Por simetría se llega a que las fórmulas (h) e (i) representan también las distribuciones de las reacciones a lo largo de los lados $x = 0$ e $y = 0$. La resultante de las reacciones es:

$$\frac{2q_0}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2-\nu}{b^2}\right) \int_0^b \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\, dy + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{2-\nu}{a^2}\right) \int_0^a \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}\, dx\right] = \frac{4q_0 ab}{\pi^2} + \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^2} \tag{j}$$

Observando que

$$\frac{4q_0 ab}{\pi^2} = \int_0^a \int_0^b q_0 \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{\pi y}{b}\, dx\, dy \tag{k}$$

se llega a la conclusión de que la suma de las reacciones repartidas es mayor que la carga total sobre la placa expresada por (r). Este resultado se explica fácilmente si se tiene en cuenta que como en el apartado 22 se obtienen no solamente las reacciones repartidas sino también las reacciones concentra-

Librodot

das en los ángulos de la placa. Estas reacciones concentradas son iguales por simetría y su valor como se ve en la figura 51 es

$$R = 2(M_{xy})_{x=a,y=b} = \frac{2q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2} \qquad (l)$$

Este signo positivo indica que las reacciones están dirigidas hacia abajo. Su suma es exactamente igual al segundo término de la expresión (*j*). La figura 60 indica las reacciones repartidas y concentradas que actúan sobre la placa y equilibran la carga definida por la ecuación (*a*). Se puede ver que los ángulos tienen tendencia a elevarse bajo la acción de la carga aplicada y deben producirse las reacciones concentradas R para evitarlo.

La tensión de flexión máxima se produce en el centro de la placa.

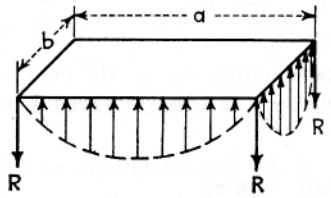


FIG. 60

Suponiendo $a > b$, se encuentra en el centro que $M_y > M_x$. Por consiguiente, la tensión de flexión máxima es

$$(\sigma_y)_{\text{máx}} = \frac{6(M_y)_{\text{máx}}}{h^2} = \frac{6q_0}{\pi^2 h^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{\nu}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

La tensión tangencial máxima aparecerá en los puntos medios de los lados mayores observando que el esfuerzo cortante total $V_y = Q_y - \partial M_{xy}/\partial x$ está repartida a todo el ancho del espesor de la placa siguiendo una ley parabólica y utilizando la ecuación (*i*), se obtiene

$$(\tau_{yz})_{\text{máx}} = \frac{3q_0}{2\pi bh\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{2-\nu}{a^2}\right)$$

Si la carga sunisoidal está dada por

$$q = q_0 \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad (m)$$

donde m y n son números enteros, se opera como anteriormente y se obtiene para la deformada

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad (127)$$

de donde se obtiene por derivación, los momentos flectores y torsores.

Librodot

28. *Solución de Navier para placas rectangulares simplemente apoyadas*

Se puede utilizar la solución del apartado precedente para calcular las flechas producidas, sobre las placas rectangulares simplemente apoyadas, para toda clase de carga expresada por la ecuación

$$q = f(x,y) \qquad (a)$$

Para ello, se representa la función $f(x,y)$ bajo la forma de una serie trigonométrica doble[1]:

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (128)$$

Para calcular los coeficientes $a_{m'n'}$ de esta serie, se multiplica esta ecuación por sen $(n'\pi y)/b\, dy$ y se integra entre 0 y b.

Advirtiendo que:

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}\, dy = 0 \quad \text{cuando } n \neq n'$$

$$\int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}\, dy = \frac{b}{2} \quad \text{cuando } n = n'$$

Se encuentra que

$$\int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}\, dy = \frac{b}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn'} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

Multiplicando los dos miembros de (b) por sen $(m'\pi x/a)dx$ e integrando entre 0 y a, se tiene

$$\int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}\, dx\, dy = \frac{ab}{4} a_{m'n'}$$

de donde

$$a_{m'n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x,y) \operatorname{sen} \frac{m'\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n'\pi y}{b}\, dx\, dy \qquad (129)$$

Verificando la integración (129) se encuentran los coeficientes de la serie (128) para una distribución de carga dada, es decir, para $f(x, y)$ conocido y se representa en este caso la carga dada como la suma de cargas parciales sinusoidales. La flecha dada en cada carga particular ha sido

[1] Navier fue el primero que resolvió así este mismo problema en una Memoria que presentó a la Academia Francesa de Ciencias en 1820. El resumen de esta Memoria fue publicado en *Bull. Soc. Phil.-Math.*, París, 1823. El manuscrito se encuentra en la biblioteca de l'Ecole des Ponts et Chaussées.

Librodot

estudiada en el apartado anterior y la flecha total se obtiene sumando los términos dados por la ecuación (127). Por consiguiente nos encontramos

$$w = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \tag{130}$$

Tomemos el caso de una carga uniformemente repartida sobre la superficie de una placa para ilustrar la aplicación de la solución general (130). En este caso.

$$f(x,y) = q_0$$

donde q_0 es la intensidad de la carga uniformemente repartida. La ecuación (129) nos da:

$$a_{mn} = \frac{4q_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy = \frac{16q_0}{\pi^2 mn} \tag{c}$$

donde m y n son números enteros impares. Si m o n, o los dos son pares $a_{mn} = 0$.

Sustituyendo en (130) se encuentra $m = 1, 3, 5, \ldots$, y $n = 1, 3, 5, \ldots$.

$$w = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{131}$$

En el caso de una carga uniforme, se tiene una deformada simétrica respecto a los ejes $x = a/2$, $y = b/2$ y todos los términos correspondientes a valores pares de m o n, en (131), desaparecen puesto que no son simétricos respecto a los ejes mencionados. La flecha máxima de la placa está en su centro y se expresa, sustituyendo $x = a/2$; $y = b/2$ en (131) dando,

$$w_{\text{máx}} = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \tag{132}$$

Esta es una serie rápidamente convergente; una aproximación suficiente se obtiene tomando el primer término de la serie, que en el caso de una placa cuadrada da

$$w_{\text{máx}} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0{,}00416 \frac{q_0 a^4}{D}$$

donde, sustituyendo D por su valor y suponiendo $\nu = 0{,}3$,

$$w_{\text{máx}} = 0{,}0454 \frac{q_0 a^4}{Eh^3}$$

Este resultado tiene un error del orden de 2,5 % (v. tabla 8).

Librodot

De la expresión (132) se deduce que las flechas de dos placas que tienen el mismo espesor e igual relación a/b, aumenta con la cuarta potencia de la longitud de los lados.

La ecuación general (131) da el valor de los momentos flectores y torsores, utilizando las ecuaciones (101) y (102). La serie obtenida en este caso no converge tan rápidamente como (131) y en un posterior estudio (v. ap. 30), se dará otra forma de solución más apropiada para cálculos numéricos. Puesto que los momentos están expresados por las derivadas segundas de (131), sus valores máximos si se toman q_0 y D iguales son proporcionales al cuadrado de las dimensiones lineales. Puesto que la carga total sobre la placa igual a $q_0\ ab$, es también proporcional al cuadrado de las dimensiones lineales de la placa, se llega a que para dos placas de igual espesor y de la misma relación a/b, los momentos flectores máximos y, por consiguiente, las tensiones máximas son iguales si las cargas totales sobre las dos placas son iguales[1].

29. *Otras aplicaciones de la solución de Navier*

Se ve, por el estudio del apartado anterior, que la flecha de una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59) siempre puede representarse en

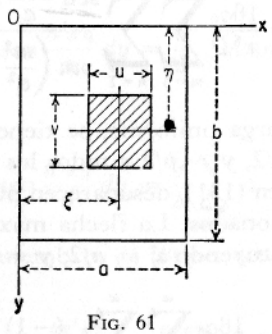


FIG. 61

la forma de una serie trigonométrica doble (130), siendo los coeficientes a_{mn} dados por la ecuación (129).

Apliquemos este resultado al caso de una carga única P uniformemente repartida sobre el área de un rectángulo (v. fig. 61). En virtud de (129), tenemos

$$a_{mn} = \frac{4P}{abuv} \int_{\xi-u/2}^{\xi+u/2} \int_{\eta-v/2}^{\eta+v/2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy$$

o sea

$$a_{mn} = \frac{16P}{\pi^2 mnuv} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{2b} \qquad (a)$$

[1] Esta conclusión fue establecida por Mariotte en el trabajo *Traité du mouvement des eaux*, publicado en 1686. Véanse trabajos científicos de Mariotte, nueva edición, vol. 2, págs. 467 y 1740.

Librodot

Si, en particular, $\xi = a/2$, $\eta = b/2$, $u = a$ y $v = b$, la ecuación (a) es idéntica a la (c), obtenida en el apartado 28, para una placa uniformemente cargada.

Otro caso de interés práctico es la carga única concentrada en un punto $x = \xi$, $y = \eta$, de una placa. Utilizando (a) y haciendo tender u y v hacia 0, se tiene

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \qquad (b)$$

y con ayuda de (130), se obtiene para la flecha

$$w = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (133)$$

La serie converge rápidamente y se puede obtener la flecha en todo punto de la placa, con una aproximación suficiente, no tomando más que los primeros términos de la serie. Calculemos, por ejemplo, la flecha del centro, cuando la carga está aplicada también en el punto medio. Tenemos entonces, $\xi = x = a/2$, $\eta = y = b/2$ y la serie (133) da

$$w_{\text{máx}} = \frac{4P}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \qquad (c)$$

donde $m = 1, 3, 5 \ldots$ y $n = 1, 3, 5 \ldots$ En el caso de una placa cuadrada la ecuación (c) deberá ser

$$w_{\text{máx}} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m^2 + n^2)^2}$$

tomando los cuatro primeros términos de la serie se encuentra

$$w_{\text{máx}} = \frac{0{,}01121 Pa^2}{D}$$

que es aproximadamente 3,5 % menor que el valor exacto (v. tabla 23, pág. 165).

Como la serie (128), representa la intensidad de la carga concentrada, es divergente en el punto $x = \xi$, $y = \eta$, igualmente lo son las series que expresan los momentos flectores y los esfuerzos cortantes en el punto de aplicación de la carga.

Consideremos la expresión

$$w = K(x,y,\xi,\eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \qquad (134)$$

Librodot

que, en virtud de la ecuación (133) representa la flecha debida a la carga unidad $P = 1$ y que se escribe en resumen $K(x,y,\xi,\eta)$. Siendo las variables x e y, $w = K(x,y,\xi,\eta)$ es la ecuación de la deformada de la placa, sometida a una carga unidad aplicada en un punto fijo $x = \xi$, $y = \eta$. Si ξ y η son las variables, la ecuación (134) define la superficie de influencia para la flecha de la placa en un punto fijo x, y, cuando la posición de la carga unidad móvil está dada por ξ y η. Además para una carga cualquiera de intensidad $f(\xi, \eta)$ repartida sobre un área A conocida, la flecha correspondiente se obtiene fácilmente en todo punto de la placa. En efecto aplicando una carga elemental $f(\xi,\eta)\, d\xi d\eta$ al punto $x = \xi$, $y = \eta$ y utilizando el principio de superposición, se llega a la flecha

$$w = \iint_A f(\xi,\eta) K(x,y,\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{135}$$

estando la integral doble extendida a la superficie cargada y $K(x,y,\xi,\eta)$ dada por (134).

A la función $K(x,y,\xi,\eta)$ se le llama a menudo función de Green de la placa. Esta función está asociada a las condiciones en los límites de una placa rectangular simplemente apoyada cuando está dada bajo la forma 134. De todas formas, muchas propiedades de la función de Green son independientes de estas restricciones. Un ejemplo de esto es la propiedad de simetría, expresada por

$$K(x,y,\xi,\eta) = K(\xi,\eta,x,y)$$

que deriva del teorema recíproco de Maxwell[1] y que es fácil de comprobar en el caso particular de la función (139).

Como en el último ejemplo de la aplicación de la solución de Navier, consideremos el caso de una carga P uniformemente repartida sobre el área de un círculo de radio c y de centro el punto de coordenadas $x = \xi$, $y = \eta$. Operemos en coordenadas polares, ϱ, θ tomando como origen el centro del área cargada y sustituyendo el área elemental $dx\, dy$ de (129) por $\varrho d\varrho d\theta$, obtendremos, en la misma ecuación (129)

$$a_{mn} = \frac{4}{ab}\frac{P}{\pi c^2}\int_0^c\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{m\pi(\xi + \rho\cos\theta)}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi(\eta + \rho\operatorname{sen}\theta)}{b}\,\rho\, d\rho\, d\theta \tag{d}$$

La solución de la integral (d) da, a condición que el círculo $\varrho = c$ quede por entero en los límites de la placa[2]:

$$a_{mn} = \frac{8P}{abc\gamma_{mn}} J_1(\gamma_{mn}c)\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi\eta}{b} \tag{e}$$

donde $\gamma_{mn} = \pi\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ y $J_1(\gamma_{mn}c)$ es la función de Bessel, de primer orden con el argumento $\gamma_{mn}c$. La flecha buscada se obtiene sustituyendo (e) en (130).

Se ve que la solución de Navier sigue siendo sencilla en los casos relativamente complicados de distribución de carga. Por otra parte la serie doble de esta solución no es cómoda para los cálculos numéricos, especialmente en el caso en que intervienen derivadas de orden elevado de w.

[1] Véase, por ejemplo, S. Timoshenko y D. H. Young, *Theory of Structures*, 1945, pág. 250.
[2] Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, 1932, pág. 240.

Librodot

Veremos en el apartado siguiente otra forma de solución de flexión de placas rectangulares.

30. *Otra solución para placas rectangulares simplemente apoyadas y uniformemente cargadas*

Estudiando los problemas de flexión de placas rectangulares que tienen dos bordes opuestos simplemente apoyados, M. Lévy[1] sugirió tomar como solución una serie

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \tag{136}$$

donde Y_m es función sólo de y. Se supone que los lados $x = 0$ y $x = a$ (fig. 62) están simplemente apoyados. Por consiguiente, cada término de la serie (136) satisface las condiciones en los límites $w = 0$ y $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$, en

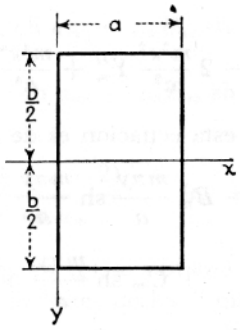


FIG. 62

estos dos lados. Queda por determinar Y_m de modo que satisfaga las condiciones en los lados $y = \pm b/2$ y también a la de la deformada

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \tag{a}$$

Aplicando este método a placas rectangulares uniformemente cargadas y simplemente apoyadas, se puede llegar a otra simplificación poniendo (*a*) bajo la forma[2]

$$w = w_1 + w_2 \tag{b}$$

y poniendo

$$w_1 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) \tag{c}$$

[1] Véase *Compt. rend.*, vol. 129, págs. 535-539, 1899. Esta solución fue aplicada en varios casos de flexión de placas rectangulares por E. Estanave, *Theses*, París, 1900; donde se encuentra la transformación de la serie doble de Navier en serie simple de Lévy.

[2] Esta forma de solución fue utilizada por A. Nádai, *Forschungsarb.*, núms. 170 y 171, Berlín, 1915; véase también su libro *Elastische Platten*, Berlín, 1925.

Librodot

esto es w_1 representa la flecha de una franja paralela al eje de las x, cargadas uniformemente. Esto satisface la ecuación (a) y también las condiciones en los bordes, para $x = 0$ y $x = a$.

La expresión w_2 debe satisfacer evidentemente a

$$\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} = 0 \qquad (137)$$

y debe tomarse de tal manera que la suma (b) satisfaga a todas las condiciones en los bordes de la placa. Tomando w_2, bajo la forma de la serie (136) en el cual, por simetría, $m = 1, 3, 5 \ldots$ y sustituyendo este valor en (137), se tiene

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} = 0$$

Esta ecuación puede cumplirse para todos los valores de x a condición de que Y_m satisfaga a

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}Y_m = 0 \qquad (d)$$

La integral general de esta ecuación es de la forma[1]

$$Y_m = \frac{qa^4}{D}\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (138)$$

Advirtiendo que la deformada de la placa es simétrica con relación al eje x (fig. 62), no quedan en (138) más que las funciones pares de q y las constantes de integración C_m y D_m son nulas.

La deformada (b) está entonces expresada por la ecuación

$$w = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{qa^4}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \qquad (e)$$

que satisface a (a) así como a las condiciones en los límites en los bordes $x = 0$ y $x = a$. Queda ahora calcular las constantes de integración A_m y B_m de tal manera que satisfagan las condiciones de contorno

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad (f)$$

[1] P. F. Papkovitch, *Priklad. Mat. Mekh.*, 1941, sugiere una forma con alguna pequeña diferencia para Y_m más conveniente en ciertas condiciones en los límites.

Librodot

en los lados $y = \pm b/2$. Se empieza por desarrollar (e) en serie trigonométrica, lo que da[1]

$$\frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

donde $m = 1, 3, 5, \ldots$ La deformada (e) toma entonces la forma

$$w = \frac{qa^4}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \qquad (g)$$

donde $m = 1, 3, 5, \ldots$ Sustituyendo en las condiciones de borde (f) y utilizando la notación

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m \qquad (h)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones que determinan las constantes A_m y B_m

$$\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m B_m \operatorname{sh}\alpha_m = 0$$

$$(A_m + 2B_m)\operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m B_m \operatorname{sh}\alpha_m = 0$$

de donde

$$A_m = -\frac{2(\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2)}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch}\alpha_m} \qquad B_m = \frac{2}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch}\alpha_m} \qquad (i)$$

Sustituyendo estos valores en (g) se obtiene la deformada de la placa que satisface a (a) y a las condiciones de los límites y toma la forma

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2}{2\operatorname{ch}\alpha_m}\operatorname{ch}\frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2\operatorname{ch}\alpha_m}\frac{2y}{b}\operatorname{sh}\frac{2\alpha_m y}{b}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (139)$$

con la cual se puede calcular la flecha en todo punto utilizando las tablas de funciones hiperbólicas[2].

La flecha máxima se sitúa en el centro de la placa $(x = a/2)$, $y = 0$, donde

$$w_{\text{máx}} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5}\left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2}{2\operatorname{ch}\alpha_m}\right) \qquad (j)$$

[1] Véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 3.ª ed., parte II, 1956, pág. 50.

[2] Véanse, por ejemplo, *Tables of Circular and Hyperbolic Sines and Cosines*, 1939, y *Table of Circular and Hyperbolic Tangents and Cotangents*, 1943, Columbia University Press, Nueva York; también British Association for the Advancement of Science, *Mathemathical Tables*, 3.ª ed., vol. 1, Cambridge University Press, 1951; finalmente, F. Lösch, *Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen*, Berlín, 1954.

Librodot

Despreciando el segundo término de paréntesis, esta serie representa la flecha en el centro de una franja uniformemente cargada. Por consiguiente se puede representar (*j*) en la forma

$$w_{\text{máx}} = \frac{5}{384}\frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5}\frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2}{2\operatorname{ch}\alpha_m} \qquad (140)$$

La serie de esta expresión converge muy rápidamente[1] y se obtiene una precisión suficiente tomando sólo el primer término.

Consideremos que una placa cuadrada se deduce de (*h*) que

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} \qquad \cdots$$

y (140) da

$$w_{\text{máx}} = \frac{5}{384}\frac{qa^4}{D} - \frac{4qa^4}{\pi^5 D}(0{,}68562 - 0{,}00025 + \cdots) = 0{,}00406\frac{qa^4}{D}$$

Se ve que el segundo término de la serie entre paréntesis es despreciable; no tomando más que el primer término la fórmula de la flecha se obtiene con tres cifras exactas.

Utilizando (140), se representa la flecha máxima de una placa por

$$w_{\text{máx}} = \alpha\frac{qa^4}{D} \qquad (141)$$

donde α es un factor numérico dependiente del cociente b/a de los lados de la placa. La tabla 8 (pág. 141) da los valores de α.

Los momentos flectores M_x y M_y se obtienen con la ayuda de (*e*). Sustituyendo la parte algebraica de esta expresión en (101) se encuentra que:

$$M'_x = \frac{qx(a-x)}{2} \qquad M'_y = \nu\frac{qx(a-x)}{2} \qquad (k)$$

La sustitución de la serie de (*e*) en las mismas ecuaciones da:

$$M''_x = (1-\nu)qa^2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\left[A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\left(\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - \frac{2\nu}{1-\nu}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (l)$$

$$M''_y = -(1-\nu)qa^2\pi^2\sum_{m=1}^{\infty} m^2\left[A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\left(\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{1-\nu}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

[1] Se supone que $b \geq a$, como en la figura 62.

Librodot

Los momentos flectores totales se obtienen sumando las expresiones (k) y (l). A lo largo del eje de las x la expresión de los momentos flectores toma la forma

$$(M_x)_{y=0} = \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} m^2[2\nu B_m - (1-\nu)A_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$(M_y)_{y=0} = \nu \frac{qx(a-x)}{2} - qa^2\pi^2 \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} m^2[2B_m + (1-\nu)A_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Estas dos series convergen rápidamente y los momentos se calculan asimismo y vienen dados por

$$(M_x)_{y=0} = \beta' qa^2 \qquad (M_y)_{y=0} = \beta_1' qa^2 \qquad (m)$$

La tabla 6 da los valores numéricos de los factores β' y β_1'.

TABLA 6

Factores β' y β_1' para momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga q uniformemente repartida

$\nu = 0{,}3$, $b \geq a$

b/a	$M_x = \beta' qa^2$, $y = 0$					$M_y = \beta_1' qa^2$, $y = 0$				
	$x = 0{,}1a$	$x = 0{,}2a$	$x = 0{,}3a$	$x = 0{,}4a$	$x = 0{,}5a$	$x = 0{,}1a$	$x = 0{,}2a$	$x = 0{,}3a$	$x = 0{,}4a$	$x = 0{,}5a$
1,0	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479
1,1	0,0234	0,0389	0,0486	0,0541	0,0554	0,0172	0,0311	0,0412	0,0475	0,0493
1,2	0,0256	0,0432	0,0545	0,0607	0,0627	0,0174	0,0315	0,0417	0,0480	0,0501
1,3	0,0277	0,0472	0,0599	0,0671	0,0694	0,0175	0,0316	0,0419	0,0482	0,0503
1,4	0,0297	0,0509	0,0649	0,0730	0,0755	0,0175	0,0315	0,0418	0,0481	0,0502
1,5	0,0314	0,0544	0,0695	0,0783	0,0812	0,0173	0,0312	0,0415	0,0478	0,0498
1,6	0,0330	0,0572	0,0736	0,0831	0,0862	0,0171	0,0309	0,0411	0,0472	0,0492
1,7	0,0344	0,0599	0,0773	0,0874	0,0908	0,0169	0,0306	0,0405	0,0466	0,0486
1,8	0,0357	0,0623	0,0806	0,0913	0,0948	0,0167	0,0301	0,0399	0,0459	0,0479
1,9	0,0368	0,0644	0,0835	0,0948	0,0985	0,0165	0,0297	0,0393	0,0451	0,0471
2,0	0,0378	0,0663	0,0861	0,0978	0,1017	0,0162	0,0292	0,0387	0,0444	0,0464
2,5	0,0413	0,0729	0,0952	0,1085	0,1129	0,0152	0,0272	0,0359	0,0412	0,0430
3,0	0,0431	0,0763	0,1000	0,1142	0,1189	0,0145	0,0258	0,0340	0,0390	0,0406
4,0	0,0445	0,0791	0,1038	0,1185	0,1235	0,0138	0,0246	0,0322	0,0369	0,0384
∞	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250	0,0135	0,0240	0,0315	0,0360	0,0375

Los momentos flectores que actúan a lo largo de la línea media $x = a/2$ se pueden calcular de la misma manera y se escriben

$$(M_x)_{x=a/2} = \beta'' qa^2 \qquad (M_y)_{x=a/2} = \beta_1'' qa^2 \qquad (n)$$

Librodot

La tabla 7 da β'' y β_1''.

Los valores máximos de estos momentos

$$(M_x)_{\text{máx}} = \beta q a^2 \qquad (M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 q a^2 \qquad (o)$$

TABLA 7

Factores β'' y β_1'' para momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga q uniformemente repartida

$\nu = 0{,}3,\ b \geq a$

b/a	$M_x = \beta'' q a^2,\ x = a/2$					$M_y = \beta_1'' q a^2,\ x = a/2$				
	$y = 0{,}4a$	$y = 0{,}3a$	$y = 0{,}2a$	$y = 0{,}1a$	$y = 0$	$y = 0{,}4a$	$y = 0{,}3a$	$y = 0{,}2a$	$y = 0{,}1a$	$y = 0$
1,0	0,0168	0,0303	0,0400	0,0459	0,0479	0,0209	0,0343	0,0424	0,0466	0,0479
1,1	0,0197	0,0353	0,0465	0,0532	0,0554	0,0225	0,0363	0,0442	0,0481	0,0493
1,2	0,0225	0,0401	0,0526	0,0600	0,0627	0,0239	0,0379	0,0454	0,0490	0,0501
1,3	0,0252	0,0447	0,0585	0,0667	0,0694	0,0252	0,0391	0,0462	0,0494	0,0503
1,4	0,0275	0,0491	0,0639	0,0727	0,0755	0,0263	0,0402	0,0468	0,0495	0,0502
1,5	0,0302	0,0532	0,0690	0,0781	0,0812	0,0275	0,0410	0,0470	0,0493	0,0498
1,6	0,0324	0,0571	0,0737	0,0832	0,0862	0,0288	0,0417	0,0471	0,0489	0,0492
1,7	0,0348	0,0607	0,0780	0,0877	0,0908	0,0295	0,0423	0,0470	0,0484	0,0486
1,8	0,0371	0,0641	0,0819	0,0917	0,0948	0,0304	0,0428	0,0469	0,0478	0,0479
1,9	0,0392	0,0673	0,0854	0,0953	0,0985	0,0314	0,0433	0,0467	0,0472	0,0471
2,0	0,0413	0,0703	0,0887	0,0986	0,1017	0,0322	0,0436	0,0464	0,0465	0,0464
2,5	0,0505	0,0828	0,1012	0,1102	0,1129	0,0360	0,0446	0,0447	0,0435	0,0430
3,0	0,0586	0,0923	0,1092	0,1168	0,1189	0,0389	0,0447	0,0431	0,0413	0,0406
4,0	0,0723	0,1054	0,1180	0,1224	0,1235	0,0426	0,0436	0,0406	0,0389	0,0384
∞	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,1250	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375	0,0375

se producen en el centro de la placa ($x = a/2$, $y = 0$) y los factores correspondientes β y β_1 figuran en la tabla 8. La distribución de los momentos en el caso particular de una placa cuadrada está indicada en la figura 63.

Se ve en la tabla 8 que, cuando la relación b/a aumenta los momentos y la flecha máxima de la placa tienden rápidamente hacia los valores calculados para una franja uniformemente cargada, o para una placa flexada según una superficie cilíndrica, que corresponden a $b/a = \infty$. Para $b/a = 3$ la diferencia entre la flecha de la franja y la placa es aproximadamente el 6,5 %. Para $b/a = 5$, esta diferencia es inferior al 0,5 %. Las diferencias entre los momentos flectores máximos para las mismas relaciones de b/a son respectivamente, 5 y 1/3 %.

Se concluye de estas comparaciones, que para $b/a > 3$ los cálculos para una placa pueden sustituirse por las de franja, sin error importante.

La expresión (e) puede usarse también para el cálculo de los esfuerzos cortantes y las reacciones en el contorno. Calculando la derivada segunda de esta expresión, encontramos

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{qx(a-x)}{2D} + \frac{2\pi^2 q a^2}{D} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Librodot

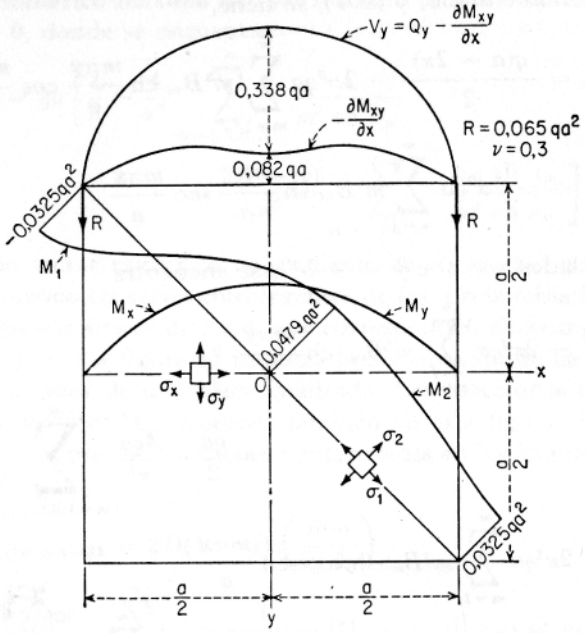


FIG. 63

TABLA 8

Factores α, β, γ, δ, n para placas rectangulares simplemente apoyadas uniformemente cargadas

$\nu = 0{,}3$

b/a	$w_{máx} = \alpha \frac{qa^4}{D}$ α	$(M_x)_{máx} = \beta qa^2$ β	$(M_y)_{máx} = \beta_1 qa^2$ β_1	$(Q_x)_{máx} = \gamma qa$ γ	$(Q_y)_{máx} = \gamma_1 qa$ γ_1	$(V_x)_{máx} = \delta qa$ δ	$(V_y)_{máx} = \delta_1 qa$ δ_1	$R = nqa^2$ n
1,0	0,00406	0,0479	0,0479	0,338	0,338	0,420	0,420	0,065
1,1	0,00485	0,0554	0,0493	0,360	0,347	0,440	0,440	0,070
1,2	0,00564	0,0627	0,0501	0,380	0,353	0,455	0,453	0,074
1,3	0,00638	0,0694	0,0503	0,397	0,357	0,468	0,464	0,079
1,4	0,00705	0,0755	0,0502	0,411	0,361	0,478	0,471	0,083
1,5	0,00772	0,0812	0,0498	0,424	0,363	0,486	0,480	0,085
1,6	0,00830	0,0862	0,0492	0,435	0,365	0,491	0,485	0,086
1,7	0,00883	0,0908	0,0486	0,444	0,367	0,496	0,488	0,088
1,8	0,00931	0,0948	0,0479	0,452	0,368	0,499	0,491	0,090
1,9	0,00974	0,0985	0,0471	0,459	0,369	0,502	0,494	0,091
2,0	0,01013	0,1017	0,0464	0,465	0,370	0,503	0,496	0,092
3,0	0,01223	0,1189	0,0406	0,493	0,372	0,505	0,498	0,093
4,0	0,01282	0,1235	0,0384	0,498	0,372	0,502	0,500	0,094
5,0	0,01297	0,1246	0,0375	0,500	0,372	0,501	0,500	0,095
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,500	0,372	0,500	0,500	0,095

Librodot

Sustituyendo en (106) y (107), se tiene,

$$Q_x = \frac{q(a-2x)}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q_y = -2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Para los lados $x = 0$ e $y = -b/2$, se encuentra

$$(Q_x)_{x=0} = \frac{qa}{2} - 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}$$

$$= \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\dfrac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch}\alpha_m}$$

$$(Q_y)_{y=-b/2} = 2\pi^3 qa \sum_{m=1}^{\infty} m^3 B_m \operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

$$= \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{th}\alpha_m}{m^2}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

El valor numérico máximo de estas fuerzas se obtiene en el centro de los lados, donde

$$(Q_x)_{x=0,y=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}\alpha_m} = \gamma qa$$

$$(Q_y)_{x=a/2,y=-b/2} = \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \operatorname{th}\alpha_m = \gamma_1 qa \qquad (p)$$

La tabla 8 da γ y γ_1.

Las reacciones a lo largo del lado $x = 0$ son

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0} = \frac{qa}{2} - \frac{4qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\dfrac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch}\alpha_m}$$

$$+ \frac{2(1-\nu)qa}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_m}$$

$$\left(\alpha_m \operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\operatorname{ch}\alpha_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)$$

Librodot

El valor numérico máximo de esta reacción se sitúa en el punto medio del lado $y = 0$, donde se encuentra

$$(V_x)_{x=0,y=0} = qa\left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} + \frac{2(1-\nu)}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}\right] = \delta qa \qquad (q)$$

donde δ es un factor numérico dependiente de ν y de b/a que se obtiene asimismo, sumando las series convergentes de (q). En la tabla 8, se encuentran los valores numéricos de δ y δ_1 que corresponden al centro de los lados paralelos del eje x. La figura 63 muestra la distribución de las reacciones a lo largo de los lados de una placa cuadrada. Las reacciones debidas a los momentos de torsión M_{xy} aparecen también en esta figura. Estas últimas están equilibradas por las reacciones concentradas en los ángulos de la placa cuyo valor es

$$R = 2(M_{xy})_{x=a,y=b/2} = 2D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)_{x=a,y=b/2}$$

$$= \frac{4(1-\nu)qa^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m}[(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)\operatorname{sh} \alpha_m - \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m] = nqa^2 \qquad (r)$$

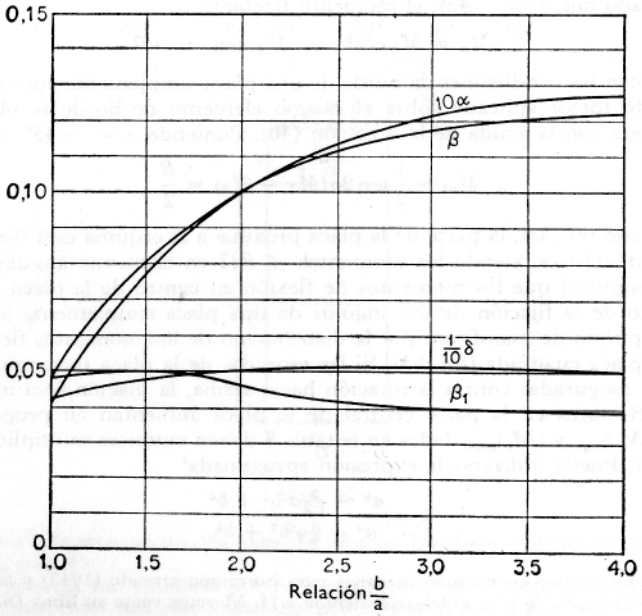


FIG. 64

Librodot

Estas fuerzas están dirigidas hacia abajo e impiden que se levanten las esquinas de la placa durante la flexión.

La última columna de la tabla 8 da los valores de n. Las curvas de la figura 64 representan los valores α, β, β_1, δ en función de b/a.

Puesto que estamos en presencia de las fuerzas R que actúan hacia abajo y son importantes, se deberá prever un anclaje de los ángulos de la placa, si no están sólidamente fijados a las vigas de apoyo.

Para determinar los momentos que levantan los ángulos, consideremos un elemento abc de la placa tomado de un ángulo (v. fig. 65) e introduzcamos, con el mismo objeto, nuevas coordenadas 1, 2 formando un ángulo de 45° con x e y. Se puede

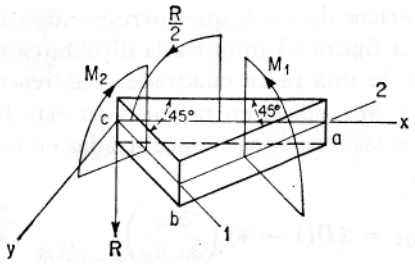


FIG. 65

comprobar ahora que los momentos flectores que actúan sobre ab y cb son $M_1 = -R/2$ y $M_2 = +R/2$ y que los momentos torsores correspondientes son nulos. En efecto, utilizando la ecuación (39) se obtiene para el lado ac que está, para el elemento de borde, dado por $\alpha = -45°$, el momento flector

$$M_n = M_1 \cos^2 \alpha + M_2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0$$

compatible con las condiciones de borde de una placa simplemente apoyada. El valor del momento torsor aplicado sobre el mismo elemento de borde se obtiene de la misma manera con la ayuda de la ecuación (40). Poniendo $\alpha = -45°$, se encuentra

$$M_{nt} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (M_1 - M_2) = \frac{R}{2}$$

compatible con (r). Así, la parte de la placa próxima a la esquina está flexada en una superficie anticlástica, siendo los momentos $\pm R/2$ en el mismo ángulo del mismo orden de magnitud que los momentos de flexión en centro de la placa (v. tabla 8).

El efecto de la fijación de los ángulos de una placa simplemente apoyada está claramente puesto de manifiesto por la distribución de los momentos flectores M_1 y M_2 de una placa cuadrada (fig. 63). Si las esquinas de la placa rectangular no están eficazmente aseguradas contra la rotación hacia arriba, la fijación será ineficaz y los momentos flectores en la parte central de la placa aumentan en proporción. Los valores de $(M_x)_{\text{máx}}$ y $(M_y)_{\text{máx}}$ dados en la tabla 8 deben entonces multiplicarse por un factor $k > 1$. Puede utilizarse la expresión aproximada[1]

$$k = \frac{a^4 - \frac{5}{12}a^2b^2 + b^4}{a^4 - \frac{5}{6}a^2b^2 + b^4}$$

[1] Recomendada por las normas alemanas para hormigón armado (1943) y fundada sobre una teoría simplificada de placas delgadas debida a H. Marcus; véase su libro *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, 2.ª ed., Berlín, 1925.

Librodot

Debe notarse que en el caso de una placa poligonal de bordes simplemente apoyados no hay fuerzas de reacción en los ángulos a condición de que no sean ángulos rectos[1].

Aun en las placas rectangulares de todos modos no hay reacciones de esquina si se tiene en cuenta la deformación debida al esfuerzo cortante. En el caso de reacciones extremadamente concentradas esta deformación debida al esfuerzo cortante evidentemente, ya no es despreciable y la teoría habitual de las placas delgadas que la desprecia debe ser sustituida por una teoría más exacta. Esta última que se estudiará en el apartado 39, conduce realmente a una distribución de las reacciones que no incluyen fuerzas concentradas en las esquinas de la placa (v. fig. 81).

31. *Placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una presión hidrostática*

Supongamos una placa rectangular simplemente apoyada cargada como indica la figura 66; procediendo como en el caso de una carga uniformemente repartida, se escribe la flecha de la placa bajo la forma[2]

$$w = w_1 + w_2 \tag{a}$$

en la que

$$w_1 = \frac{q_0}{360D}\left(\frac{3x^5}{a} - 10ax^3 + 7a^3x\right) = \frac{2q_0a^4}{D\pi^5}\sum_{m=1,2,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{b}$$

representa la flecha de una franja bajo una carga triangular. Esta expresión satisface la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} = \frac{q_0 x}{aD} \tag{c}$$

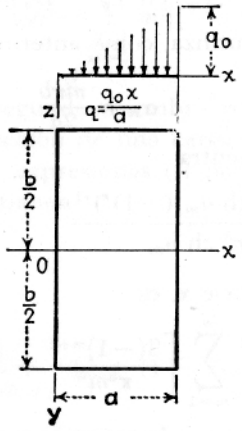


FIG. 66

[1] Para una demostración sencilla, véase H. Marcus, *Die Theorie Elastischer Gewebe*, 2.ª ed., Berlín, 1932, pág. 46.

[2] Este problema fue estudiado por E. Estanae en la obra citada. Las tablas numéricas de flechas y momentos han sido calculadas por B. G. Galerkin, *Bull. Polytech. Inst.*, San Petersburgo, vols. 26 y 27, 1918.

y las condiciones en los límites

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = 0 \quad \text{y} \quad x = a$$

La parte w_2, viene dada bajo la forma de una serie

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \tag{d}$$

donde las funciones Y_m tienen la misma forma del apartado anterior y $m = 1, 2, 3 \ldots$

Sustituyendo (b) y (d) en (a), se tiene

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \tag{e}$$

en la que las constantes A_m y B_m deben determinarse por las condiciones

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } y = \pm \frac{b}{2}$$

de estas condiciones se deducen

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

$$(2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

En estas ecuaciones se utiliza, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Resolviéndolas, se encuentra

$$A_m = -\frac{(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \qquad B_m = \frac{(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \tag{f}$$

La flecha a lo largo del eje x, es

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^5 m^5} + A_m \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Para una placa cuadrada $a = b$ y se encuentra

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \left(0{,}002055 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} - 0{,}000177 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + 0{,}000025 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} - \cdots \right) \tag{g}$$

Librodot

La flecha en el centro de la placa es

$$(w)_{x=a/2,y=0} = 0{,}00203\,\frac{q_0 a^4}{D} \qquad (h)$$

que como debe ser, es la mitad de la flecha de una placa uniformemente cargada (v. pág. 138). Igualando a cero la derivada de la expresión (g), se encuentra que la flecha máxima está en el punto $x = 0{,}557\,a$. Esta flecha máxima que es $0{,}00206\,q_0 a^4/D$, difiere muy poco de la flecha en el centro dada por (h). El punto de la flecha máxima tiende hacia el centro de la placa cuando b/a aumenta. Para $b/a = \infty$, caso de una franja [v. (b)], la flecha máxima se encuentra en el punto $x = 0{,}5193\,a$. Cuando $b/a < 1$, el punto de la flecha máxima se aleja del centro de la placa al mismo tiempo que b/a disminuye. La tabla 9 da las flechas en varios puntos del eje x (fig. 66). Se ve que, cuando b/a aumenta, las flechas tienden hacia los valores calculados para una franja. Para $b/a = 4$, las diferencias de estos valores son del orden de 1,5 %. Se puede siempre calcular la flecha de una placa para la que $b/a > 4$, con una exactitud suficiente, con ayuda de la fórmula (b), de la flecha de una franja sometida a una carga triangular. Los momentos flectores M_x y M_y se encuentran sustituyendo la expresión (e) de las flechas en las ecuaciones (101). A lo largo del eje $x(y = 0)$, la expresión de M_x se hace

$$(M_x)_{y=0} = q_0 a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + q_0 a^2 \pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2[(1-\nu)A_m - 2\nu B_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (i)$$

La primera suma del segundo miembro representa el momento flector de una franja bajo la acción de una carga triangular y es igual a $(q_0)(ax - x^3/a)$. Utilizando las expresiones (f) para las constantes A_m y B_m en la segunda suma, se obtienen

$$(M_x)_{y=0} = \frac{q_0(a^2 x - x^3)}{6a} - \frac{q_0 a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} [2 + (1-\nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (j)$$

La serie así obtenida converge rápidamente y M_x puede tener un valor suficientemente aproximado tomando sólo los primeros términos de la serie. De esta forma el momento flector en todo punto del eje x puede ser representado por la ecuación

$$(M_x)_{y=0} = \beta q_0 a^2 \qquad (k)$$

Librodot

donde β es un factor numérico dependiente de la abscisa x del punto. De la misma manera se obtiene

$$(M_y)_{y=0} = \beta_1 q_0 a^2 \qquad (l)$$

TABLA 9

Factores α para el cálculo de flechas de una placa rectangular simplemente apoyada bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$b > a$

$w = \alpha q_0 a^4/D$, $y = 0$

b/a	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
1,0	0,00131	0,00203	0,00201	0,00162
1,1	0,00158	0,00243	0,00242	0,00192
1,2	0,00186	0,00282	0,00279	0,00221
1,3	0,00212	0,00319	0,00315	0,00248
1,4	0,00235	0,00353	0,00348	0,00273
1,5	0,00257	0,00386	0,00379	0,00296
1,6	0,00277	0,00415	0,00407	0,00317
1,7	0,00296	0,00441	0,00432	0,00335
1,8	0,00313	0,00465	0,00455	0,00353
1,9	0,00328	0,00487	0,00475	0,00368
2,0	0,00342	0,00506	0,00494	0,00382
3,0	0,00416	0,00612	0,00592	0,00456
4,0	0,00437	0,00641	0,00622	0,00477
5,0	0,00441	0,00648	0,00629	0,00483
∞	0,00443	0,00651	0,00632	0,00484

Los valores numéricos de los factores β y β_1 de las fórmulas (k) y (l) están dados en la tabla 10. Se ve que para $b \geq 4a$ los momentos están muy próximos a los de la franja sometida a una carga triangular.

Se utilizan las ecuaciones (106) y (107) para calcular los esfuerzos cortantes. De la primera de estas ecuaciones, utilizando (j) para los puntos sobre el eje x se obtiene

$$(Q_x)_{y=0} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}$$

$$= \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

Las expresiones generales de los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y son

$$Q_x = \frac{q_0(a^2 - 3x^2)}{6a} - \frac{2q_0 a}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\operatorname{ch}\dfrac{m\pi y}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m}\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (m)$$

Librodot

$$Q_y = -\frac{2q_0a}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\,\operatorname{sh}\dfrac{m\pi y}{a}}{m^2\,\operatorname{ch}\,\alpha_m}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (n)$$

TABLA 10

Factores β y β_1 para el cálculo de momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0x/a$

$\nu = 0{,}3,\ b > a$

b/a	$M_x = \beta a^2q_0,\ y = 0$				$M_y = \beta_1 a^2q_0,\ y = 0$			
	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0,0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0150	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
∞	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Los valores de las reacciones verticales V_x y V_y a lo largo del contorno se obtiene combinando los esfuerzos cortantes con las derivadas de los momentos torsores. A lo largo de los lados $x = 0$ y $x = a$ estas reacciones pueden ponerse en la forma

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{x=0,x=a} = \pm\delta q_0 a \qquad (o)$$

y a lo largo de los lados $y = \pm b/2$ en la forma

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{y=\pm b/2} = \mp\delta_1 q_0 b \qquad (p)$$

donde δ y δ_1, son factores numéricos dependientes de la relación b/a y de las coordenadas de los puntos tomados sobre el contorno. La tabla 11 da los valores de estos factores.

El valor de las fuerzas concentradas que deben existir para impedir que los ángulos de la placa se eleven durante la flexión, se obtienen a partir de los valores de los momentos torsores M_{xy} en las esquinas. Puesto que la

Librodot

TABLA 11

Factores δ y δ_1 para el cálculo de las reacciones en placas rectangulares siplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$\nu = 0{,}3,\ b > a$

b/a	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	$x = 0$		$x = a$		$y = \pm b/2$			
	$y = 0$	$y = 0{,}25b$	$y = 0$	$y = 0{,}25b$	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239
1,1	0,136	0,107	0,304	0,267	0,110	0,199	0,221	0,224
1,2	0,144	0,114	0,312	0,276	0,105	0,189	0,208	0,209
1,3	0,150	0,121	0,318	0,284	0,100	0,178	0,196	0,196
1,4	0,155	0,126	0,323	0,292	0,095	0,169	0,185	0,184
1,5	0,159	0,132	0,327	0,297	0,090	0,160	0,175	0,174
1,6	0,162	0,136	0,330	0,302	0,086	0,151	0,166	0,164
1,7	0,164	0,140	0,332	0,306	0,082	0,144	0,157	0,155
1,8	0,166	0,143	0,333	0,310	0,078	0,136	0,149	0,147
1,9	0,167	0,146	0,334	0,313	0,074	0,130	0,142	0,140
2,0	0,168	0,149	0,335	0,316	0,071	0,124	0,135	0,134
3,0	0,169	0,163	0,336	0,331	0,048	0,083	0,091	0,089
4,0	0,168	0,167	0,334	0,334	0,036	0,063	0,068	0,067
5,0	0,167	0,167	0,334	0,335	0,029	0,050	0,055	0,054
∞	0,167	0,167	0,333	0,333	—	—	—	—

carga no es simétrica, las reacciones R_1 en $x = a$ e $y = \pm b/2$. Son diferentes de las reacciones R_2 en $x = a$ e $y = \pm b/2$. Estas reacciones pueden ponerse en la forma

$$R_1 = n_1 q_0 ab \qquad R_2 = n_2 q_0 ab \qquad (q)$$

La tabla 12 da los valores de n_1 y n_2.

Puesto que una carga uniforme q_0 se obtiene superponiendo dos cargas triangulares $q = q_0 x/a$ y $q_0(a - x)/a$, se llega a la conclusión de que para los valores correspondientes de b/a, la suma $n_1 + n_2$, de los factores de la

TABLA 12

Factores n_1 y n_2 de las ecuaciones (q) de las reacciones R_1 y R_2 concentradas en las esquinas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$\nu = 0{,}3,\ b > a$

b/a	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	3,0	4,0	5,0
n_1	0,026	0,026	0,026	0,026	0,025	0,024	0,023	0,022	0,021	0,021	0,020	0,014	0,010	0,008
n_2	0,039	0,038	0,037	0,036	0,035	0,033	0,032	0,030	0,029	0,028	0,026	0,018	0,014	0,011

tabla 12, multiplicados por b/a, será igual al valor correspondiente de n (última columna de la tabla 8).

Librodot

Si las dimensiones relativas de la placa son tales que a, en la figura 66, es mayor que b, se obtendrá entonces una serie más rápidamente convergente representado w_1 y w_2 por las expresiones siguientes

$$w_1 = \frac{q_0 x}{a}\frac{1}{384D}(16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4) \qquad (r)$$

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} X_{2m-1} \cos\frac{(2m-1)\pi y}{b} \qquad (s)$$

La primera de estas expresiones es la flecha de una franja estrecha paralela al eje y, apoyada en $y = +b/2$ bajo una carga uniformemente repartida de intensidad $q_0 x/a$. Esta expresión satisface a la ecuación en derivadas parciales (c) y también a las condiciones en los límites $w = 0$ y $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ en $y = \pm b/2$. La expresión (s) representa una serie infinita

TABLA 13

Factores α para el cálculo de flechas de una placa rectangular simplemente apoyada bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$b < a$

$w = \alpha q_0 b^4/D$, $y = 0$

a/b	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
∞	0,00325	0,00651	0,00781	0,00976
5,0	0,00325	0,00648	0,00778	0,00965
4,0	0,00325	0,00641	0,00751	0,00832
3,0	0,00321	0,00630	0,00692	0,00707
2,0	0,00288	0,00506	0,00542	0,00492
1,9	0,00281	0,00487	0,00518	0,00465
1,8	0,00270	0,00465	0,00491	0,00434
1,7	0,00261	0,00441	0,00463	0,00404
1,6	0,00249	0,00415	0,00432	0,00372
1,5	0,00234	0,00386	0,00399	0,00339
1,4	0,00218	0,00353	0,00363	0,00304
1,3	0,00199	0,00319	0,00325	0,00269
1,2	0,00179	0,00282	0,00286	0,00234
1,1	0,00153	0,00243	0,00245	0,00199
1,0	0,00131	0,00202	0,00201	0,00162

de la cual cada término satisface también las condiciones en los bordes $y = \pm b/2$. Las funciones X_{2m-1} de x se toman de modo que cada una de ellas satisfaga la ecuación homogénea (137) del apartado 30 y así la expresión (a) satisface las condiciones en los límites para los bordes $x = 0$ y $x = a$.

Puesto que el método de determinación de las funciones X_{2m-1} es similar al que se ha utilizado para determinar Y_m, nos limitaremos a dar los valores numéricos finales representados en las tablas 13, 14, 15 y 16. La

Librodot

notación de estas tablas es la misma que la de las tablas precedentes correspondientes a carga de presión hidrostática.

32. *Placa rectangular simplemente apoyada sometida a una carga con forma de prisma triangular*

Supongamos que la intensidad de la carga está representada por un triángulo isósceles [v. fig. 67 *a*)]. Se representa de nuevo la superficie flexada por

$$w = w_1 + w_2 \qquad (a)$$

donde w_1 representa la flecha de una franja paralela al eje de las x, simplemente apoyada y w_2 tiene la misma forma del apartado anterior. Para representar la flecha w_1, en la forma de una serie trigonométrica, se observa

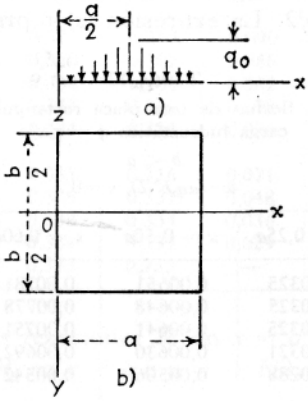


FIG. 67

que la flecha producida por una fuerza concentrada P, aplicada a una distancia ξ del extremo izquierdo de la franja es[1]:

$$\frac{2Pa^3}{D\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

Sustituyendo P por $qd\xi$ y utilizando $q = 2q_0\xi/a$ para $\xi < a/2$ y $q = 2q_0(a - \xi)/a$ para $\xi > a/2$, se obtiene la flecha de la franja debida a una carga elemental. La flecha debida a la carga total sobre la franja, se obtiene por integración de la forma siguiente:

$$w_1 = \frac{4q_0a^2}{D\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left[\int_0^{a/2}\xi\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\,d\xi + \int_{a/2}^{a}(a-\xi)\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\,d\xi\right]$$

$$= \frac{8q_0a^4}{D\pi^6}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^6}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (c)$$

[1] Véase Timoshenko, *Strength of Materials*, parte II, 3.ª ed., pág. 49, 1956.

Librodot

TABLA 14

Factores β y β_1 para el cálculo de momentos flectores de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$\nu = 0{,}3,\ b < a$

a/b	$M_x = \beta b^2 q_0,\ y = 0$				$M_y = \beta_1 b^2 q_0,\ y = 0$			
	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
∞	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0,0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0,0345	0,0278	0,0492	0,0533	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0337	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

TABLA 15

Factores δ y δ_1 para el cálculo de las reacciones en placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$\nu = 0{,}3,\ b < a$

a/b	Reacciones $\delta q_0 a$				Reacciones $\delta_1 q_0 b$			
	$x = 0$		$x = a$		$y = \pm\, b/2$			
	$y = 0$	$y = b/4$	$y = 0$	$y = b/4$	$x = 0{,}25a$	$x = 0{,}50a$	$x = 0{,}60a$	$x = 0{,}75a$
∞	.....	.....	.....	.....	0,125	0,250	0,300	0,375
5,0	0,008	0,006	0,092	0,076	0,125	0,250	0,301	0,379
4,0	0,013	0,010	0,112	0,093	0,125	0,251	0,301	0,377
3,0	0,023	0,018	0,143	0,119	0,125	0,252	0,304	0,368
2,0	0,050	0,038	0,197	0,166	0,127	0,251	0,296	0,337
1,9	0,055	0,041	0,205	0,172	0,127	0,251	0,294	0,331
1,8	0,060	0,045	0,213	0,179	0,128	0,249	0,291	0,325
1,7	0,066	0,050	0,221	0,187	0,127	0,248	0,288	0,318
1,6	0,073	0,055	0,230	0,195	0,127	0,245	0,284	0,311
1,5	0,080	0,060	0,240	0,204	0,127	0,243	0,279	0,302
1,4	0,088	0,067	0,250	0,213	0,126	0,239	0,273	0,292
1,3	0,097	0,074	0,260	0,223	0,124	0,234	0,266	0,281
1,2	0,106	0,081	0,271	0,233	0,122	0,227	0,257	0,269
1,1	0,116	0,090	0,282	0,244	0,120	0,220	0,247	0,255
1,0	0,126	0,098	0,294	0,256	0,115	0,210	0,234	0,239

Librodot

Sustituyendo esta ecuación en (*a*) y utilizando (*d*) del apartado precedente, se obtiene

$$w = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

Esta expresión satisface a la ecuación (203) y también a las condiciones en los bordes para $x = 0$ y $x = a$. Las constantes A_m y B_m se obtienen de las condiciones, a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$, que son las mismas que en el apartado precedente, y se encuentra

$$\begin{gathered} \frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0 \\ (2B_m + A_m) \operatorname{ch} \alpha_m + B_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0 \end{gathered} \qquad (e)$$

donde usando, como antes, la notación

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Resolviendo las ecuaciones (*e*), se obtiene

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{4(2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m} \\ B_m &= \frac{4(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6 \operatorname{ch} \alpha_m} \end{aligned} \qquad (f)$$

TABLA 16

Factores n_1 y n_2 de las ecuaciones (*q*) de las reacciones R_1 y $\bar{R}_2$ concentradas en las esquinas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga hidrostática $q = q_0 x/a$

$\nu = 0{,}3$, $b < a$

a/b	5	4	3	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
n_1	0,002	0,004	0,006	0,013	0,014	0,016	0,017	0,018	0,020	0,021	0,023	0,024	0,025	0,026
n_2	0,017	0,020	0,025	0,033	0,034	0,035	0,036	0,037	0,037	0,038	0,039	0,039	0,039	0,039

Para obtener la flecha de la placa a lo largo del eje x, se hace $y = 0$ en (*d*). Entonces

$$(w)_{y=0} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\frac{8(-1)^{(m-1)/2}}{\pi^6 m^6} + A_m \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La flecha máxima se sitúa en el centro de la placa, donde

$$w_{\text{máx}} = \frac{q_0 a^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi^6 m^6} + A_m (-1)^{(m-1)/2} \right]$$

Librodot

que se puede representar de la forma

$$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{q_0 a^4}{D}$$

donde α es un factor numérico dependiente del valor de b/a. Varios valores[1] de este factor figuran en la tabla 17.

Usando la expresión (d) y operando como en el apartado 31 se obtienen las expresiones de los momentos flectores M_x y M_y. Los valores máximos de estos momentos están, evidentemente, en este caso, en el centro de la placa y pueden ponerse en la forma

$$(M_x)_{\text{máx}} = \beta q_0 a^2 \qquad (M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 q_0 a^2$$

Los valores de los factores numéricos β y β_1, figuran en la tabla 17.

TABLA 17

Factores α, β, γ, δ, n para placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga de forma de prisma triangular

$\nu = 0{,}3$, $b > a$

b/a	$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{q_0 b^4}{D}$	$(M_x)_{\text{máx}} = \beta q_0 a^2$	$(M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 q_0 a^2$	$(Q_x)_{\text{máx}} = \gamma q_0 a$	$(Q_y)_{\text{máx}} = \gamma_1 q_0 b$	$(V_x)_{\text{máx}} = \delta q_0 a$	$(V_y)_{\text{máx}} = \delta_1 q_0 b$	$R = n q_0 ab$
	α	β	β_1	γ	γ_1	δ	δ_1	n
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038
1,1	0,00314	0,0390	0,0326	0,212	0,297	0,161	0,232	0,038
1,2	0,00364	0,0436	0,0330	0,222	0,280	0,173	0,216	0,037
1,3	0,00411	0,0479	0,0332	0,230	0,265	0,184	0,202	0,036
1,4	0,00455	0,0518	0,0331	0,236	0,250	0,193	0,189	0,035
1,5	0,00496	0,0554	0,0329	0,241	0,236	0,202	0,178	0,034
1,6	0,00533	0,0586	0,0325	0,246	0,224	0,208	0,168	0,033
1,7	0,00567	0,0615	0,0321	0,247	0,212	0,214	0,158	0,031
1.8	0,00597	0,0641	0,0316	0,249	0,201	0,220	0,150	0,030
1,9	0,00625	0,0664	0,0311	0,251	0,191	0,224	0,142	0,029
2,0	0,00649	0,0685	0,0306	0,252	0,183	0,228	0,135	0,028
3,0	0,00783	0,0794	0,0270	0,253	0,122	0,245	0,090	0,019
∞	0,00833	0,0833	0,0250	0,250	.....	0,250	—	—

Esta tabla da γ, γ_1, δ, δ_1 y n para calcular: 1) los esfuerzos cortantes $(Q_x)_{\text{máx}} = \gamma q_0 a$, $(Q_y)_{\text{máx}} = \gamma_1 q_0 b$ en el centro de los lados $x = 0$ e $y = b/2$ de la placa; 2) las reacciones

$$V_x = \left(Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)_{\text{máx}} = \delta q_0 a$$

$$V_y = \left(Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)_{\text{máx}} = \delta_1 q_0 b$$

[1] Estos cuadros están extractados de la Memoria de Galerkin antes citada.

Librodot

en los mismos puntos y 3) las reacciones concentradas $R = nq_0ab$ en las esquinas de la placa que impiden que éstas se levanten ya que actúan hacia abajo. Todos estos valores están dados para $b > a$. Cuando $b < a$, se obtiene una convergencia más rápida tomando la posición w_1 de la flecha

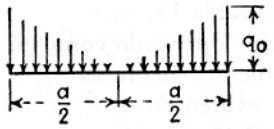


FIG. 68

de la placa, bajo la forma de la flecha de una franja paralela al eje y. Se han omitido los cálculos y no se da más que los resultados numéricos en la tabla 18.

Se obtiene la carga representada en la figura 68, combinando la carga uniforme de intensidad q_0. Se puede obtener, en este último caso los resultados concernientes a las flechas y a las tensiones combinando los valores de la tabla 8 y los de las tablas 17 y 18.

TABLA 18

Factores α, β, γ, δ, n para placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga de forma de prisma triangular

$\nu = 0{,}3$, $b < a$

a/b	$w_{máx} = \alpha \frac{q_0 b^4}{D}$ α	$(M_x)_{máx} = \beta q_0 b^2$ β	$(M_y)_{máx} = \beta_1 q_0 b^2$ β_1	$(Q_x)_{máx} = \gamma q_0 a$ γ	$(Q_y)_{máx} = \gamma_1 q_0 b$ γ_1	$(V_x)_{máx} = \delta q_0 a$ δ	$(V_y)_{máx} = \delta_1 q_0 b$ δ_1	$R = nq_0ab$ n
∞	0,01302	0,0375	0,1250	.....	0,500	.....	0,500	
3,0	0,00868	0,0387	0,0922	0,045	0,442	0,027	0,410	0,010
2,0	0,00686	0,0392	0,0707	0,091	0,412	0,057	0,365	0,023
1,9	0,00656	0,0392	0,0681	0,098	0,407	0,062	0,358	0,024
1,8	0,00624	0,0391	0,0651	0,106	0,402	0,098	0,350	0,026
1,7	0,00588	0,0390	0,0609	0,115	0,396	0,074	0,342	0,028
1,6	0,00549	0,0388	0,0585	0,124	0,389	0,081	0,332	0,029
1,5	0,00508	0,0386	0,0548	0,135	0,381	0,090	0,322	0,031
1,4	0,00464	0,0382	0,0508	0,146	0,371	0,099	0,311	0,033
1,3	0,00418	0,0376	0,0464	0,158	0,360	0,109	0,298	0,035
1,2	0,00367	0,0368	0,0418	0,171	0,347	0,120	0,284	0,036
1,1	0,00316	0,0356	0,0369	0,185	0,332	0,133	0,268	0,037
1,0	0,00263	0,0340	0,0317	0,199	0,315	0,147	0,250	0,038

33. *Placa rectangular simplemente apoyada y parcialmente cargada*

Consideraremos un caso de flexión simétrica producido por una carga q uniformemente repartida sobre el rectángulo rayado (fig. 69) de lados u y v.

Librodot

Se desarrolla en serie, la carga

$$\frac{2}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\int_{\frac{1}{2}(a-u)}^{\frac{1}{2}(a+u)} q\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\,d\xi$$

$$=\frac{4q}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (a)$$

esta serie representa la carga para la zona *prst* de la placa.

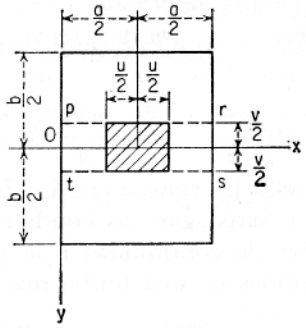


FIG. 69

La flecha, correspondiente a esta zona de la placa, se obtiene mediante la ecuación (103), que toma la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{4q}{\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

tomemos, de nuevo, la flecha de la forma

$$w = w_1 + w_2 \qquad (c)$$

donde w_1 es una solución particular de (b), independiente de la variable y que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}=\frac{4q}{\pi D}\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Integrando ésta con respecto a x, se obtiene

$$w_1=\frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

Entonces w_2 debe ser una solución de la ecuación (137) (pág. 136). Eligiendo la forma (136) para esta solución y tomando en (138) las funcio-

Librodot

nes pares de y para Y_m, por razón de simetría de la superficie flexada con respecto al eje x, se obtiene por (c)

$$w = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(a_m + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

en la que, esta vez es

$$a_m = \frac{4qa^4}{\pi^5 m^5 D} (-1)^{(m-1)/2} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \qquad (f)$$

La ecuación (e) representa las flechas de la zona *prst* de la placa.

Consideremos ahora la zona no cargada de la placa, por debajo de la línea *ts* se puede tomar para la deformada

$$w' = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(A'_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C'_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D'_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

Es necesario ahora elegir las constantes A'_m, B_m ... D'_m en las series (e) y (g) de tal manera que satisfagan las condiciones en los bordes para $y = b/2$ y las condiciones de continuidad a lo largo de la recta *ts*. Para representar estas condiciones en una forma más simple introducimos las notaciones

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \qquad \gamma_m = \frac{m\pi v}{4a} \qquad (h)$$

Las condiciones geométricas a lo largo de *ts* exigen que

$$w = w' \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w'}{\partial y} \quad \text{para } y = \frac{v}{2} \qquad (i)$$

Por otra parte, puesto que no hay fuerzas concentradas a lo largo de *ts*, los momentos flectores M_y y los esfuerzos cortantes Q_y deben ser continuos a lo largo de esta recta. Considerando (i) estas últimas condiciones pueden ponerse en la forma

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 w'}{\partial y^3} \quad \text{para } y = \frac{v}{2} \qquad (j)$$

Sustituyendo (e) y (g) en (i) y (j) y usando la notación (h) estas ecuaciones toman la forma siguientes:

$$\begin{aligned}
&(A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m) 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m \\
&\qquad - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m + a_m = 0 \\
&(A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m)(\operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) \\
&\qquad - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m(\operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0 \\
&(A_m - A'_m) \operatorname{ch} 2\gamma_m + (B_m - B'_m)(2 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) \\
&\qquad - C'_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - D'_m(2 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) = 0 \\
&(A_m - A'_m) \operatorname{sh} 2\gamma_m + (B_m - B'_m)(3 \operatorname{sh} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m) \\
&\qquad - C'_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - D'_m(3 \operatorname{ch} 2\gamma_m + 2\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m) = 0
\end{aligned} \qquad (k)$$

Librodot

De estas ecuaciones se deduce

$$\begin{aligned} A_m - A'_m &= a_m(\gamma_m \operatorname{sh} 2\gamma_m - \operatorname{ch} 2\gamma_m) \\ B_m - B'_m &= \frac{a_m}{2} \operatorname{ch} 2\gamma_m \\ C'_m &= a_m(\gamma_m \operatorname{ch} 2\gamma_m - \operatorname{sh} 2\gamma_m) \\ D'_m &= \frac{a_m}{2} \operatorname{sh} 2\gamma_m \end{aligned} \qquad (l)$$

A estas cuatro ecuaciones con seis constantes $A_m \ldots D'_m$ se añaden dos ecuaciones que representan las condiciones en los bordes para $y = b/2$.

Sustituyendo (g) en las condiciones $w' = 0$, $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$ para $y = b/2$ obtendremos

$$\begin{aligned} A'_m \operatorname{ch} \alpha_m + B'_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m + C'_m \operatorname{sh} \alpha_m + D'_m \alpha \operatorname{ch} \alpha_m &= 0 \\ B'_m \operatorname{ch} \alpha_m + D'_m \operatorname{sh} \alpha_m &= 0 \end{aligned} \qquad (m)$$

Las ecuaciones (m) junto con las ecuaciones (l), determinan las constantes:

$$A_m = -\frac{a_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}\right] \qquad (n)$$

$$B_m = \frac{a_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch}(\alpha_m - 2\gamma_m)$$

Llevando estos valores así como (f) a la ecuación (e), obtiene

$$w = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \left\{1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh}(\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}\right] + \frac{\operatorname{ch}(\alpha_m - 2\gamma_m)}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}\right\} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (142)$$

Mediante esta ecuación se puede calcular la flecha en todo punto de la zona cargada de la placa.

En el caso particular de que $u = a$ y $v = b$ se obtiene, por las ecuaciones (h), $\gamma_m = \alpha_m/2$. Las expresiones (n) toman la forma

$$A_m = -\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m}\left(1 + \frac{\alpha_m}{2} \operatorname{th} \alpha_m\right) \qquad B_m = \frac{\alpha_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

Librodot

y (142) coincide con la ecuación (139) (pág. 137) obtenida para una placa rectangular uniformemente cargada.

La flecha máxima de la placa está en el centro y se obtiene sustituyendo $y = 0$ y $x = a/2$ en la fórmula (142) que da

$$w_{\text{máx}} = \frac{4qa^4}{D\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left[\operatorname{ch} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \gamma_m \operatorname{sh} (\alpha_m - 2\gamma_m) + \alpha_m \frac{\operatorname{sh} 2\gamma_m}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \right] \right\} \qquad (143)$$

Consideremos como ejemplo particular el caso en que $u = a$ y v es muy pequeño. Este caso representa una distribución uniforme de carga a lo largo del eje x. Considerando γ_m muy pequeño en la ecuación (143) y no conservando más que los términos de primer orden, se obtiene haciendo $qv = q_0$,

$$w_{\text{máx}} = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \qquad (144)$$

Para una placa cuadrada esta ecuación da

$$w_{\text{máx}} = 0{,}00674 \frac{q_0 a^3}{D}$$

En el caso general, la flecha máxima puede ponerse en la forma

$$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{q_0 a^3}{D} \quad \text{para } a < b$$
$$= \alpha \frac{q_0 b^3}{D} \quad \text{para } a > b$$

La tabla 19 da varios valores del coeficiente.

TABLA 19

Flechas de placas rectangulares simplemente apoyadas bajo carga uniformemente repartida a lo largo del eje de simetría paralelo a la dimensión a

$w_{\text{máx}} = \alpha q_0 a^3/D$

b/a	2	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0
α	0,00987	0,00911	0,00882	0,00844	0,00799	0,00742	0,00674
a/b	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0	∞
α	0,00802	0,00926	0,01042	0,01151	0,01251	0,01629	0,02083

Volviendo al caso general en donde v no es necesariamente pequeño y u puede tener un valor cualquiera, las expresiones de los momentos flectores M_x y M_y se calculan por la ecuación (142). Los valores máximos de estos momentos se producen en el centro de la placa y están dados por

$$(M_x)_{\text{máx}} = \beta uvq = \beta P \qquad (M_y)_{\text{máx}} = \beta_1 uvq = \beta_1 P$$

Librodot

donde $P = uvq$ es la carga total. La tabla 20 da los valores numéricos de β para una placa cuadrada y para diferentes dimensiones del rectángulo

TABLA 20

Coeficientes β para el cálculo de $(M_x)_{máx}$ en placas cuadradas simplemente apoyadas parcialmente cargadas

$\nu = 0,3$

$u/a =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
v/a	Coeficientes en la expresión $(M_x)_{máx} = \beta P$										
0	∞	0,321	0,251	0,209	0,180	0,158	0,141	0,125	0,112	0,102	0,092
0,1	0,378	0,284	0,232	0,197	0,170	0,150	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088
0,2	0,308	0,254	0,214	0,184	0,161	0,142	0,127	0,114	0,103	0,093	0,084
0,3	0,262	0,225	0,195	0,168	0,151	0,134	0,120	0,108	0,098	0,088	0,080
0,4	0,232	0,203	0,179	0,158	0,141	0,126	0,113	0,102	0,092	0,084	0,076
0,5	0,208	0,185	0,164	0,146	0,131	0,116	0,106	0,096	0,087	0,079	0,071
0,6	0,188	0,168	0,150	0,135	0,121	0,109	0,099	0,090	0,081	0,074	0,067
0,7	0,170	0,153	0,137	0,124	0,112	0,101	0,091	0,083	0,076	0,069	0,062
0,8	0,155	0,140	0,126	0,114	0,103	0,094	0,085	0,077	0,070	0,063	0,057
0,9	0,141	0,127	0,115	0,104	0,094	0,086	0,078	0,070	0,064	0,058	0,053
1,0	0,127	0,115	0,105	0,095	0,086	0,078	0,071	0,064	0,058	0,053	0,048

TABLA 21

Coeficientes β y β_1 para el cálculo de $(M_x)_{máx}$ y $(M_y)_{máx}$ en placas rectangulares parcialmente cargadas, siendo $b = 1,4a$

$\nu = 0,3$

$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Coeficiente β en la expresión $(M_x)_{máx} = \beta P$						Coeficiente β_1 en la expresión $(M_y)_{máx} = \beta_1 P$					
0	∞	0,276	0,208	0,163	0,134	0,110	∞	0,299	0,230	0,183	0,151	0,125
0,2	0,332	0,239	0,186	0,152	0,125	0,103	0,246	0,208	0,175	0,147	0,124	0,102
0,4	0,261	0,207	0,168	0,138	0,115	0,095	0,177	0,157	0,138	0,119	0,101	0,083
0,6	0,219	0,181	0,151	0,126	0,105	0,086	0,138	0,125	0,111	0,097	0,083	0,069
0,8	0,187	0,158	0,134	0,112	0,094	0,078	0,112	0,102	0,091	0,080	0,069	0,058
1,0	0,162	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070	0,093	0,085	0,077	0,068	0,058	0,049
1,2	0,141	0,122	0,104	0,089	0,075	0,062	0,079	0,072	0,065	0,058	0,050	0,042
1,4	0,123	0,106	0,091	0,077	0,065	0,054	0,068	0,062	0,056	0,050	0,043	0,036

sometido a la carga. Esta misma tabla da β_1 siendo suficiente para ello permutar u y v. Los factores numéricos, para las placas con las relaciones $b = 1,4a$ y $b = 2a$, están dados en las tablas 21 y 22[1] respectivamente.

[1] Los valores de M_x y M_y para diferentes relaciones a/b, u/a y v/b han sido representadas y calculadas en curvas por G. Pigeaud, *Ann. ponst et chaussées*, 1929. Véase también el apartado 37 de este libro.

TABLA 22

Coeficientes β y β_1 para el cálculo de $(M_x)_{máx}$ y $(M_y)_{máx}$ en placas rectangulares parcialmente cargadas, siendo $b = 2a$

$\nu = 0{,}3$

$u/a =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
v/a	Coeficiente β en la expresión $(M_x)_{máx} = \beta P$						Coeficiente β_1 en la expresión $(M_y)_{máx} = \beta_1 P$					
0,0	∞	0,289	0,220	0,175	0,144	0,118	∞	0,294	0,225	0,179	0,148	0,122
0,2	0,347	0,252	0,199	0,163	0,135	0,111	0,242	0,203	0,170	0,143	0,120	0,099
0,4	0,275	0,221	0,181	0,150	0,125	0,103	0,172	0,152	0,133	0,114	0,097	0,081
0,6	0,233	0,195	0,164	0,138	0,115	0,095	0,133	0,120	0,106	0,093	0,079	0,066
0,8	0,203	0,174	0,148	0,126	0,106	0,088	0,107	0,097	0,087	0,076	0,065	0,054
1,0	0,179	0,155	0,134	0,115	0,097	0,080	0,089	0,081	0,073	0,064	0,055	0,046
1,2	0,161	0,141	0,122	0,105	0,089	0,074	0,074	0,068	0,061	0,054	0,046	0,039
1,4	0,144	0,127	0,111	0,096	0,081	0,068	0,064	0,058	0,052	0,046	0,040	0,033
1,6	0,130	0,115	0,101	0,087	0,074	0,062	0,056	0,051	0,046	0,040	0,035	0,029
1,8	0,118	0,104	0,091	0,079	0,067	0,056	0,049	0,045	0,041	0,036	0,031	0,026
2,0	0,107	0,094	0,083	0,072	0,061	0,051	0,044	0,041	0,037	0,032	0,028	0,023

34. *Placa rectangular simplemente apoyada con carga concentrada*

Utilizando el método de Navier, hemos obtenido en el apartado 29, una expresión en forma de serie doble, para la flecha de una placa bajo una carga concentrada P en un punto dado $x = \xi$, $y = \eta$ (fig. 70).

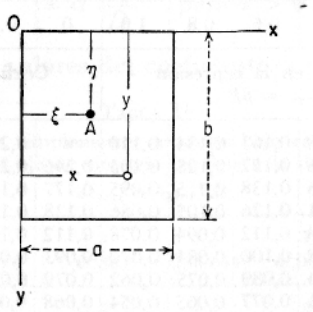


FIG. 70

Para obtener una solución equivalente, pero en forma de serie simple, se empieza por escribir la solución de Navier (133) de la forma siguiente

$$w = \frac{4Pb^3}{\pi^4 aD} \sum_{m=1}^{\infty} S_m \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (a)$$

Librodot

estando dado el coeficiente S_m por

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{\left(\frac{m^2b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \tag{b}$$

Introduciendo las notaciones

$$S'_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(y-\eta)}{b}}{\left(\frac{m^2b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \qquad S''_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi(\eta+y)}{b}}{\left(\frac{m^2b^2}{a^2} + n^2\right)^2} \tag{c}$$

Se puede representar (*b*) de la forma

$$S_m = \tfrac{1}{2}(S'_m - S''_m) \tag{d}$$

Para calcular las sumas (*c*), se utilia la serie conocida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{\alpha^2 + n^2} = -\frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi\alpha} \tag{e}$$

válida para $0 \leq z < 2\pi$ y que se considera, en primer lugar, como una función $S(\alpha)$ de α. Derivando respecto a α, el primer miembro de (*e*), se obtiene

$$\frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -2\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2} \tag{f}$$

Después de haber derivado también el segundo miembro de (*e*) y sustituyendo este resultado en (*f*), se llega a

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos nz}{(\alpha^2 + n^2)^2} = -\frac{1}{2\alpha} \frac{\partial S(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\alpha^4} + \frac{\pi}{4\alpha^3} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi - z)}{\operatorname{sh} \pi\alpha} - \frac{\pi(\pi - z) \operatorname{sh} \alpha(\pi - z)}{4\alpha^2 \operatorname{sh} \pi\alpha} + \frac{\pi^2}{4\alpha^2} \frac{\operatorname{ch} \alpha(\pi - z) \operatorname{ch} \pi\alpha}{\operatorname{sh}^2 \pi\alpha} \tag{g}$$

Ahora, para obtener los valores de las sumas (*e*), se pone en la ecuación (*g*) primeramente $z = (\pi/b)(y + \eta)$, después $z = (\pi/b)(y + \eta)$ y, luego, $\alpha = mb/a$. Usando estos valores por sustitución en (*d*) y (*a*) se llega, finalmente, para la flecha de la placa a la expresión siguiente

$$w = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + \beta_m \operatorname{cth} \beta_m - \frac{\beta_m y_1}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m y_1}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m \eta}{b}\right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \operatorname{sh} \frac{\beta_m y_1}{b} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{sh} \beta_m} \tag{145}$$

Librodot

en la que

$$\beta_m = \frac{m\pi b}{a} \qquad y_1 = b - y \qquad \text{y} \qquad y \geq \eta$$

En el caso de que $y < \eta$ el valor y_1 debe sustituirse en la expresión (145) por y y η por $\eta_1 = b - \eta$. Consideremos más detenidamente el caso particular de una carga P concentrada en un punto A sobre el eje de simetría de la placa, que tomaremos como eje de las x (fig. 71). Con $\eta = b/2$ y la notación

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{\beta_m}{2} \tag{h}$$

la expresión general (145) de la flecha de la placa será

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left[(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m) \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) - \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{b} (b - 2y) \right] \frac{\operatorname{sen} \dfrac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \dfrac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \tag{146}$$

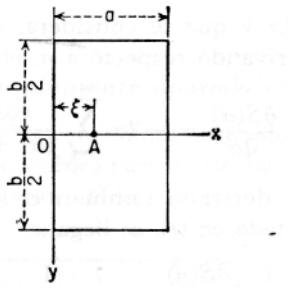


FIG. 71

válida para $y \geq 0$, es decir, por debajo del eje de las x (fig. 71). Haciendo en particular, $y = 0$ se obtiene la flecha de la placa a lo largo del eje de las x en la forma:

$$(w)_{y=0} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) \frac{\operatorname{sen} \dfrac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \dfrac{m\pi x}{a}}{m^3} \tag{i}$$

Esta serie converge rápidamente, y unos pocos de los primeros términos dan las flechas con aproximación suficiente. En el caso de una carga P aplicada en el centro de la placa, la flecha máxima, que se sitúa en el centro, se obtiene sustituyendo $x = \xi = a/2$ en (i). En este caso llega el resultado siguiente:

$$w_{\text{máx}} = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{th} \alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} \right) = \alpha \frac{Pa^2}{D} \tag{147}$$

Librodot

La tabla 23 da los valores numéricos de α para diferentes valores de b/a.

TABLA 23

Factor α para el cálculo de la flecha (147) de una placa rectangular cargada en su centro

$b/a =$	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$\alpha =$	0,01160	0,01265	0,01353	0,01484	0,01570	0,01620	0,01651	0,01690	0,01695

Se ve que la flecha máxima tiende rápidamente hacia la de una placa de longitud infinita[1] cuando la longitud de la placa aumenta. La comparación de la flecha máxima de una placa cuadrada cargada con una carga en el centro con la de una placa circular cargada también en el centro e inscrita en el cuadrado (v. pág. 87), muestra que la flecha de la placa circular es mayor que la de la placa cuadrada correspondiente. Este resultado se atribuye a la acción de las reacciones concentradas en los ángulos del cuadrado, las cuales tienen tendencia a crear una flecha convexa hacia arriba.

El cálculo de los momentos flectores está desarrollado en los apartados 35 y 37.

35. *Momentos flectores en una placa rectangular simplemente apoyadas con carga concentrada*

Para determinar los momentos flectores a lo largo del eje central $y = 0$ de la placa cargada como indica la figura 71, se calculan las derivadas segundas de la expresión (146) que toman la forma

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}}{m}\left(\operatorname{th}\alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = -\frac{P}{2D\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}}{m}\left(\operatorname{th}\alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Sustituyendo estas derivadas en (101), se obtiene para los momentos flectores,

$$(M_x)_{y=0} = \frac{P}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}}{m}\left[(1+\nu)\operatorname{th}\alpha_m - \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (a)$$

$$(M_y)_{y=0}' = \frac{P}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}}{m}\left[(1+\nu)\operatorname{th}\alpha_m + \frac{(1-\nu)\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

[1] M. Bergsträsser ha estudiado experimentalmente la deformación de placas debida a carga concentrada; véase *Forschungsarb.*, vol. 302, Berlín, 1928; véase también la Memoria de N. M. Newmark y H. A. Lepper, *Univ. Illinois Bull.*, vol. 36, núm. 84, 1939.

Librodot

Cuando b es muy grande en comparación con a, se puede hacer

$$\text{th } a_m \approx 1 \qquad \frac{a_m}{\text{ch}^2\, a_m} \approx 0$$

Entonces

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{(1+\nu)P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

Esta serie no converge con suficiente rapidez para un cálculo cómodo de los momentos en la proximidad del punto de aplicación de la carga P, es entonces necesario obtener otra forma de representación de los momentos, cerca de este punto. Por el estudio de la flexión de una placa circular cargada con una fuerza aplicada en el centro, (v. ap. 19) se sabe que los esfuerzos cortantes y los momentos flectores llegan a ser infinitamente grandes en el punto de aplicación de la carga. Estamos en condiciones similares en el caso de una placa rectangular. La distribución de tensiones en un círculo de radio pequeño cargado en su centro, es sustancialmente la misma que en las proximidades del centro de una placa circular con carga concentrada en dicho centro. La tensión de flexión en un punto de este

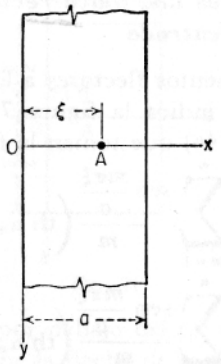


FIG. 72

círculo puede considerarse como compuesta de dos partes: una es la misma que la de una placa circular de radio a, cargada en su centro, y la otra representa la diferencia entre las tensiones de una placa circular y una placa rectangular. Cuando la distancia r entre el punto de aplicación de la carga y el punto considerado, va disminuyendo, la primera componente de las tensiones varía como el ln (a/r) y llega a ser infinita en el centro, mientras que la segunda, que representa la influencia de la diferencia entre las condiciones en los bordes de las dos placas, permanece finita.

Para obtener las expresiones de los momentos de flexión en las proximidades del punto de aplicación de la carga, empezaremos por el caso más simple de una placa de longitud infinita (fig. 72). La flecha de tal placa

Librodot

puede calcularse por (146) aumentando la longitud del lado b, y por consiguiente, la cantidad $\alpha_m = m\pi b/2a$, indefinidamente, esto es, haciendo

$$\text{th } \alpha_m \approx 1 \qquad \text{ch } \alpha_m \approx \frac{1}{2} e^{am}$$

$$\text{sh } \frac{\alpha_m}{b}(b - 2y) \approx \text{ch } \frac{\alpha_m}{b}(b - 2y) \approx \frac{1}{2} e^{(\alpha_m/b)(b-2y)}$$

Sustituyendo en (146), la flecha de la franja simplemente apoyada y con una carga concentrada P en el punto $x = \xi - y = 0$, toma la forma[1]:

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \text{sen } \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen } \frac{m\pi x}{a} \left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right) e^{-m\pi y/a} \qquad (148)$$

válido para $y \geq 0$, es decir, por debajo del eje de las x (v. fig. 72).

Las expresiones correspondientes de los momentos flectores y torsores se obtienen igualmente mediante las ecuaciones (101) y (102). Tenemos:

$$M_x = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen } \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen } \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu + (1 - \nu)\frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a}$$

$$M_y = \frac{P}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen } \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen } \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu - (1 - \nu)\frac{m\pi y}{a}\right] e^{-m\pi y/a} \qquad (149)$$

$$M_{xy} = -\frac{P}{2a} y(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen } \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a}$$

Utilizando de nuevo el valor $M = (M_x + M_y)/(1 + \nu)$ de la página 112, se obtiene

$$M = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{P}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{sen } \frac{m\pi\xi}{a} \text{sen } \frac{m\pi x}{a} e^{-m\pi y/a} \qquad (150)$$

Los momentos (149) pueden expresarse ahora en función de M bajo la forma siguiente

$$M_x = \frac{1}{2}\left[(1 + \nu)M - (1 - \nu)y\frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

$$M_y = \frac{1}{2}\left[(1 + \nu)M + (1 - \nu)y\frac{\partial M}{\partial y}\right] \qquad (151)$$

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(1 - \nu)y\frac{\partial M}{\partial x}$$

[1] A. Nádai ha estudiado con detalle este caso importante de la flexión de una placa; véase su libro *Elastische Platten*, págs. 78-109, Berlín, 1925.

Librodot

Sumando la serie (150) se obtiene[1]:

$$M = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x + \xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x - \xi)}{a}} \tag{152}$$

y, utilizando la expresión (151) podemos representar los momentos de una placa de longitud infinita bajo una forma finita. Recordando que es, $\Delta\Delta w = 0$ en todo punto excepto en el punto $(x = \xi, y = 0)$ de aplicación de la carga, se llega a que la función $M = -D\Delta w$ satisface (salvo en el punto mencionado) a la ecuación $\Delta M = 0$. En virtud de la segunda de las ecuaciones (111), las condiciones en los bordes $M = 0$, para los bordes $x = 0$ y $x = a$, también se cumplen para la función M.

Para los puntos del eje x, las ecuaciones (151) dan $M_x = M_y$ y por lo tanto

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = (M)_{y=0} \frac{1 + \nu}{2} \tag{c}$$

Utilizando las ecuaciones (*c*) y (152) en el caso particular de una carga aplicada en el eje central de la franja $\xi = a/2$ se obtiene

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1 + \nu)}{8\pi} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{1 - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}} \tag{d}$$

que se había podido obtener también sumando la serie (*b*).

Volvamos ahora al cálculo de los momentos flectores de los puntos situados cerca del punto de aplicación de la carga pero no necesariamente sobre el eje x. En este caso, $(x - \xi)$ e y son pequeños y, utilizando (152), se puede poner:

$$\cos \frac{\pi(x - \xi)}{a} \approx 1 - \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2} \qquad \operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} \approx 1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2}$$

Así se llega al resultado

$$M = \frac{P}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \frac{2\pi\xi}{a}}{1 + \frac{\pi^2 y^2}{2a^2} - 1 + \frac{\pi^2(x - \xi)^2}{2a^2}}$$

$$= \frac{P}{4\pi} \ln \left(\frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \right)^2 = \frac{P}{2\pi} \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} \tag{153}$$

[1] Véase, por ejemplo, W. Magnus y F. Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, 2.ª ed., pág. 214, Berlín, 1948.

Librodot

donde

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}$$

representa la distancia del punto considerado al punto de aplicación de la carga P. Utilizando entonces (153) y sustituyendo en (151), se obtienen las expresiones siguientes, válidas para los puntos próximos a la carga concentrada

$$M_x = \frac{1}{2}\left[(1 + \nu)\frac{P}{2\pi}\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} + \frac{(1 - \nu)Py^2}{2\pi r^2}\right]$$
$$M_y = \frac{1}{2}\left[(1 + \nu)\frac{P}{2\pi}\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi r} - \frac{(1 - \nu)Py^2}{2\pi r^2}\right] \qquad (154)$$

Es interesante comparar este resultado con el correspondiente a una placa circular simplemente apoyada, cargada en el centro (v. ap. 19). Sea un radio r que forma un ángulo α con el eje x, se encuentra, para la ecuaciones (90) y (91) para una placa circular

$$M_x = M_n \cos^2\alpha + M_t \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{P}{4\pi}(1 + \nu)\ln\frac{a}{r} + (1 - \nu)\frac{P}{4\pi}\frac{y^2}{r^2}$$
$$M_y = M_n \operatorname{sen}^2\alpha + M_t \cos^2\alpha = \frac{P}{4\pi}(1 + \nu)\ln\frac{a}{r} + (1 - \nu)\frac{P}{4\pi}\frac{x^2}{r^2} \qquad (e)$$

Los primeros términos de (154) y (e) coinciden si se toma por radio exterior de la placa circular

$$\frac{2a}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}$$

En estas condiciones, los momentos M_x son idénticos en los dos casos. El momento M_y, para una placa rectangular larga se deduce del de la placa circular restando[1] $(1 - \nu)P/4\pi$.

Se puede llegar de ahí a la conclusión de que en una placa rectangular larga la distribución de tensiones en torno al punto de aplicación de la carga se obtiene superponiendo, a las tensiones de una placa circular cargada en el centro y de radio $(2a/\pi)$ sen $(\pi\xi/a)$, una flexión pura producida por momentos $M_y = -(1 - \nu)P/4\pi$.

Puede suponerse que la misma relación, entre los momentos de placas circulares y placas rectangulares largas, existe también en el caso de una carga P uniformemente repartida sobre la superficie de un círculo de radio pequeño c. En tal caso, para el centro de una placa circular, se obtiene de la expresión (83) despreciando el término en c^2.

$$M_{\text{máx}} = \frac{P}{4\pi}\left[(1 + \nu)\ln\frac{a}{c} + 1\right]$$

[1] Se recuerda que $x^2 = r^2 - y^2$.

Librodot

Por consiguiente, para el centro del área circular de una placa rectangular larga se obtiene de las ecuaciones (154)

$$M_x = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi c}+1\right]$$
$$M_y = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi c}+1\right]-\frac{(1-\nu)P}{4\pi} \qquad (155)$$

Se llega a la conclusión, después de esta comparación de una placa circular y de una placa rectangular larga, de que todas las fórmulas correspondientes a las tensiones locales en el punto de aplicación de la carga P, calculadas para una placa circular, utilizando la teoría de las placas gruesas (v. ap. 19) pueden servir en el caso de una placa rectangular larga.

Cuando la placa no es muy larga se utilizarán las ecuaciones (a) en lugar de (b), para el cálculo de los momentos M_x y M_y a lo largo del eje x. Puesto que th α_m tiende hacia uno rápidamente y ch α_m aumenta exponencialmente con m, las diferencias entre las sumas de las series (a) y la suma de la serie (b) se calculan fácilmente, y los momentos M_x y M_y a lo largo del eje x y cerca del punto de aplicación de la carga pueden ponerse en la forma:

$$M_x = \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}+\gamma_1\frac{P}{4\pi}$$
$$= \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi r}+\gamma_1\frac{P}{4\pi} \qquad (156)$$
$$M_y = \frac{(1+\nu)P}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}+\gamma_2\frac{P}{4\pi}$$
$$= \frac{P(1+\nu)}{4\pi}\ln\frac{2a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi r}+\gamma_2\frac{P}{4\pi}$$

donde γ_1 y γ_2 son factores numéricos cuyos valores dependen de la relación b/a y de la posición de la carga sobre el eje x. La tabla 24 da varios valores en el caso de una carga central.

TABLA 24

Factores γ_1 y γ_2 de las ecuaciones (156)

b/a	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	∞
γ_1	−0,565	−0,350	−0,211	−0,125	−0,073	−0,042	0
γ_2	+0,135	+0,115	+0,085	+0,057	+0,037	+0,023	0

Librodot

La distribución de tensiones cerca del punto de aplicación de la carga es también en esencia la misma que en una placa circular cargada en el centro y de radio $(2a/\pi)$ sen $(\pi\xi/a)$.

Para obtener los momentos de flexión M_x y M_y cerca de la carga, basta con superponer a los momentos de la placa circular la flexión pura creada por los momentos $M_x' = \gamma_1 P/4\pi$ y $M_y' = -(1 - \nu - \gamma_2)P/4\pi$.

Suponiendo que esta solución es válida también cuando la carga P está uniformemente repartida sobre un círculo de radio pequeño c, se tiene para el centro del círculo:

$$M_x = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ \ln\ \frac{2a\ \text{sen}\ \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1\right] + \frac{\gamma_1 P}{4\pi}$$

$$M_y = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ \ln\ \frac{2a\ \text{sen}\ \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + 1\right] - (1 - \nu - \gamma_2)\frac{P}{4\pi} \qquad (157)$$

Como en el caso de una carga repartida las reacciones concentradas en las esquinas de una placa rectangular actúan hacia abajo y las cargas concentradas producen importantes momentos de sujeción. Las reacciones en las esquinas

$$R = nP \qquad (f)$$

debidas a una carga central P están dadas en la tabla 25 por los valores numéricos del factor n, en tanto los momentos de sujeción tienen por valor, $-R/2$ (v. pág. 105). El cálculo de R se efectúa por un método sencillo explicado en el apartado siguiente.

TABLA 25

Factor n para el cálculo de las reacciones R en placas rectangulares simplemente apoyadas cargadas en su centro

$\nu = 0{,}3$

$b/a =$	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	3,0	∞
$n =$	0,1219	0,1162	0,1034	0,0884	0,0735	0,0600	0,0180	0

La figura 73 muestra la distribución de los momentos flectores y de las reacciones, en el caso particular de una placa cuadrada, cargada en el centro.

Las partes de curvas rayadas son válidas para un reparto uniforme de la carga P sobre un círculo de radio $c = 0{,}05\ a$.

Librodot

36. *Placas rectangulares de longitud infinita con bordes simplemente apoyados*

En anteriores estudios hemos considerado varios casos de placas de longitud infinita. Las flechas y los momentos en estas placas se obtienen a partir de las soluciones de las placas finitas en las que se hace tender la longitud hacia infinito. En algunos casos es mejor obtener las soluciones

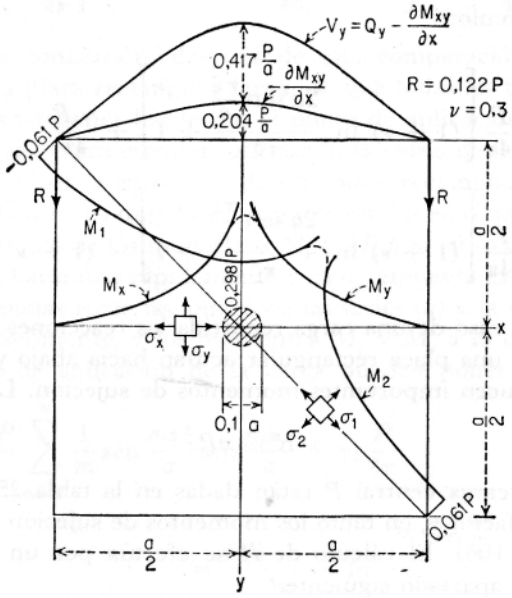


FIG. 73

para una placa de longitud infinita y combinarlas de tal forma que se obtenga la solución para una placa finita. Daremos en este apartado varios ejemplos de este procedimiento de obtener las soluciones.

Estudiaremos primero el caso de una placa de longitud infinita y de anchura *a* cargada a lo largo del eje *x*, como indica la figura 74. Puesto que

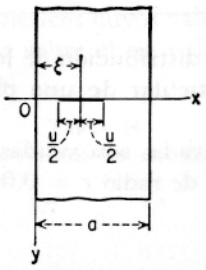


FIG. 74

Librodot

la deformada es simétrica con relación al eje x, no consideraremos más que la parte de la placa correspondiente a los valores positivos de y.

Estando la carga distribuida sólo a lo largo del eje x, la flecha de w de la placa, satisface la ecuación

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \qquad (a)$$

Escribiremos su solución en la forma

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

que satisface las condiciones de contorno a lo largo de los bordes longitudinales de la placa simplemente apoyados. Para satisfacer a (a), las funciones Y_m deberán ser solución de

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2}\,Y_m'' + \frac{m^4\pi^4}{a^4}\,Y_m = 0$$

Tomando la solución de esta ecuación en la forma

$$Y_m = A_m e^{m\pi y/a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\,e^{m\pi y/a} + C_m e^{-m\pi y/a} + D_m\frac{m\pi y}{a}\,e^{-m\pi y/a} \qquad (c)$$

y recordando que las flechas y sus derivadas tienden a cero cuando nos alejamos del eje x, se llega a que las constantes A_m y B_m deben ser nulas. Por consiguiente (b) se escribe

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\left(C_m + D_m\frac{m\pi y}{a}\right)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

Por razón de simetría, tenemos

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = 0$$

Esta condición se satisface tomando $C_m = D_m$ en (d). De donde

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m\left(1 + \frac{m\pi y}{a}\right)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

Las constantes C_m se calculan fácilmente en cada caso particular si se conoce la distribución de la carga a lo largo del eje x.

Librodot

Por ejemplo, supongamos que la carga está uniformemente repartida a lo largo de todo el ancho de la placa. La intensidad de la carga puede ponerse en la forma siguiente de serie trigonométrica

$$q = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

en la que q_0 es la carga por unidad de longitud. Puesto que la carga está uniformemente repartida entre las dos mitades de la placa, se ve que

$$(Q_y)_{y=0} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = -\frac{2}{\pi} q_0 \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (f)$$

Sustituyendo w por su valor dado en (e), se obtiene

$$\frac{2D\pi^3}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} C_m m^3 \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de donde

$$C_m = \frac{q_0 a^3}{D\pi^4 m^4}$$

donde $m = 1, 3, 5 \ldots$

Por consiguiente

$$w = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \left(1 + \frac{m\pi y}{a} \right) e^{-y\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

La flecha es máxima en el centro de la placa ($x = a/2$, $y = 0$), donde

$$(w)_{\text{máx}} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} = \frac{5\pi q_0 a^3}{1{,}536D} \qquad (h)$$

Se obtiene el mismo resultado poniendo th $\alpha_m = 1$ y ch $\alpha_m = \infty$ en la ecuación (144) (v. pág. 160).

Como otro ejemplo de aplicación de (e), consideremos una carga de longitud u uniformemente repartida a lo largo de una parte del eje x (fig. 74). Representando esta distribución de carga por una serie trigonométrica, se tiene

$$q = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Librodot

donde q_0 es la intensidad de la carga a lo largo de la parte cargada del eje x. La ecuación que permite la determinación de constantes c_m, correspondientes a (f), es

$$D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}=\frac{2q_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Sustituyendo w por su valor en (e), se obtiene

$$\frac{2D\pi^3}{a^3}\sum_{m=1}^{\infty}C_m m^3\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}=\frac{2q_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

de donde se deduce

$$C_m=\frac{q_0a^3}{\pi^4 Dm^4}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}$$

La expresión (e) de las flechas toma entonces la forma

$$w=\frac{q_0a^3}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^4}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{2a}\left(1+\frac{m\pi y}{a}\right)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\qquad(i)$$

El caso particular de una fuerza concentrada aplicada a una distancia ξ del origen se obtiene haciendo tender a cero la anchura u de la parte cargada del eje x. Sustituyendo

$$q_0u=P\qquad\text{y}\qquad\operatorname{sen}\frac{m\pi u}{a}\approx\frac{m\pi u}{a}$$

en la ecuación (i), se obtiene

$$w=\frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\left(1+\frac{m\pi y}{a}\right)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\qquad(158)$$

expresión idéntica a la (148) del apartado anterior.

Se pueden obtener diferentes casos de carga integrando la expresión (i) de la flecha de una placa larga sometida a una carga repartida a lo largo de una porción u del eje x. Por ejemplo, consideremos el caso de una carga de intensidad q repartida uniformemente sobre un rectángulo rayado (fig. 75). Tomemos un elemento infinitesimal de carga, de valor $qud\eta$ a una distancia η del eje x, la flecha correspondiente producida por esta carga en puntos tales que $y > \eta$ se obtiene sustituyendo q_0 por $qd\eta$ e y por $y-\eta$ en (i). La flecha producida por la carga entera, en puntos tales que $y \geq v/2$, se obtiene por integración:

Librodot

$$w = \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \int_{-v/2}^{v/2} \left[1 + \frac{m\pi(y-\eta)}{a}\right] e^{-\frac{m\pi(y-\eta)}{a}} d\eta$$

$$= \frac{qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[\left(\frac{2a}{m\pi} + y - \frac{v}{2}\right) e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} - \left(\frac{2a}{m\pi} + y + \frac{v}{2}\right) e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}}\right] \quad (j)$$

La flecha en los puntos tales que $y < v/2$ se obtiene mediante un adecuado cambio de los límites de esta integración. Consideremos la flecha a lo largo del eje x (fig. 75). La flecha producida por la mitad superior de la carga se obtiene de la expresión (j), sustituyendo y y $v/2$ por $v/4$.

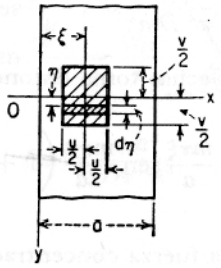


FIG. 75

Multiplicando por 2 el resultado obtenido en este caso, se incluye también la acción de la mitad inferior de la carga y se obtiene finalmente

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 - \left(1 + \frac{m\pi v}{4a}\right) e^{-m\pi v/2a}\right] \quad (k)$$

Cuando $v = \infty$, la carga indicada en la figura 75, se extiende en toda la longitud de la placa y la deformada es cilíndrica. La flecha correspondiente es, según la ecuación (k):

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \quad (l)$$

Haciendo $\xi = u/2 = a/2$ en esta expresión, se obtiene

$$(w)_{y=0} = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

que representa la deformada de una franja uniformemente cargada.

Librodot

Las expresiones siguientes de los momentos flectores producidos por la carga uniformemente repartida a lo largo de una parte u del eje x, se obtienen fácilmente de la expresión (i) de la flecha w:

$$M_x = \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} \right] e^{-m\pi y/a}$$

$$M_y = \frac{q_0 a}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{m\pi y}{a} e^{-m\pi y/a} \right] \qquad (m)$$

Los valores máximos de estos momentos se sitúan sobre x; donde

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (n)$$

En el caso particular de que $\xi = u/2 = a/2$, es decir, cuando la carga está distribuida a todo lo ancho de la placa

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

El momento máximo está en el centro de la placa, donde

$$(M_x)_{\text{máx}} = (M_y)_{\text{máx}} = \frac{q_0 a(1 + \nu)}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} = 0{,}0928 q_0 a(1 + \nu)$$

Cuando u es muy pequeño, esto es, en el caso de una carga concentrada, se pone

$$\operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \approx \frac{m\pi u}{2a} \qquad \text{y} \qquad q_0 u = P$$

Entonces, según la expresión (n), se tiene

$$(M_x)_{y=0} = (M_y)_{y=0} = \frac{P(1 + \nu)}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (o)$$

que es idéntica a (b) del apartado anterior y que se expresa también de forma finita (v. pág. 168).

Librodot

En el caso de una carga q uniformemente distribuida en el área de un rectángulo (fig. 75), los momentos flectores de la parte de placa para la que $y \geq v/2$, se obtiene por integración de las expresiones (m) en la forma siguiente:

$$M_x = \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \int_{-v/2}^{+v/2} \left[1 + \nu + (1-\nu) \frac{m\pi(y-\eta)}{a} \right] e^{-\frac{m\pi(y-\eta)}{a}} d\eta$$

$$= \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left\{ \left[\frac{2a}{m\pi} + (1-\nu)\left(y - \frac{v}{2}\right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} - \left[\frac{2a}{m\pi} + (1-\nu)\left(y + \frac{v}{2}\right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right\} \tag{159}$$

$$M_y = \frac{qa}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left\{ \left[\frac{2\nu a}{m\pi} - (1-\nu)\left(y - \frac{v}{2}\right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y-v)}{2a}} - \left[\frac{2\nu a}{m\pi} - (1-\nu)\left(y + \frac{v}{2}\right) \right] e^{-\frac{m\pi(2y+v)}{2a}} \right\}$$

Los momentos de la parte de la placa donde $y < v/2$ se calculan de modo similar. Para obtener los momentos a lo largo de x, basta sustituir v por $v/2$ e y por $v/4$ en las fórmulas (159), y multiplicar por 2 el resultado así obtenido.

Por consiguiente

$$(M_x)_{y=0} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left\{ 1 - \left[1 + (1-\nu) \frac{m\pi v}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi v}{2a}} \right\}$$

$$(M_y)_{y=0} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left\{ \nu - \left[\nu - (1-\nu) \frac{m\pi v}{4a} \right] e^{-\frac{m\pi v}{2a}} \right\} \tag{160}$$

Si se precisa conocer los valores de los momentos en el centro del área rectangular cargada, se pueden calcular también por medio de las expresiones (167) que serán expuestas en el apartado 37. Cuando v es muy

Librodot

pequeño, las ecuaciones (160) son iguales a (n), si se sustituye en este caso, qv, por q_0. Cuando v, es muy grande, la placa flexa según una superficie cilíndrica y las ecuaciones (160) toman la forma

$$(M_x)_{v=0} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$(M_y)_{v=0} = \frac{4\nu qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{2a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Pueden obtenerse los valores de los momentos flectores y de las flechas, para una placa finita, a partir de los valores correspondientes a una placa de longitud infinita, con ayuda del *metodo de imágenes* [1].

Empezaremos por el caso de una fuerza concentrada P aplicada sobre el eje de simetría x de la placa rectangular, de lados a y b [fig. 76 a)]. Se imagina ahora que la placa se prolonga en las direcciones positiva y negativa de y y que está sometida a una serie de fuerzas P aplicadas a lo largo de mn, situadas a una distancia b una de otra y dirigidas en sentidos contrarios [v. fig. 76 b)], las flechas de esta placa indefinida son evidentemente nulas a lo largo de las líneas A_1B_1, AB, CD, C_1D_1 ... . Los momentos flectores a

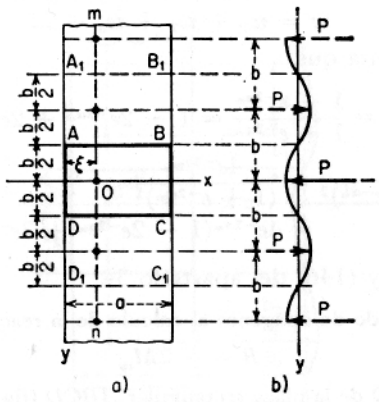


FIG. 76

lo largo de las mismas líneas son nulos, y se puede considerar la placa $ABCD$ como una porción de la placa de longitud infinita, cargada como indica la figura 76 b). Por consiguiente, la flecha y las tensiones producidas en la placa dada en el punto de aplicación O de la fuerza concentrada, se calculan mediante las fórmulas de las placas de longitud infinita. De (158)

[1] Este método fue utilizado por A. Nádai (véase *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922) y por M. T. Huber (véase *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 228, 1926).

Librodot

se deduce que la flecha en el eje x, de la placa de longitud infinita, producida por P, aplicada en O, es

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Dos fuerzas adyacentes P aplicadas a una distancia b de O [fig. 76 b)] producen en el eje x la flecha

$$w_2 = -\frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} (1 + 2\alpha_m) e^{-2\alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Las fuerzas P a una distancia $2b$ de O producen en el eje x la flecha

$$w_3 = \frac{Pa^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} (1 + 4\alpha_m) e^{-4\alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

y así sucesivamente. La flecha total del eje x es igual a la suma

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots \qquad (p)$$

Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{th} \alpha_m = \frac{1 - e^{-2\alpha_m}}{1 + e^{-2\alpha_m}} = 1 - 2e^{-2\alpha_m} + 2e^{-4\alpha_m} \cdots$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha_m} = \frac{4}{(e^{\alpha_m} + e^{-\alpha_m})^2} = \frac{4e^{-2\alpha_m}}{(1 + e^{-2\alpha_m})^2}$$
$$= 4e^{-2\alpha_m}(1 - 2e^{-2\alpha_m} + 3e^{-4\alpha_m} - 4e^{-6\alpha_m} + \cdots)$$

se hace coincidir (p) y (146) del apartado 34.

Apliquemos el método de imágenes al cálculo de la reacción

$$R = -2M_{xy}$$

que actúa en el vértice D de la placa rectangular $ABCD$ (fig. 76) y debida a una carga P aplicada en el centro de la placa. Utilizando (151) y (152), se encuentra que la expresión general del momento de torsión de una placa de longitud infinita, en el caso de una carga única, pasa a ser

$$M_{xy} = -\frac{1}{2}(1 - \nu) y \frac{\partial M}{\partial x}$$
$$= \frac{P(1 - \nu) y}{8a} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x - \xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x - \xi)}{a}} - \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(x + \xi)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi y}{a} - \cos \frac{\pi(x + \xi)}{a}} \right] \qquad (q)$$

Librodot

Por consiguiente, una carga P concentrada en el punto $x = \xi = a/2$, $y = 0$ produce en $x = 0$, el momento torsor

$$M_{xy} = -\frac{P(1-\nu)}{4a}\frac{y}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{a}} \qquad (r)$$

Poniendo, consecutivamente $y = b/2,\ 3b/2,\ 5b/2,\ \ldots$ se obtienen los momentos torsores producidos por las cargas $\pm P$ que actúan por encima de la línea DC. Sumando estos momentos se tiene

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{8a}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi b}{2a}} - \frac{3}{\operatorname{ch}\frac{3\pi b}{2a}} + \frac{5}{\operatorname{ch}\frac{5\pi b}{2a}} \cdots\right) \qquad (s)$$

Para tener en cuenta las cargas que actúan por debajo de DC, se debe doblar el efecto (s) de las cargas que actúan por encima de esta misma línea de modo que se obtenga el efecto de todas las cargas dadas. Así llegamos al resultado final:

$$M_{xy} = -\frac{Pb(1-\nu)}{4a}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}\frac{m}{\operatorname{ch}\frac{m\pi b}{2a}} \qquad (t)$$

En cuanto a la reacción que actúa hacia abajo en el punto D, e igualmente en los otros vértices de la placa se tiene $R = -2M_{xy}$, estando dado M_{xy} por (t).

Se puede utilizar también el método de imágenes, cuando el punto de aplicación de P no está sobre el eje de simetría [fig. 77 a)]. Las flechas y los momentos pueden

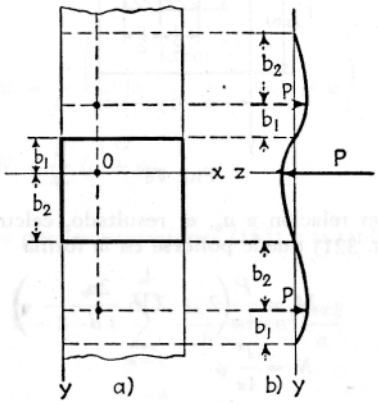


FIG. 77

calcularse introduciendo un sistema de fuerzas auxiliares que indica la figura y utilizando las fórmulas de una placa de longitud infinita. Si la carga está distribuida sobre un rectángulo deben utilizarse, para el cálculo de los momentos flectores debidos a las cargas existentes y a las cargas auxiliares las fórmulas (167) que se expondrán en el apartado 37.

Librodot

37. *Momentos flectores en placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a una carga uniformemente repartida en un rectángulo*

Consideremos una vez más el caso más importante en la práctica, de la carga representada en la figura 78. Si se procede como en el apartado 33, se encuentra que para pequeños valores de u/a y v/b, las series que dan los momentos flectores en el centro del área cargada convergen lentamente y no son útiles para cálculos numéricos.

Para obtener en este caso unas fórmulas[1] más adecuadas, introducimos en (119) las notaciones siguientes:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$N = \frac{M_x - M_y}{1 - \nu} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (161)$$

De donde

$$M_x = \tfrac{1}{2}(1 + \nu)M + \tfrac{1}{2}(1 - \nu)N$$
$$M_y = \tfrac{1}{2}(1 + \nu)M - \tfrac{1}{2}(1 - \nu)N \qquad (162)$$

Consideremos primero una *placa circular empotrada* de radio a_0, cargada en el centro como la figura 78. Los momentos de flexión en el centro de estas placas se obtienen con la ayuda de la fórmula de Michell, para una carga única excéntrica. Si

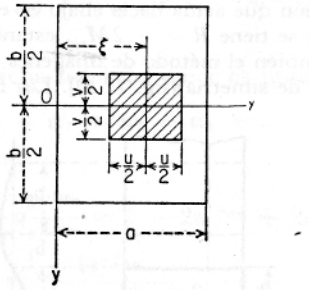


FIG. 78

u y v son pequeños con relación a a_0, el resultado, calculado por una integración apropiada de (197) (pág. 321) puede ponerse en la forma

$$M = \frac{P}{4\pi}\left(2 + 2\ln\frac{2a_0}{d} - \varphi\right)$$
$$N = \frac{P}{4\pi}\psi \qquad (a)$$

donde

$$\varphi = k\,\text{arctg}\,\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\,\text{arctg}\,k$$
$$\psi = k\,\text{arctg}\,\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\,\text{arctg}\,k \qquad (163)$$
$$k = \frac{v}{u} \quad \text{y} \quad d = \sqrt{u^2 + v^2}$$

[1] Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 331, 1953.

Librodot

Para una placa circular simplemente apoyada y del mismo radio a_0 se debe añadir a M_x y M_y, el término $P/4\pi$ (v. pág. 87), es decir, añadiendo $P/2\pi(1+\nu)$ a M y nada a N, de forma que los últimos valores toman la forma

$$M = \frac{P}{4\pi}\left(2 + 2\ln\frac{2a_0}{d} - \varphi\right) + \frac{P}{2\pi(1+\nu)}$$
$$N = \frac{P}{4\pi}\psi \qquad (b)$$

Finalmente, para obtener las expresiones correspondientes a una *franja infinita* (fig. 75), se debe hacer $a_0 = 2a/\pi$ sen $(\pi\xi/a)$ e introducir un momento adicional $M_y = -(1-\nu)P/4\pi$.

Esta última operación cambia M en $-(1-\nu)P/4\pi(1+\nu)$ y N en $+P/4\pi$.

Sustituyendo en (b), se llega al resultado siguiente:

$$M = \frac{P}{4\pi}\left(2\ln\frac{4a\,\text{sen}\,\frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + 3 - \varphi\right)$$
$$N = \frac{P}{4\pi}(1+\psi) \qquad (164)$$

Los valores φ y ψ, dependen de la relación v/u y se encuentran en la tabla 26.

Consideremos ahora, el caso de una *placa rectangular* (fig. 78), no debemos tomar en consideración más que la influencia de las cargas auxiliares[1] $\pm P$ (fig. 77), y sumarlas a los valores (164) de M y N.

El resultado final, para el caso de la figura 78, se puede escribir en la forma

$$M = \frac{P}{4\pi}\left(2\ln\frac{4a\,\text{sen}\,\frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi\right).$$
$$N = \frac{P}{4\pi}(\mu+\psi) \qquad (165)$$

donde φ, ψ, d, están dados por las expresiones (163) y la tabla 26, y:

$$\lambda = 3 - 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha_m}}{\text{ch}\,\alpha_m}\text{sen}^2\frac{m\pi\xi}{a}$$
$$\mu = 1 - \frac{2\pi b}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\text{ch}^2\,\alpha_m}\text{sen}^2\frac{m\pi\xi}{a} \qquad (166)$$

con $\alpha_m = m\pi b/2a$. Los términos λ y μ expresados por series rápidamente convergentes son independientes de las dimensiones u y v (y aun de la forma) del área cargada. La tabla 27 da los valores numéricos.

[1] Se pueden considerar como concentradas si u y v son pequeños.

Librodot

De las ecuaciones (162) se obtienen los valores de los momentos flectores que actúan en el centro del área cargada (fig. 78).

$$M_x = \frac{P}{8\pi}\left[\left(2\ \ln\frac{4a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi\right)(1+\nu) + (\mu+\psi)(1-\nu)\right]$$
$$M_y = \frac{P}{8\pi}\left[\left(2\ \ln\frac{4a\,\operatorname{sen}\frac{\pi\xi}{a}}{\pi d} + \lambda - \varphi\right)(1+\nu) - (\mu+\psi)(1-\nu)\right] \qquad (167)$$

Las expresiones (165) y(167) son también aplicables al cálculo de momentos de una franja infinita simplemente apoyada, como caso particular.

TABLA 26

Valores de los factores φ y ψ definidos por las ecuaciones (163)

$k = v/u$

k	φ	ψ	k	φ	ψ	k	φ	ψ
0,0	1,000	−1,000	1,0	1,571	0,000	2,5	1,427	0,475
0,05	1,075	−0,923	1,1	1,569	0,054	3,0	1,382	0,549
0,1	1,144	−0,850	1,2	1,564	0,104	4,0	1,311	0,648
0,2	1,262	−0,712	1,3	1,556	0,148	5,0	1,262	0,712
0,3	1,355	−0,588	1,4	1,547	0,189	6,0	1,225	0,757
0,4	1,427	−0,475	1,5	1,537	0,227	7,0	1,197	0,789
0,5	1,481	−0,374	1,6	1,526	0,261	8,0	1,176	0,814
0,6	1,519	−0,282	1,7	1,515	0,293	9,0	1,158	0,834
0,7	1,545	−0,200	1,8	1,504	0,322	10,0	1,144	0,850
0,8	1,560	−0,127	1,9	1,492	0,349	20,0	1,075	0,923
0,9	1,568	−0,060	2,0	1,481	0,374	∞	1,000	1,000

TABLA 27

Valores de los factores λ y μ (ec. 166) para placas rectangulares simplemente apoyadas

a/b	λ para $\xi/a =$					μ para $\xi/a =$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,5	2,792	2,352	1,945	1,686	1,599	0,557	−0,179	−0,647	−0,852	−0,906
0,6	2,861	2,545	2,227	2,011	1,936	0,677	0,053	−0,439	−0,701	−0,779
0,7	2,904	2,677	2,433	2,259	2,198	0,758	0,240	−0,229	−0,514	−0,605
0,8	2,933	2,768	2,584	2,448	2,399	0,814	0,391	−0,031	−0,310	−0,404
0,9	2,952	2,832	2,694	2,591	2,553	0,856	0,456	0,148	−0,108	−0,198
1,0	2,966	2,879	2,776	2,698	2,669	0,887	0,611	0,304	0,080	0,000
1,2	2,982	2,936	2,880	2,836	2,820	0,931	0,756	0,551	0,393	0,335
1,4	2,990	2,966	2,936	2,912	2,903	0,958	0,849	0,719	0,616	0,578
1,6	2,995	2,982	2,966	2,953	2,948	0,975	0,908	0,828	0,764	0,740
1,8	2,997	2,990	2,982	2,975	2,972	0,985	0,945	0,897	0,858	0,843
2,0	2,999	2,995	2,990	2,987	2,985	0,991	0,968	0,939	0,915	0,906
3,0	3,000	3,000	3,000	2,999	2,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,994
∞	3,000	3,000	3,000	3,000	3,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Librodot

Extendiendo la integración a las superficies circulares, elípticas y otras, se encuentran asimismo las expresiones de M y N para estas cargas. Tomemos, por ejemplo, un área circular cargada (fig. 79), se obtiene para su centro:

$$M = \frac{P}{4\pi}\left(2 \ln \frac{2a \operatorname{sen} \frac{\pi\xi}{a}}{\pi c} + \lambda - 2\right)$$
$$N = \frac{P}{4\pi}\mu \qquad (168)$$

estas expresiones son equivalentes a (157). Comparando (168) y (165) para $k = 1$, se llega a que las áreas cargadas circular y cuadrada producen el mismo momento flector en el centro, si

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}} e^{\pi/4-1} = 0{,}57u \quad \text{o} \quad u = 0{,}88 \times 2c \qquad (c)$$

Se observa que, a medida que la carga se concentra, la exactitud de las fórmulas logarítmicas aproximadas de los momentos flectores [ec. (157 y 167)], aumenta mientras que la convergencia de las series que dan ordinariamente estos momentos

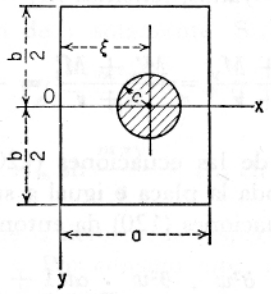


FIG. 79

se hace más lenta. Los cálculos numéricos[1] muestran también que la precisión de estas fórmulas aproximadas es ampliamente suficiente en la práctica.

38. *Tensiones térmicas en placas rectangulares simplemente apoyadas*

Supongamos que la cara superior de una placa rectangular está a una temperatura más alta que la cara inferior de manera que la placa tiene tendencia a curvarse hacia arriba a causa del calentamiento no uniforme. Debido a la coacción a lo largo de los bordes de la placa, simplemente apoyada, que les impide separarse del plano de los apoyos, el calentamiento no uniforme de la placa provoca ciertas reacciones en la longitud del contorno de ésta y ciertas tensiones de flexión a una distancia de los bordes.

[1] Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, pág. 340, 1932; e *Ingr.-Arch.*, vol. 21, páginas 336 y 337, 1953.

Librodot

Se utilizará el método descrito en el apartado 24 para calcular estas tensiones[1]. Supongamos primero que los bordes están empotrados. En este caso, el calentamiento no uniforme produce los momentos flectores uniformemente repartidos a lo largo del contorno y cuyo valor es (v. pág. 67)

$$M_n = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} \qquad (a)$$

donde t es la diferencia de temperatura entre las caras superior e inferior de la placa y α el coeficiente de dilatación térmica.

Para obtener los momentos flectores M_x y M_y de una placa simplemente apoyada (fig. 62), se deben superponer a los momentos uniformemente repartidos, dados por (a), los momentos producidos en una placa rectangular, simplemente apoyada, debidos a $M'_n = -\alpha t D(1+\nu)/h$ uniformemente repartidos a lo largo de los bordes. Se utilizará (120) para estudiar este último problema.

Puesto que la curvatura en dirección de un borde es nula en el caso de extremos simplemente apoyados, tenemos $M'_t = \nu M'_n$. Por consiguiente en el contorno

$$M = \frac{M_x + M_y}{1+\nu} = \frac{M'_n + M'_t}{1+\nu} = -\frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} \qquad (b)$$

Entonces la primera de las ecuaciones (120) se cumple tomando M constante a lo largo de toda la placa e igual a su valor en el contorno (b).

La segunda de las ecuaciones (120) da entonces

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\alpha t(1+\nu)}{h} \qquad (c)$$

Por consiguiente, la deformada debida a un calentamiento no uniforme es la misma que la de una membrana rectangular uniformemente tensada y uniformemente cargada, y se obtiene hallando la solución (c) que cumple la condición $w = 0$ en el contorno.

Operando, como antes se escribe, la superficie flexada de la forma

$$w = w_1 + w_2 \qquad (d)$$

en la que w_1 es la flecha de una cuerda perfectamente flexible cargada uniformemente y estirada axialmente de tal manera que la intensidad de la carga dividida por la fuerza axial es igual a $-\alpha t(1+\nu)h$.

[1] Véase la memoria de J. L. Maulbetsch, *J. Appl. Mechanics*, vol. 2, pág. 141, 1935; véase también E. Melan y H. Parkus, *Warmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Viena, 1953, que incluye bibliografía sobre tensiones térmicas. Respecto a tensiones debidas a errores de montaje de placas, véase W. Nowacki, *Bull. acad. polon. sci.*, vol. 4, pág. 79, 1956.

Librodot

En este caso, la deformada es una parábola que puede representarse en forma de una serie trigonometrica

$$w_1 = -\frac{\alpha t(1+\nu)}{h}\frac{x(a-x)}{2}$$

$$= -\frac{\alpha t(1+\nu)}{h}\frac{4a^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}}{m^3} \qquad (e)$$

Esta expresión satisface a (c). La flecha w_2 que debe cumplir

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \qquad (f)$$

puede escribirse de la forma

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

donde Y_m es una función de y solamente. Sustituyendo (g) en (f), se encuentra

$$Y_m'' - \frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m = 0$$

Entonces

$$Y_m = A_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} \qquad (h)$$

A causa de la simetría de la deformada respecto al eje x, se llega a que Y_m es una función par de y. Por consiguiente, la constante A_m en (h) es igual a cero y se obtiene finalmente

$$w = w_1 + w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left[-\frac{\alpha t(1+\nu)}{h}\frac{4a^2}{\pi^3 m^3} + B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right] \qquad (i)$$

Esta expresión satisface las condiciones de contorno $w = 0$, en los bordes $x = 0$ y $x = a$. Para cumplir la misma condición en los bordes $y = \pm b/2$ es preciso que

$$B_m \operatorname{ch}\frac{m\pi b}{2a} - \frac{\alpha t(1+\nu)}{h}\frac{4a^2}{\pi^3 m^3} = 0$$

Sustituyendo en (i) B_m por su valor, deducido de esta ecuación, se encuentra

$$w = -\frac{\alpha t(1+\nu)4a^2}{\pi^3 h}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}}{m^3}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\alpha_m}\right) \qquad (j)$$

en la que, como antes $\alpha_m = m\pi b/2a$.

Librodot

Con ayuda de esta expresión w de las flechas, se encuentran los valores correspondientes de los momentos flectores y, combinándolos con (a), se encuentra finalmente:

$$M_x = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$= \frac{4D\alpha t(1-\nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m}$$
$$M_y = \frac{\alpha t D(1+\nu)}{h} - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (k)$$
$$= \frac{\alpha t(1-\nu^2)D}{h} - \frac{4D\alpha t(1-\nu^2)}{\pi h} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m}$$

La suma de la serie que aparece en estas expresiones se obtiene fácilmente si se escribe de la forma siguiente:

$$\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m}$$
$$= \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}}{m \operatorname{ch} \alpha_m} - \frac{e^{m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha_m}} \right)$$
$$+ \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{e^{m\pi y/a}}{m e^{\alpha_m}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (l)$$

La primera serie del segundo miembro de esta ecuación converge rápidamente puesto que ch $(m\pi y/a)$ y α_m tienden rápidamente hacia $e^{m\pi y/a}$ y $e^{\alpha m}$ cuando m aumenta. La segunda serie se escribe[1]:

$$\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{e^{m\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m e^{\alpha_m}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh} \left(\frac{\pi b}{2a} - \frac{\pi y}{a} \right)} \qquad (m)$$

[1] Véase W. E. Byerly, *Elementary Treatise on Fourier Series and Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics*, pág. 100, Boston, 1893. El resultado puede obtenerse fácilmente mediante la conocida serie

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \operatorname{sen} \varphi}{1-x^2} = x \operatorname{sen} \varphi + \frac{x^3}{3} \operatorname{sen} 3\varphi + \frac{x^5}{5} \operatorname{sen} 5\varphi + \cdots$$

Librodot

Los momentos flectores M_y y M_x son máximos en el contorno. Estos valores máximos son:

$$(M_x)_{y=\pm b/2} = (M_y)_{x=0,x=a} = \frac{\alpha t(1-\nu^2)D}{h} = Eh^2\frac{\alpha t}{12} \qquad (n)$$

Se ve que estos momentos se obtienen multiplicando el valor de M_n en (a) por $(1-\nu)$. Se llega a la misma conclusión si se señala que los momentos M_n' que estaban aplicados a lo largo del contorno crean en la dirección perpendicular los momentos

$$M_t' = \nu M_n' = -\nu\frac{\alpha t D(1+\nu)}{h}$$

que superpuestos al momento (a) dan el valor (n).

39. *Influencia de las deformaciones por esfuerzos cortantes en la flexión de las placas delgadas*

Se ha visto que la teoría habitual de las placas delgadas elásticas, conduce a una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden (103) para la flecha y, por consiguiente, a dos condiciones de contorno que pueden y deben cumplirse en cada borde.

Para una placa de espesor finito, parece natural exigir que se cumplan tres condiciones de contorno mejor que dos. La razón formal que impide satisfacer más de dos condiciones, por la teoría habitual, proviene del orden de la ecuación básica de esta teoría; físicamente esta razón proviene del hecho de que la distorsión de los elementos de la placa, debida a los esfuerzos cortantes Q (pág. 71), Q_x y Q_y (pág. 99), ha sido despreciada al establecer las relaciones entre las tensiones y la flecha de la placa. Esta omisión de la deformación provocada por la componente de la tensión tangencial equivale, evidentemente, a hacer tender a infinito el módulo de elasticidad transversal G_z.

Aceptando esta hipótesis, se sustituye el material real de la placa, supuesta isótropa, por un material no perfectamente isótropo. Puesto que se ha supuesto $G_z = \infty$, la placa no responderá a la acción de un par aplicado en su superficie cilíndrica, si el vector del par coincide con la normal a esta superficie. Esto nos permite identificar la variación $\partial M_{xy}/\partial y$ de los pares de torsion debidos a las tensiones tangenciales horizontales que actúan a lo largo de un borde $x = a$ con el efecto de las fuerzas verticales Q_x aplicadas en el mismo borde lo que reduce de tres a dos el número de las condiciones de borde (v. pág. 102). El análisis de las tensiones de las placas elásticas se simplifica enormemente con esta reducción. Por otra parte, atribuyendo propiedades puramente hipotéticas al material de una placa, no se puede esperar una identificación total de la distribución de tensiones teórica con la distribución real. La inexactitud de la teoría habi-

Librodot

tual de las placas delgadas es de interés práctico en las zonas periféricas de las placas y alrededor de agujeros que tienen un diámetro no muy grande en comparación con el espesor de la placa.

La generalización de la teoría ordinaria en función de la influencia de las deformaciones de los esfuerzos cortantes se debe a E. Reisner[1].

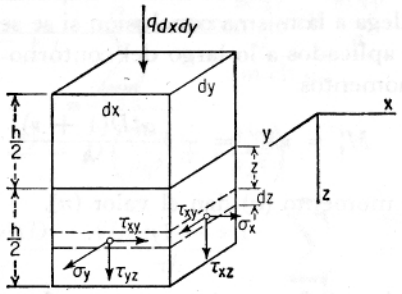


FIG. 80

Consideremos un elemento de placa sometido a una carga transversal externa $q\,dx\,dy$ y a un sistema de tensiones (fig. 80). Según la teoría de E. Reisner se supone una ley lineal para la distribución de las tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy} a través del espesor de la placa. Por las ecuaciones de equilibrio (a) de la página 119, la distribución de las componentes τ_{xz} y τ_{yz} sigue una ley parabólica. Como para la tensión σ_z se obtiene fácilmente por la tercera de las ecuaciones de equilibrio (a), si se tienen en cuenta las condiciones

$$(\sigma_z)_{z=-h/2} = -q \qquad (\sigma_z)_{z=h/2} = 0$$

sobre las caras superior e inferior de la placa, se llega, de esta forma, para las componentes de la tensión en función de sus resultantes y de z, a las expresiones siguientes

$$\sigma_x = \frac{12M_x z}{h^3} \qquad \sigma_y = \frac{12M_y z}{h^3} \qquad \tau_{xy} = -\frac{12M_{xy} z}{h^3}$$

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] \qquad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right] \tag{a}$$

$$\sigma_z = -\frac{3q}{4}\left[\frac{2}{3} - \frac{2z}{h} + \frac{1}{3}\left(\frac{2z}{h}\right)^3\right] \tag{b}$$

Excepto (b) el sistema anterior de ecuaciones es igual a las expresiones correspondientes de la teoría habitual. De la misma manera se pueden

[1] Véase *J. Math. and Phys.*, vol. 23, pág. 184, 1944; *J. Appl. Mechanics*, vol. 12, pág. A-68, 1945; *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, pág. 55, 1947. Para estudiar la historia de este problema retrocediendo a la controversia entre M. Lévy y Boussinesq, véase L. Bolle, *Bull. tech. Suisse romande*, octubre 1947.

Librodot

escribir las condiciones de equilibrio de las resultantes de la tensión (v. págs. 99 y 100):

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \tag{c}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0$$
$$\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \tag{d}$$

Suponiendo un material isótropo y los desplazamientos u_0, v_0, w_0 pequeños con relación al espesor h, en todo punto de la placa, se pueden utilizar las relaciones generales entre tensiones y deformaciones

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\frac{\partial v_0}{\partial y} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \tag{e}$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$
$$\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

donde $G = E/2(1 + \nu)$. No se utiliza la sexta relación

$$\frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

por estar en contradicción con la hipótesis de la ley lineal para la distribución de tensiones σ_x, σ_y, τ_{xy} junto a ello introducimos[1] un valor medio w del desplazamiento transversal, a través del espesor de la placa, así como algunos valores medios φ_x y φ_y del giro de las secciones x = constantes e y = constante. Se definen estas cantidades igualando el trabajo de los pares resultantes al producir los giros medios y el trabajo de las fuerzas resultantes al producir los desplazamientos medios al trabajo de las tensiones correspondientes al efectuar los desplazamientos reales u_0, v_0 y w_0 en la misma sección; es decir, haciendo

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x u_0\, dz = M_x\varphi_x \qquad -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} v_0\, dz = M_{xy}\varphi_y$$
$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y v_0\, dz = M_y\varphi_y \qquad -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} u_0\, dz = M_{xy}\varphi_x \tag{f}$$
$$\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} w_0\, dz = Q_x w \qquad \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} w_0\, dz = Q_y w$$

[1] E. Reissner, en un tratado sobre esto, utiliza el principio de mínimo trabajo de Castigliano, para introducir las condiciones de compatibilidad en el análisis. El método desarrollado aquí conduce al mismo resultado y es debido a A. E. Green, *Quart. Appl. Math.*, vol. 7, página 223, 1949; véase también M. Schäfer, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 161, 1952.

Librodot

Sustituyendo las tensiones (a) en (f), se obtienen las relaciones siguientes entre los desplazamientos medios y reales

$$w = \frac{3}{2h}\int_{-h/2}^{h/2} w_0\left[1-\left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]dz$$
$$\varphi_x = \frac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{u_0 z}{h}\,dz \qquad (g)$$
$$\varphi_y = \frac{12}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{v_0 z}{h}\,dz$$

Utilizando (e) y teniendo en cuenta (b), se pueden también expresar las componentes σ_x, σ_y y τ_{xy} en función de los desplazamientos reales, se tiene[1]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}+\nu\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)-\frac{3q\nu}{4(1-\nu)}\left[\frac{2}{3}-\frac{2z}{h}+\frac{1}{3}\left(\frac{2z}{h}\right)^3\right]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial y}+\nu\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)-\frac{3q\nu}{4(1-\nu)}\left[\frac{2}{3}-\frac{2z}{h}+\frac{1}{3}\left(\frac{2z}{h}\right)^3\right] \qquad (h)$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)$$

Sustituyendo estos valores en (a) y, multiplicando las ecuaciones obtenidas por $12z\,dz/h^3$, integrando entre $z = -h/2$ y $z = h/2$, y teniendo en cuenta (g), se obtienen las expresiones

$$M_x = D\left[\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh}q\right]$$
$$M_y = D\left[\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\nu\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\frac{6\nu(1+\nu)}{5Eh}q\right] \qquad (i)$$
$$M_{xy} = -\frac{D(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right)$$

en las que D está definido por la ecuación (3). De la misma manera, sustituyendo τ_{xz} y τ_{yz} por sus expresiones (a) en las dos últimas ecuaciones (e), multiplicando el resultado por $3/2[1-(2z/h)^2]dz/h$ e integrando entre los límites $z = \pm h/2$, se obtiene:

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{12}{5}\frac{1+\nu}{Eh}Q_x$$
$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{12}{5}\frac{1+\nu}{Eh}Q_y \qquad (j)$$

[1] Los términos en z^3 no aparecerán en las expresiones siguientes de σ_x y σ_y puesto que se anulan con términos iguales, con signos opuestos, contenidos en $\partial u_0/\partial x$ y $\partial v_0/\partial y$.

Librodot

Ahora, ocho valores desconocidos, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y, w, φ_x y φ_y están relacionados por las dos ecuaciones (j), las tres ecuaciones (i) y, finalmente, las tres ecuaciones de equilibrio (c) y (d).

Para simplificar este sistema de ecuaciones en uno más conveniente, se eliminan φ_x y φ_y entre las ecuaciones (j) e (i), teniendo en cuenta (c), se obtiene:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{h^2}{5}\frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{qh^2}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \qquad (k)$$

$$M_{xy} = (1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - \frac{h^2}{10}\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)$$

La sustitución de estas ecuaciones en (d) da, si se tiene en cuenta (c), el siguiente resultado

$$\begin{aligned} Q_x - \frac{h^2}{10}\Delta Q_x &= -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial x} \\ Q_y - \frac{h^2}{10}\Delta Q_y &= -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \qquad (l)$$

donde Δ tiene la misma significación de la expresión (105). En el caso particular que $h = 0$, es decir, para una placa infinitamente delgada, el sistema de cinco ecuaciones (k) y (l) da (101) y (102) para los momentos y las ecuaciones (108) para los esfuerzos cortantes todas ellas de la teoría ordinaria de placas delgadas.

Para obtener la ecuación diferencial más completa de las flechas de una placa, basta sustituir (e) en (c), así se obtiene

$$D\Delta\Delta w = q - \frac{h^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta q \qquad (169)$$

Esta ecuación se cumple si se toma w, «flecha media», en el punto (x, y), en la forma

$$w = w' + w'' \qquad (m)$$

donde w' es una solución particular de la ecuación

$$D\Delta\Delta w' = q - \frac{h^2}{10}\frac{2-\nu}{1-\nu}\Delta q \qquad (n)$$

y w'' la solución general de la ecuación

$$\Delta\Delta w'' = 0 \qquad (o)$$

Además utilizando (169), podemos hacer que como en la teoría ordinaria de placas delgadas, se satisfagan siempre las cuatro condiciones de

Librodot

contorno. Se puede obtener una ecuación diferencial suplementaria, teniendo en cuenta los esfuerzos cortantes Q_x y Q_y. La ecuación de equilibrio (c) se cumple, si se expresan estos esfuerzos de la misma forma que las ecuaciones (l):

$$Q_x = -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$Q_y = -D\frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (p)$$

o bien

$$Q_x = Q_x' - D\frac{\partial(\Delta w'')}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$Q_y = Q_y' - D\frac{\partial(\Delta w'')}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (q)$$

En estas expresiones ψ representa una nueva función de tensión, mientras que Q_x' y Q_y' satisfacen las relaciones

$$Q_x' - \frac{h^2}{10}\Delta Q_x' = -D\frac{\partial(\Delta w')}{\partial x} - \frac{h^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial x}$$
$$Q_y' - \frac{h^2}{10}\Delta Q_y' = -D\frac{\partial(\Delta w')}{\partial y} - \frac{h^2}{10(1-\nu)}\frac{\partial q}{\partial y} \qquad (r)$$

como puede deducirse de las ecuaciones (l) y (n). Derivando las ecuaciones anteriores, respectivamente respecto a x y a y y sumando los resultados, se llega a la condición de equilibrio

$$\frac{\partial Q_x'}{\partial x} + \frac{\partial Q_y'}{\partial y} + q = 0 \qquad (s)$$

Para establecer una ecuación diferencial para la función de tensión ψ se sustituyen las ecuaciones (q) en (l) de donde

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi - \frac{h^2}{10}\Delta\psi\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi - \frac{h^2}{10}\Delta\psi\right) = 0 \qquad (t)$$

de donde se deduce que las expresiones entre paréntesis son constantes. Igualando estas constantes a cero, obtenemos la relación

$$\Delta\psi - \frac{10}{h^2}\psi = 0 \qquad (170)$$

que aún si se supone $h \neq 0$ da una segunda ecuación fundamental de la teoría generalizada de la flexión, junto con (169).

Habiendo establecido dos ecuaciones diferenciales, una de las cuales es de cuarto orden y otra de segundo, se pueden ahora satisfacer tres condiciones, en lugar de dos, en el contorno de la placa. Considerando el caso general de un elemento, del contorno cilíndrico de la placa, dado por las

Librodot

direcciones de la normal n y de la tangente t (fig. 54), se puede, por ejemplo, situar la posición del elemento por las ecuaciones

$$w = \bar{w} \qquad \varphi_n = \bar{\varphi}_n \qquad \varphi_t = \bar{\varphi}_t \tag{u}$$

Donde $\bar{w}$ es la flecha media dada, y $\bar{\varphi}_n$ y $\bar{\varphi}_t$ son los giros medios del elemento con respecto a los ejes t y n respectivamente. En el caso particular de un borde empotrado, las condiciones deberán ser $w = 0$, $\varphi_n = 0$ y $\varphi_t = 0$.

En lugar de los desplazamientos puede imponerse en el contorno algunos valores $\bar{Q}_n$ $\bar{M}_n$ $\bar{M}_{nt}$ de las resultantes, y las condiciones en los bordes son:

$$Q_n = \bar{Q}_n \qquad M_n = \bar{M}_n \qquad M_{nt} = \bar{M}_{nt} \tag{v}$$

Por consiguiente, las condiciones a lo largo de un borde libre se expresan por las ecuaciones $Q_n = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$ y para un borde simplemente apoyado, $w = 0$, $M_n = 0$, $M_{nt} = 0$. En este último caso, no se producen las reacciones concentradas en las esquinas de la placa que actúan según la teoría ordinaria y están en contradicción evidentemente con la omisión de la deformación debida a los esfuerzos cortantes postulada en esta teoría.

Para ilustrar la teoría simplificada, consideremos una placa rectangular semiinfinita limitada por dos bordes paralelos $y = 0$, $y = a$ y por el borde $x = 0$. Supongamos que la placa no está solicitada por ninguna carga, que las flechas w y los momentos flectores M_y son nulos en los bordes $y = 0$, $y = a$, y que el borde $x = 0$ está sometido a momentos flectores y torsores así como a esfuerzos cortantes dados por

$$\bar{M}_x = M_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

$$\bar{M}_{xy} = H_0 \cos \frac{n\pi y}{a} \tag{w}$$

$$\bar{Q}_x = Q_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a}$$

donde M_0, H_0, Q_0 son constantes y n es un número entero. Entonces, como $q = 0$, tenemos $w' = 0$ según la ecuación (n) y $w = w''$ según (m). Se satisfacen la ecuación (o) y la condición de flechas nulas en $x = \infty$, haciendo

$$w = w'' = \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{a} \left(A + \frac{n\pi x}{a} B \right) \frac{e^{-n\pi x/a}}{D}$$

Siendo A y B constantes cualesquiera. Supongamos que ψ tiene la forma

$$\psi = X \cos \frac{n\pi y}{a}$$

donde X es una función sólo de x, y sustituyendo en (170), se tiene

$$\psi = Ce^{-x\beta} \cos \frac{n\pi y}{a}$$

Librodot

Siendo en esta última expresión

$$\beta = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{10}{h^2}}$$

y C una constante. Por las ecuaciones (r), tenemos $Q_x' = Q_y' = 0$ y las ecuaciones (q) dan

$$Q_x = -\left[2B\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 e^{-n\pi x/a} + C\frac{n\pi}{a}e^{-x\beta}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{a}$$

$$Q_y = \left[2B\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 e^{-n\pi x/a} + C\beta e^{-x\beta}\right]\cos\frac{n\pi y}{a}$$

Finalmente, las ecuaciones (k) dan las siguientes expresiones para los momentos que actúan a lo largo del borde $x = 0$,

$$(M_x)_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + 2B\left(1 + \frac{n^2\pi^2h^2}{5a^2}\right) + C\frac{\beta a h^2}{5n\pi}\right]\frac{n^2\pi^2}{a^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{a}$$

$$(M_{xy})_{x=0} = \left[-A(1-\nu) + B\left(1 - \nu + \frac{2}{5}\frac{n^2\pi^2h^2}{a^2}\right) + C\left(\frac{a^2}{n^2\pi^2} + \frac{h^2}{5}\right)\right]\frac{n^2\pi^2}{a^2}\cos\frac{n\pi y}{a}$$

Igualando estas expresiones, así como la expresión de los esfuerzos cortantes

$$(Q_x)_{x=0} = -\left[2B\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 + C\frac{n\pi}{a}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{a}$$

a las respectivas ecuaciones (w), obtendremos un sistema de tres ecuaciones que nos permiten calcular las constantes desconocidas A, B y C. De este modo, utilizando la teoría simplificada de las placas, nos consta que las tres condiciones en el borde $x = 0$, se cumplen.

Considerando ahora el borde $y = 0$, se ve que w se anula a lo largo de los bordes así como M_y como puede probarse sustituyendo el valor de Q_y en la segunda de las ecuaciones (k).

Otra teoría de las placas que toma en consideración la deformación debida al esfuerzo cortante transversal ha sido adelantada por A. Kromm[1]. Esta teoría no tiene en cuenta la contracción transversal ϵ_z, pero en cambio no restringe a una ley lineal,

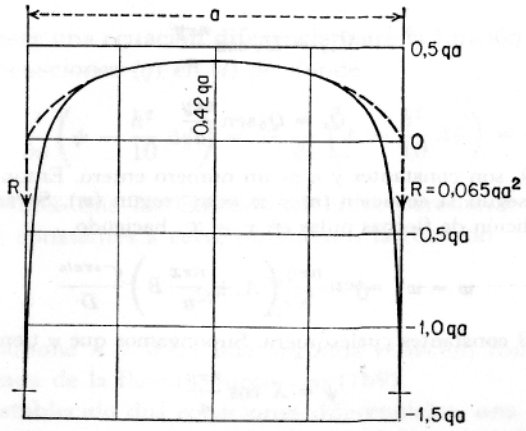


FIG. 81

[1] A. Kromm, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 266, 1953; *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 35, pág. 231, 1955.

Librodot

la distribución de las tensiones de flexión a través del espesor de la placa. Aplicando esta teoría al caso de una placa cuadrada con $a/h = 20$, uniformemente apoyada, Kromm encuentra para los esfuerzos cortantes a lo largo del borde la distribución que indica la figura 81. Como comparación se indican los resultados de la teoría ordinaria (fig. 63) con las líneas de trazos y las fuerzas R. Se ve que al considerar la deformación transversal debida al esfuerzo cortante, no hay reacción concentrada en el vértice de la placa. Las fuerzas negativas correspondientes están repartidas en una pequeña porción de los límites próxima a la esquina y no ejercen sobre éste más que una presión finita que actúa hacia abajo. Los momentos M_{xy} sobre los cuatro bordes de la placa son nulos en este caso. Puede hallarse aún otra teoría aproximada de la deformación debida al esfuerzo cortante en una memoria de H. Hencky[1].

40. Placas rectangulares de espesor variable[2]

En la obtención de las ecuaciones diferenciales del equilibrio de las placas, de espesor variable, se supone que no hay variación brusca del espesor, de modo que las expresiones de los momentos flectores y torsores calculados para las placas de espesor constante, son válidos con suficiente aproximación también en este caso.

Entonces

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$M_{xy} = -M_{yx} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{a}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación del equilibrio de un elemento [ec. (100), pág. 100]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q \tag{b}$$

y teniendo en cuenta que la rigidez a flexión ya no es constante sino que varía en función de x e y, se tiene

$$D\Delta\Delta w + 2\frac{\partial D}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w + 2\frac{\partial D}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w + \Delta D\,\Delta w - (1-\nu)\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = q \tag{171}$$

donde como anteriormente, se emplea la notación

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Consideremos como ejemplo particular de aplicación de (171) el caso en que la rigidez a la flexión D, es una función lineal de y, expresada de la forma

$$D = D_0 + D_1 y \tag{c}$$

donde D_0 y D_1 son constantes. En este caso (171), toma la forma

$$(D_0 + D_1 y)\Delta\Delta w + 2D_1\frac{\partial}{\partial y}\Delta w = q$$

o bien

$$\Delta[(D_0 + D_1 y)\,\Delta w] = q \tag{172}$$

[1] *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 72, 1947.

[2] Este problema fue estudiado por R. Gran Olsson, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 363, 1934; véase también E. Reissner, *J. Math. and Phys.*, vol. 16, pág. 43, 1937.

Librodot

Consideremos el caso en el que la intensidad de la carga q es proporcional a D. Tomaremos la flecha de la placa (fig. 82) de la forma:

$$w = w_1 + w_2$$

y sea w_1 igual a la flecha de una franja separada de la placa paralela al eje x y soportando una carga de intensidad

$$q = q_0\left(1 + \frac{D_1}{D_0}y\right) \tag{d}$$

Se puede representar esta flecha por una serie trigonométrica

$$w_1 = \frac{4q_0\left(1 + \frac{D_1}{D_0}y\right)a^4}{(D_0 + D_1 y)\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} = \frac{4q_0a^4}{\pi^5 D_0} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{e}$$

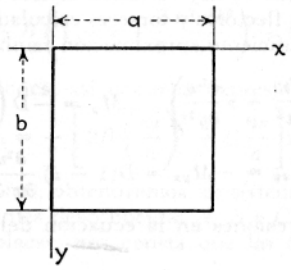


FIG. 82

Se ve asimismo, por sustitución, que esta expresión de w_1 satisface a la ecuación (172). Satisface también las condiciones de contorno $w_1 = 0$ y $\partial^2 w_1/\partial x^2 = 0$ a lo largo de los bordes apoyados $x = 0$ y $x = a$.

La flecha w_2 cumple entonces la ecuación homogénea

$$\Delta[(D_0 + D_1 y)\,\Delta w_2] = 0 \tag{f}$$

Poniendo w_2 en forma de serie

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{g}$$

Sustituyendo esta serie en (f), se encuentra que las funciones Y_m satisfacen a la ecuación diferencial ordinaria:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\left[(D_0 + D_1 y)\left(Y_m'' - \frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m\right)\right] = 0 \tag{h}$$

Utilizando la notación

$$f_m = (D_0 + D_1 y)\left(Y_m'' - \frac{m^2\pi^2}{a^2}Y_m\right) \qquad \frac{m\pi}{a} = \alpha_m \tag{i}$$

se deduce de (h) que

$$f_m = A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}$$

Entonces de (i) se deduce

$$Y_m'' - \alpha_m^2 Y_m = \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{D_0 + D_1 y} \tag{j}$$

Librodot

La solución general de esta ecuación es

$$Y_m = C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y} + g_m \qquad (k)$$

donde g_m es una integral particular de (j). Para calcularla se utiliza el método de Lagrange de variación de constantes, se supone que g_m es de la forma

$$g_m = E_m e^{\alpha_m y} + F_m e^{-\alpha_m y} \qquad (l)$$

donde E_m y F_m son funciones de y.

Se las puede hallar con ayuda de las siguientes ecuaciones[1]:

$$E'_m e^{\alpha_m y} + F'_m e^{-\alpha_m y} = 0$$

$$E'_m e^{\alpha_m y} - F'_m e^{-\alpha_m y} = \frac{A_m e^{\alpha_m y} + B_m e^{-\alpha_m y}}{\alpha_m (D_0 + D_1 y)}$$

de donde se deduce

$$E'_m = \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}$$

$$F'_m = -\frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}$$

Integrando estas ecuaciones, se tiene:

$$E_m = \int \frac{A_m + B_m e^{-2\alpha_m y}}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}\, dy = \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) + \frac{B_m}{2\alpha_m D_1} e^{\frac{2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{\frac{-2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}$$

$$F_m = -\int \frac{A_m e^{2\alpha_m y} + B_m}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}\, dy = -\frac{B_m}{2\alpha_m D_1} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - \frac{A_m}{2\alpha_m D_1} e^{\frac{-2\alpha_m D_0}{D_1}} \int \frac{e^{\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1}} d[2\alpha_m (D_0 + D_1 y)]}{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}$$

Sustituyendo estas expresiones en (l) y (k) y utilizando la notación[2]

$$E_i(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{e^u}{u}\, du \qquad E_i(-u) = \int_{\infty}^{u} \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

se representa y_m de la forma siguiente

$$Y_m = A'_m \left\{ \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - e^{\frac{-2\alpha_m}{D_1}(D_0 + D_1 y)} E_i \left[\frac{2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{\alpha_m y} - B'_m \left\{ e^{\frac{-2\alpha_m}{D_1}(D_0 + D_1 y)} \ln \frac{2\alpha_m}{D_1} (D_0 + D_1 y) - E_i \left[\frac{-2\alpha_m (D_0 + D_1 y)}{D_1} \right] \right\} e^{\alpha_m y} + C_m e^{\alpha_m y} + D_m e^{-\alpha_m y} \qquad (m)$$

[1] E'_m y F'_m son derivadas con relación a y de E_m y F_m.

[2] La integral $E_i(u)$ es la llamada *integral exponencial* y es una función tabulada; véase, por ejemplo, Jahnke-Emde, *Tables of Functions*, 4.ª ed., págs. 1 y 6, Dover Publications, 1945, o bien *Tables of Sine, Cosine and Exponential Integrals*, National Bureau of Standards, Nueva York, 1940.

Librodot

Las cuatro constantes de integración A'_m, B'_m, C_m, D_m se obtienen por las condiciones de contorno a lo largo de los bordes $y = 0$ e $y = b$. En el caso de bordes simplemente apoyados, estas condiciones son

$$(w)_{y=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0$$

$$(w)_{y=b} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b} = 0$$

La figura 83 indica los resultados numéricos para una placa cuadrada simplemente apoyada tomando solamente los dos primeros términos de la serie (g)[1]. Las flechas y los momentos M_x y M_y a lo largo de $x = a/2$ para una placa de espesor variable, están indicados por las líneas continuas, las de trazos indican los mismos valores calculados para una placa de rigidez a flexión constante $D = 1/2(D_0 + D_1 b)$. En el cálculo se ha supuesto que $D_1 b = 7D_0$ y $\nu = 0{,}16$.

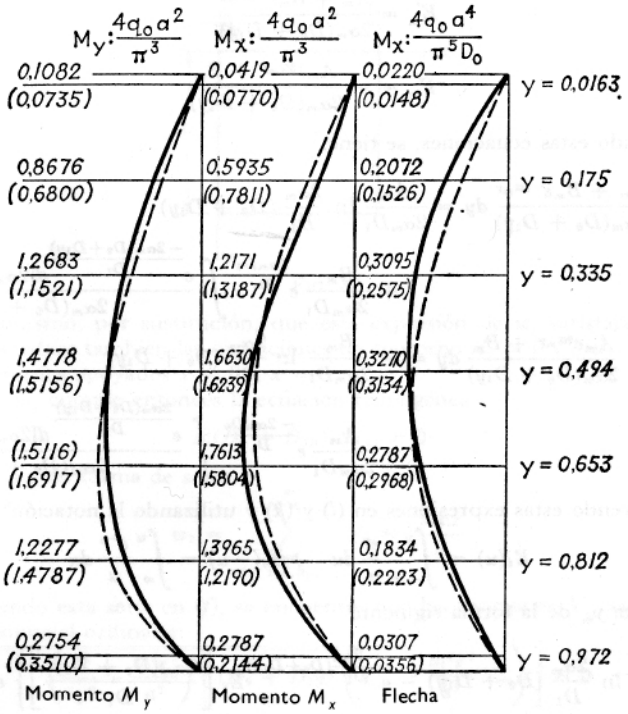


FIG. 83

Finalmente, consideremos el caso en el que el espesor de la placa es una función lineal sólo de y y la intensidad de la carga es una función cualquiera de y (fig. 82). Llamando h_0 al espesor de la placa a lo largo de $y = b/2$, la rigidez a la flexión correspondiente será

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1 - \nu^2)} \qquad (n)$$

[1] Estos resultados han sido tomados de R. Gran Olsson, *op. cit.*

Librodot

en todo punto de la placa será

$$D = D_0 \frac{h^3}{h_0^3} \qquad \text{y} \qquad h = \left[1 + \lambda\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\right] h_0 \tag{o}$$

donde λ es una constante cualquiera. De aquí se deduce $h = (1 - \lambda)h_0$ para $y = 0$ y $h = (1 + \lambda)h_0$ para $y = b$.

El método[1] siguiente consistente en introducir λ como parámetro, es el más eficaz para resolver este problema. Considerando la flecha w como función de las variables x, y y λ puede ponerse $w(x,y,\lambda)$ en forma de serie potencial

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \lambda^m \tag{p}$$

donde m es un número entero y los coeficientes w_m son funciones de x e y.

Sustituyendo (o) y (p) en (171) y anulando los coeficientes de las potencias sucesivas de λ, se obtiene una serie de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta w_0 &= \frac{q}{D_0} \\
\Delta\Delta w_1 &= -3\left[\frac{4}{b}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\Delta\Delta w_0\right] \\
\Delta\Delta w_2 &= -3\left[\frac{4}{b}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_1 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)\Delta\Delta w_1\right] \\
&\quad -3\left\{\frac{8}{b^2}\left[\Delta w_0 - (1 - \nu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{b}\left(\frac{2y}{b} - 1\right)\frac{\partial}{\partial y}\Delta w_0 + \left(\frac{2y}{b} - 1\right)^2 \Delta\Delta w_0\right\} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{q}$$

Se suponen los bordes $x = 0$ y $x = a$ simplemente apoyados, y reduciremos el problema al caso de una carga hidrostática

$$q = \frac{q_0 y}{b} \tag{r}$$

Utilizando el método de M. Lévy, se expresa la solución de las ecuaciones (q) en la forma

$$w_0 = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} Y_{on} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \tag{s}$$

$$w_1 = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} Y_{1n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \cdots \tag{t}$$

$$w_m = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} Y_{mn} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \tag{u}$$

[1] Véase H. Favre y B. Gilg, *Z. angew. Math. u. Phys.*, vol. 3, pág. 354, 1952.

Librodot

siendo los coeficientes $Y_{mn}(m = 0, 1, 2, \ldots)$ funciones de y. Se puede, finalmente, representar la carga (r) de una forma análoga, haciendo

$$q = \frac{4q_0 y}{\pi b} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \qquad (v)$$

La sustitución de las expresiones (s) y (v) en la primera de las ecuaciones (q) nos permite determinar las funciones Y_{on}, siendo las condiciones de contorno $Y_{on} = 0$, $Y''_{on} = 0$ para $y = 0$ e $y = b$, si los bordes están simplemente apoyados. La sustitución de las expresiones (s) y (t) en la segunda de las ecuaciones (q) da la función Y_{1n}. De forma análoga se encuentra cualquier función w_m sustituyendo w_0, w_1, ..., w_{m-1} en la ecuación del sistema (q) que contiene w_m en el primer miembro. El procedimiento es el mismo si los bordes $y = 0$, b están empotrados o libres en lugar de simplemente apoyados.

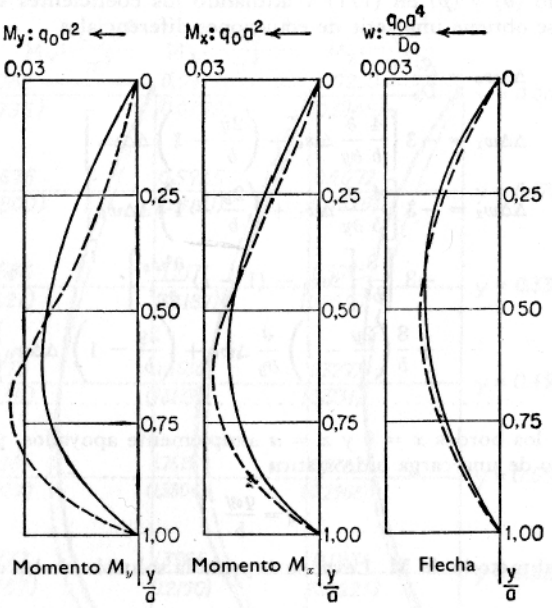


FIG. 84

La figura 84 presenta los resultados numéricos obtenidos por H. Favre y B. Gilg[1] para las flechas y los momentos flexores a lo largo del eje $x = a/2$ de una placa simplemente apoyada con $\lambda = 0{,}2$ y $\nu = 0{,}25$ y sometida a una presión hidrostática (r). Las líneas continuas de la figura corresponden a los resultados obtenidos tomando tres términos de la serie (p), mientras que las curvas de trazos resultan de las primeras aproximaciones.

[1] *Ibíd.*

Librodot