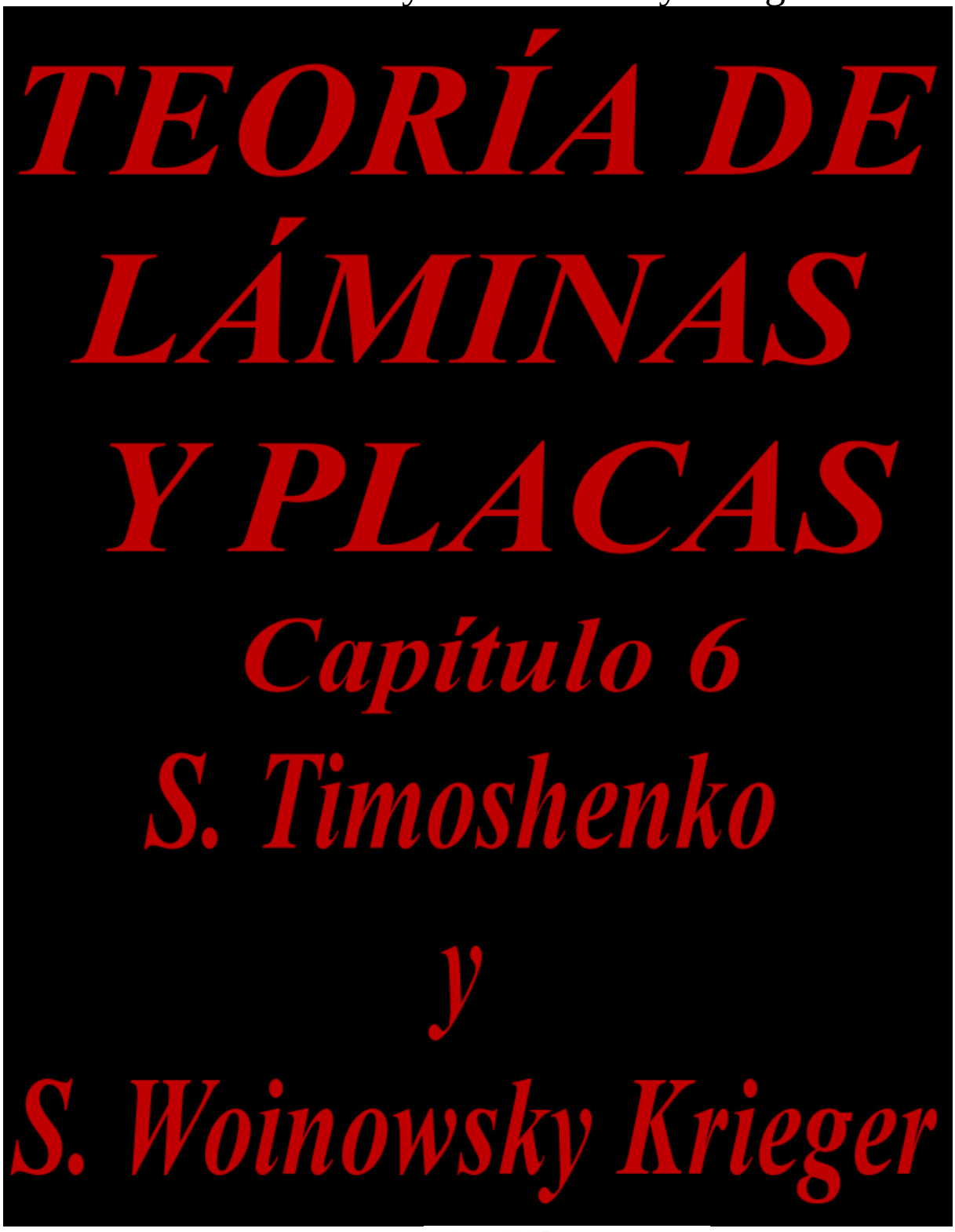
TEORÍA DE LÁMINAS Y PLACAS
S. Timoshenko y S. Woinowsky Krieger



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

6

Placas rectangulares con diversas condiciones de borde

41. *Flexión de placas rectangulares por momentos repartidos a lo largo de sus bordes*

Consideremos una placa rectangular apoyada a lo largo de sus bordes y flexada por momentos repartidos a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ (fig. 85). Las flechas w deben satisfacer la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \qquad (a)$$

y a las siguientes condiciones de borde

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = a \qquad (b)$$

$$w = 0 \quad \text{para} \quad y = \pm\frac{b}{2} \qquad (c)$$

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=b/2} = f_1(x) \qquad -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=-b/2} = f_2(x) \qquad (d)$$

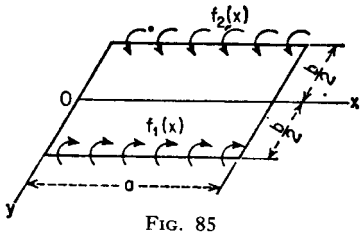


FIG. 85

Librodot

donde f_1 y f_2 representan las distribuciones de momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$.

Ponemos la solución de (a) en forma de la serie:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

donde cada término satisface las condiciones de contorno (b). Las funciones Y_m como anteriormente, son de la forma

$$Y_m = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \qquad (f)$$

que satisfacen a (a).

Para simplificar el estudio comencemos por dos casos particulares:

1. El caso simétrico en el que $(M_y)_{y=b/2} = (M_y)_{y=-b/2}$.
2. El caso antisimétrico en el que $(M_y)_{y=b/2} = -(M_y)_{y=-b/2}$.

El caso general puede obtenerse por combinación de estos dos casos particulares. En el caso simétrico, Y_m es una función par de y y es necesario poner $A_m = D_m = 0$ en (f). Obtendremos entonces, a partir de (e)

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

Para satisfacer las condiciones de contorno (c), ponemos

$$B_m \operatorname{ch} \alpha_m + C_m \alpha_m \operatorname{sh} \alpha_m = 0$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}$$

Por consiguiente

$$B_m = - C_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m$$

y la flecha en el caso simétrico es

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (h)$$

Se utilizan las condiciones de contorno (d) para determinar las constantes C_m. Representando la distribución de los momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$, por una serie trigonométrica, tenemos en el caso de simetría

$$f_1(x) = f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (i)$$

Librodot

donde los coeficientes E_m se calculan de la forma habitual para cada caso particular. Por ejemplo, en el caso de una distribución uniforme de los momentos flectores tenemos (v. pág. 173)

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{4M_0}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (j)$$

Sustituyendo (*h*) e (*i*) en (*d*), se obtiene

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2\pi^2}{a^2} C_m \operatorname{ch} \alpha_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

de donde

$$C_m = -\frac{a^2 E_m}{2Dm^2\pi^2 \operatorname{ch} \alpha_m}$$

y

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} E_m \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \qquad (173)$$

En el caso particular de momentos M_0 uniformemente repartidos, se obtiene utilizando (*j*)

$$w = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

La flecha a lo largo del eje de simetría ($y = 0$) es

$$(w)_{y=0} = \frac{2M_0 a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (k)$$

Cuando a es muy grande en comparación con b, se pone $\operatorname{th} \alpha_m \approx \alpha_m$ y $\operatorname{ch} \alpha_m \approx 1$. Se obtiene entonces, utilizando (*j*),

$$(w)_{y=0} = \frac{M_0 b^2}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{8} \frac{M_0 b^2}{D}$$

Esta es la flecha en el centro de una franja de anchura b, flexada por dos momentos iguales y opuestos aplicados en sus extremos.

Cuando a es pequeño en comparación con b, $\operatorname{ch} \alpha_m$ es grande y la flecha de la placa a lo largo del eje x es muy pequeña.

Librodot

Para cualquier relación dada entre las longitudes de los lados de un rectángulo, la flecha en el centro de la placa, según la expresión (*k*), es

$$(w)_{y=0,x=a/2} = \frac{M_0 ab}{\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} \frac{1}{m^2} \frac{\text{th } \alpha_m}{\text{ch } \alpha_m}$$

Conociendo la expresión (173) de las flechas, se puede obtener la pendiente de la deformada en el contorno por derivación y se calculan los momentos flectores mediante la derivada segunda de *w*.

La tabla 28 da algunos valores de las flechas y de los momentos flectores calculados de este modo. Se ve, por ejemplo, que la flecha de una franja de anchura *a* es poco más o menos 3,5 veces la de una placa cuadrada de lado *a*. Mientras que la sección transversal en el centro de una franja

TABLA 28

Flechas y momentos flectores en el centro de placas rectangulares simplemente apoyadas sometidas a momentos uniformemente repartidos en los bordes $y = \pm b/2$ (fig. 85)

$\nu = 0{,}3$

b/a	w	M_x	M_y
0,00	$0{,}1250 M_0 b^2/D$	$0{,}300 M_0$	$1{,}000 M_0$
0,50	$0{,}0964 M_0 b^2/D$	$0{,}387 M_0$	$0{,}770 M_0$
0,75	$0{,}0620 M_0 b^2/D$	$0{,}424 M_0$	$0{,}476 M_0$
1,00	$0{,}0368 M_0 a^2/D$	$0{,}394 M_0$	$0{,}256 M_0$
1,50	$0{,}0280 M_0 a^2/D$	$0{,}264 M_0$	$0{,}046 M_0$
2,00	$0{,}0174 M_0 a^2/D$	$0{,}153 M_0$	$-0{,}010 M_0$

transmite íntegramente el momento M_0 aplicado a los extremos, el momento flector M_y en el centro de la placa decrece rápidamente con respecto a M_0, cuando la relación b/a aumenta. Esto es debido a un efecto de amortiguamiento de los bordes $x = 0$ y $x = a$ no sometidos a los momentos

Consideremos el caso de antisimetría en que

$$f_1(x) = -f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

En este caso, la deformada es una función impar de *y*, y se debe poner $B_m = C_m = 0$ en (*f*). Por consiguiente,

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

De las condiciones en los límites (*c*), se sigue que

$$A_m \operatorname{sh} \alpha_m + D_m \alpha_m \operatorname{ch} \alpha_m = 0$$

Librodot

de donde $$D_m = -\frac{1}{\alpha_m} \operatorname{th} \alpha_m A_m$$

y $$w = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(\operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{\alpha_m} \operatorname{th} \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Las constantes A_m se calculan mediante las condiciones (d) de donde resulta que

$$\frac{2\pi^2 D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{m^2}{\alpha_m} \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

Por consiguiente $$A_m = \frac{a^2}{2\pi^2 D} E_m \frac{\alpha_m}{m^2 \operatorname{sh} \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}$$

y $$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m}{m^2 \operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (174)$$

Podemos obtener la deformada para el caso general, representado por las condiciones en los límites (d), a partir de (173) y (174) de los casos simétricos y antisimetricos. Con este objeto, dividimos las distribuciones de los momentos dados, en una distribución de momentos simétrica M'_y y en una distribución antisimétrica M''_y, como sigue

$$(M'_y)_{y=b/2} = (M'_y)_{y=-b/2} = \tfrac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)]$$
$$(M''_y)_{y=b/2} = -(M''_y)_{y=-b/2} = \tfrac{1}{2}[f_1(x) - f_2(x)]$$

Estos momentos pueden estar representados por dos series trigonométricas

$$(M'_y)_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E'_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$
$$(M''_y)_{y=b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E''_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (l)$$

y la flecha total se obtiene utilizando (173), (174) y superponiendo las flechas debidas a cada una de las dos distribuciones de momentos (l). Por consiguiente,

$$w = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{E'_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{E''_m}{\operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \qquad (175)$$

Librodot

Si los momentos flectores $M_y = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen}(m\pi x/l)$ no están repartidos más que sobre el lado $y = b/2$, tenemos $f_2(x) = 0$, $E_m = E_m = 1/2E_m$ y la flecha, en este caso, deberá ser

$$w = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^2} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_m} \left(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \right] \quad (176)$$

Las ecuaciones (173) a (176) de este apartado se aplicarán al estudio de placas que cumplen diversas condiciones de borde.

Los momentos M_0 repartidos a lo largo de un solo lado, $y = b/2$, producen en el centro de la placa, la mitad de las flechas y de los momentos flectores de la tabla 28. En el caso de acción simultánea de momentos, a lo largo de todo el contorno de la placa, las flechas y los momentos se calculan por superposición adecuada de los resultados obtenidos más arriba para una carga parcial[1].

42. *Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos empotrados*

Supongamos que los bordes $x = 0$ y $x = a$ de una placa rectangular (fig. 86) están simplemente apoyados y que los otros dos están empotrados. Se puede obtener la flecha de la placa sometida a una carga transversal cualquiera, resolviendo el problema como si los cuatro bordes estuvieran

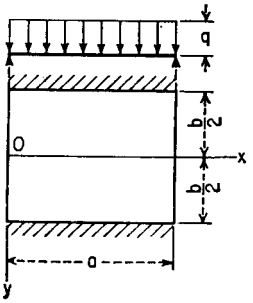


FIG. 86

simplemente apoyados y, aplicando después los momentos flectores a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ cuyo valor sea tal que eliminen el giro de

[1] La flexión debida a momentos aplicados en los bordes ha sido estudiada también por H. Bay, *Ingr.-Arch.*, vol. 8, pág. 4, 1937, y por U. Wegner, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 36, página 340, 1956.

Librodot

estos, producido por la acción de la carga transversal. De esta forma se pueden resolver varios problemas, asociando las soluciones del capítulo 5 a la solución del apartado precedente

Placas uniformemente cargadas[1]

Supongamos que los bordes de la placa están simplemente apoyados, la flecha es [v. ec. (139) pág. 137]

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (a)$$

y la pendiente de la deformada a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)] \qquad (b)$$

Para eliminar esta pendiente y así satisfacer las condiciones en los bordes se reparten, a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ los momentos M_y dados por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (c)$$

y se determinan los coeficientes E_m de manera que la pendiente, debida a estos momentos, sea igual y opuesta a la de la ecuación (*b*). Utilizando[2] (173) para la flecha producida por los momentos, se encuentra que la pendiente correspondiente a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\frac{a}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m} E_m[\operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1) - \alpha_m] \qquad (d)$$

Igualando este valor cambiado de signo a la expresión (*b*), se encuentra que

$$E_m = \frac{4qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \qquad (e)$$

[1] En un estudio de F. Czerny se encuentran numerosos datos numéricos relativos a placas rectangulares sometidos a una carga uniforme y en las que los bordes están simplemente apoyados o empotrados o bien combinados de varias formas; véase *Bautech.-Arch.*, vol. 11, pág. 33, Berlín, 1955.

[2] Se deduce por razón de simetría de la deformada debida a una carga uniforme, que sólo deben tomarse para m en (173) los números impares 1, 3, 5, ...

Por consiguiente, los momentos flectores a lo largo e los bordes empotrados son

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{4qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \quad (f)$$

El valor máximo de este momento se sitúa en el centro de los lados, en los que $x = a/2$. La serie (f) converge rápidamente y el momento máximo se calcula así en cada caso particular. Por ejemplo, los tres primeros términos de la serie (f) dan $-0{,}070qa^2$ como momento máximo en una placa

TABLA 29

Constantes α_1, β_1, β_2, γ para placa rectangular con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes empotrados (fig. 86)

$\nu = 0{,}3$

$b < a$

b/a	$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ $w_{\text{máx}} = \alpha \frac{qb^4}{D}$ α	$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ $M_x = \beta_1 qb^2$ β_1	$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ $M_y = \beta_2 qb^2$ β_2	$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qb^2$ γ
∞	0,00260	0,0125	0,0417	−0,0833
2,0	0,00260	0,0142	0,0420	−0,0842
1,5	0,00247	0,0179	0,0406	−0,0822
1,4	0,00240	0,0192	0,0399	−0,0810
1,3	0,00234	0,0203	0,0388	−0,0794
1,2	0,00223	0,0215	0,0375	−0,0771
1,1	0,00209	0,0230	0,0355	−0,0739

$b > a$

$\frac{b}{a}$	$w_{\text{máx}} = \alpha \frac{qa^4}{D}$ α	$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ $M_x = \beta_1 qa^2$ β_1	$x = \frac{a}{2}$, $y = 0$ $M_y = \beta_2 qa^2$ β_2	$x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ $M_y = \gamma qa^2$ γ
1,0	0,00192	0,0244	0,0332	−0,0697
1,1	0,00251	0,0307	0,0371	−0,0787
1,2	0,00319	0,0376	0,0400	−0,0868
1,3	0,00388	0,0446	0,0426	−0,0938
1,4	0,00460	0,0514	0,0448	−0,0998
1,5	0,00531	0,0585	0,0460	−0,1049
1,6	0,00603	0,0650	0,0469	−0,1090
1,7	0,00668	0,0712	0,0475	−0,1122
1,8	0,00732	0,0768	0,0477	−0,1152
1,9	0,00790	0,0821	0,0476	−0,1174
2,0	0,00844	0,0869	0,0474	−0,1191
3,0	0,01168	0,1144	0,0419	−0,1246
∞	0,01302	0,1250	0,0375	−0,1250

Librodot

cuadrada. En el caso general, este momento puede representarse por la fórmula $\gamma q a^2$, donde γ es un factor numérico cuyo valor depende de la relación a/b de los lados de la placa. La tabla 29 da varios valores de este coeficiente.

Sustituyendo los valores (e) de los coeficientes E_m en (173), se obtiene la deformada debida a los momentos M_y repartidos a lo largo de los bordes.

$$w_1 = -\frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}}{m^5 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \right) \qquad (g)$$

Se obtiene la flecha en el centro sustituyendo x por $a/2$ e $y = 0$ en (g). Entonces

$$(w_1)_{\text{máx}} = \frac{2qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}$$

que es rápidamente convergente y la flecha se obtiene con una gran exactitud no considerando más que algunos términos de esta serie. En el caso de una placa cuadrada, por ejemplo, el primer término da, él solo, la flecha con tres cifras exactas, y se tiene

$$w_1 = 0{,}00214 \frac{qa^4}{D}$$

Restando esta flecha de la flecha en el centro, producida por la carga uniforme (tabla 8, pág. 141), obtenemos finalmente para la flecha de una placa cuadrada uniformemente cargada con dos de sus lados simplemente apoyados y los otros dos empotrados, el valor

$$w = 0{,}00192 \frac{qa^4}{D}$$

Se puede representar generalmente, la flecha en el centro, por la fórmula

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$$

La tabla 29 da varios valores numéricos de α.

Librodot

Sustituyendo la expresión (g) de las flechas en las fórmulas conocidas (101), de los momentos flectores se obtiene

$$M_x = -\frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}$$

$$\left\{(1 - \nu)\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} - [2\nu + (1 - \nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}\right\} \qquad (h)$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)}$$

$$\left\{(1 - \nu)\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + [2 - (1 - \nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}\right\} \qquad (i)$$

En el centro de la placa, estos momentos toman los valores

$$M_x = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} [2\nu + (1 - \nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m]$$

$$M_y = \frac{2qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^3 \operatorname{ch} \alpha_m} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1)} [2 - (1 - \nu)\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m]$$

Estas series convergen tan rápidamente que se tiene un valor suficientemente exacto de los momentos, tomando sólo los dos primeros términos de las series. Superponiendo estos momentos a los de una placa simplemente apoyada (tabla 8), se obtienen entonces los valores finales de los momentos en el centro de la placa, que pueden ponerse en la forma

$$M_x = \beta_1 q a^2 \qquad M_y = \beta_2 q a^2 \qquad (j)$$

donde β_1 y β_2 son factores numéricos que dependen de la relación b/a. Varios valores de estos coeficientes están dados en la tabla 29.

Para el caso de una placa cuadrada, hallamos que los momentos en el centro, son

$$M_x = 0{,}0244 q a^2 \qquad \text{y} \qquad M_y = 0{,}0332 q a^2$$

Librodot

Estos son más pequeños que los momentos $M_x = M_y = 0{,}0479qa^2$ en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada. Pero, como se ha visto, los momentos M_y, en el centro de los bordes empotrados, son mayores que $0{,}0479qa^2$. Por consiguiente a causa de la tensión de los dos bordes, el valor de la tensión máxima en la placa aumenta cuando los lados empotrados de una placa rectangular son los mayores ($b < a$), los momentos flectores en el centro de estos lados y las flechas en el centro de la placa tienden a los valores correspondientes de una franja de bordes empotrados cuando b/a disminuye.

Placas sometidas a una presión hidrostática (fig. 87)

La deformada de una placa rectangular, simplemente apoyada sometida a la acción de una presión hidrostática [v. fig. 66 *a*), pág. 145], es

$$w = \frac{q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^5} \left(2 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (k)$$

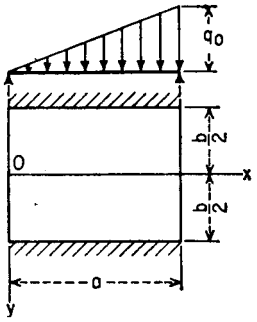


FIG. 87

La pendiente de la deformada en el borde $y = b/2$, es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} [\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m (1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (l)$$

Esta pendiente se elimina repartiendo a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$ los momentos M_y dados por la serie (*c*), determinando los coeficientes E_m

Librodot

de esta serie, de tal forma que la pendiente, debida a los momentos, sea igual y opuesta a la de la expresión (*e*). Obtenemos entonces

$$E_m = \frac{2q_0a^2(-1)^{m+1}}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \text{th}\,\alpha_m(1 + \alpha_m \,\text{th}\,\alpha_m)}{\alpha_m - \text{th}\,\alpha_m(\alpha_m \,\text{th}\,\alpha_m - 1)}$$

Sustituyendo estos valores en (*c*), la expresión de los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados es

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \frac{2q_0a^2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \,\text{sen}\,\frac{m\pi x}{a}}{m^3} \frac{\alpha_m - \text{th}\,\alpha_m(1 + \alpha_m \,\text{th}\,\alpha_m)}{\alpha_m - \text{th}\,\alpha_m(\alpha_m \,\text{th}\,\alpha_m - 1)} \qquad (m)$$

Los términos de la serie (*m*) cuando m es par, se anulan en el centro de los bordes empotrados donde $x = a/2$, y el valor de la serie es igual a la mitad del correspondiente a una placa uniformemente cargada [v. ec. (*f*)].

TABLA 30

Momentos flectores en placas rectangulares con dos bordes simplemente apoyados y dos bordes empotrados (fig. 87)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$x = a/2,\ y = 0$		$x = 3a/4,\ y = 0$		$x = a/2,\ y = b/2$	$x = 3a/4,\ y = b/2$
	M_x	M_y	M_x	M_y	M_y	M_y
0,50	$0{,}007q_0b^2$	$0{,}021q_0b^2$	$0{,}018q_0b^2$	$0{,}029q_0b^2$	$-0{,}042q_0b^2$	$-0{,}062q_0b^2$
0,75	$0{,}011q_0b^2$	$0{,}020q_0b^2$	$0{,}018q_0b^2$	$0{,}021q_0b^2$	$-0{,}040q_0b^2$	$-0{,}045q_0b^2$
1,00	$0{,}013q_0a^2$	$0{,}017q_0a^2$	$0{,}017q_0a^2$	$0{,}015q_0a^2$	$-0{,}035q_0a^2$	$-0{,}035q_0a^2$
1,25	$0{,}021q_0a^2$	$0{,}021q_0a^2$	$0{,}024q_0a^2$	$0{,}019q_0a^2$	$-0{,}045q_0a^2$	$-0{,}043q_0a^2$
1,50	$0{,}030q_0a^2$	$0{,}023q_0a^2$	$0{,}031q_0a^2$	$0{,}020q_0a^2$	$-0{,}051q_0a^2$	$-0{,}048q_0a^2$
2,00	$0{,}043q_0a^2$	$0{,}024q_0a^2$	$0{,}042q_0a^2$	$0{,}020q_0a^2$	$-0{,}060q_0a^2$	$-0{,}053q_0a^2$
∞	$0{,}063q_0a^2$	$0{,}019q_0a^2$	$0{,}055q_0a^2$	$0{,}017q_0a^2$	$-0{,}063q_0a^2$	$-0{,}055q_0a^2$

La serie converge rápidamente y puede calcularse fácilmente el valor de los momentos flectores en todo punto del borde. La tabla 30 da varios valores de este momento así como los momentos flectores a lo largo de la línea media de la placa $y = 0$.

Placa cargada con una fuerza concentrada[1]

En este caso, la flecha de la placa se calcula de nuevo superponiendo a la flecha de una placa simplemente apoyada (ap. 4) la flecha producida por los momentos repartidos a lo largo de los bordes empotrados. En el caso de

[1] Véase S. Timoshenko, *Bauingenieur*, pág. 51, 1922.

Librodot

una placa cargada en el centro, en la que se suponen los bordes $y = \pm b/2$ empotrados, se obtiene la expresión de la flecha en el centro:

$$w_{máx} = \frac{Pb^2}{2\pi^3 D}\left[\frac{a^2}{b^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^3}\left(\operatorname{th}\alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right) - \frac{\pi^2}{4}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\operatorname{th}^2\alpha_m}{\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m}\right] \qquad (n)$$

La primera suma entre corchetes corresponde a la flecha de una placa simplemente apoyada [v. ec. (147) pág. 164] y la segunda representa la flecha debida a la acción de los momentos a lo largo de bordes empotrados. Para las relaciones $b/a = 2$, 1, 1/2 y 1/3, los valores correspondientes de la expresión entre corchetes, de la ecuación (n), son 0,238; 0,436; 0,448 y 0,449.

Para obtener la tensión máxima, bajo la carga, se deben superponer a las tensiones de una placa simplemente apoyada, las tensiones debidas a los momentos siguientes

$$m_x = -P\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{b}{4a}\,\frac{\operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m}\left[2\nu + (1-\nu)\alpha_m\operatorname{th}\alpha_m\right] \qquad (o)$$

$$m_y = -P\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{b}{4a}\,\frac{\operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m}\left[2 - (1-\nu)\alpha_m\operatorname{th}\alpha_m\right]$$

Sea, para los momentos adicionales

$$m_x = \beta_1 P \qquad m_y = \beta_2 P \qquad (p)$$

la tabla 31 da los valores de los factores numéricos β_1 y β_2 para diferentes valores de b/a. Cuando la carga central P está repartida sobre un pequeño

TABLA 31

Corrección de momentos flectores en $x = a/2$, $y = 0$ debida a los momentos de empotramiento en los bordes $y = \pm b/2$ en el caso de carga central P (fig. 71)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$m_x = \beta_1 P$ β_1	$m_y = \beta_2 P$ β_2	b/a	$m_x = \beta_1 P$ β_1	$m_y = \beta_2 P$ β_2
0,0	−0,0484	−0,0742	1,0	−0,0505	−0,0308
0,5	−0,0504	−0,0708	1,2	−0,0420	−0,0166
0,6	−0,0524	−0,0656	1,4	−0,0319	−0,0075
0,7	−0,0540	−0,0580	1,6	−0,0227	−0,0026
0,8	−0,0544	−0,0489	1,8	−0,0155	−0,0002
0,9	−0,0532	−0,0396	2,0	−0,0101	+0,0007

Librodot

círculo o un rectángulo, es suficiente sumar los momentos (p) a los momentos flectores obtenidos, para una placa simplemente apoyada, mediante las expresiones logarítmicas (157) y (167). El momento M_y en el centro de los bordes empotrados, de una placa cuadrada es

$$M_y = -0{,}166P$$

Los cálculos demuestran que este momento varía poco cuando la longitud de los lados empotrados aumenta. Es igual a $-0{,}168P$ cuando $b/a = 0{,}5$ y baja a $-0{,}155P$ cuando $B/a = 1{,}2$[1].

Debe notarse que el momento de empotramiento con el valor máximo de $-P/\pi = -0{,}3183P$, es debido a una carga concentrada junto al borde empotrado de la placa y no a una carga central (v. ap. 51). En el caso de varias cargas móviles se utilizará la superficie de influencia para el momento de empotramiento a fin de obtener su valor máximo con seguridad (v. ap. 76).

43. *Placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y uno empotrado*

Consideremos una placa rectangular empotrada a lo largo de un lado $y = b/2$ y simplemente apoyada sobre los otros tres (fig. 88). La flecha de la placa sometida a una carga transversal cualquiera se obtiene combinando la solución de una placa simplemente apoyada con la ecuación (176) en la que los momentos flectores están repartidos a lo largo de un lado de la placa.

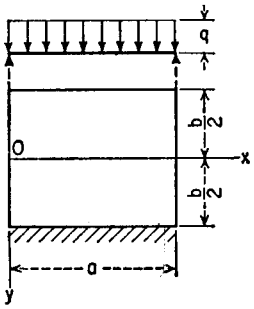


FIG. 88

Placas uniformemente cargadas

La pendiente en el borde $y = b/2$ debida a una carga uniformemente repartida, es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

$$[\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)] \qquad (a)$$

[1] Respecto a detalles numéricos relativos a placas con bordes opuestos empotrados, véase A. Pucher, *Ingr.-Arch.*, vol. 14, pág. 246, 1943-1944.

Librodot

Los momentos $M_y = \Sigma E_m \operatorname{sen}(m\pi x/a)$ repartidos sobre el lado $y = b/2$ producen la pendiente[1] [v. ec. (176)].

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{a}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} E_m(\alpha_m \operatorname{th}^2 \alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{cth}^2 \alpha_m - \operatorname{cth} \alpha_m - 2\alpha_m) \qquad (b)$$

Estas dos pendientes, a causa de la condición de empotramiento, son de igual valor y de signo contrario. Por consiguiente

$$E_m = -\frac{8qa^2}{\pi^3 m^3} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m \operatorname{th}^2 \alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m + \alpha_m \operatorname{cth}^2 \alpha_m - \operatorname{cth} \alpha_m - 2\alpha_m} \qquad (c)$$

y la expresión de los momentos flectores en el lado $y = b/2$ es

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{8qa^2}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \frac{\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m)}{2\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m - 1) - \operatorname{cth} \alpha_m(\alpha_m \operatorname{cth} \alpha_m - 1)} \qquad (d)$$

Tomemos por ejemplo, una placa cuadrada; el valor del momento flector en el centro del borde empotrado vale según (*d*)

$$(M_y)_{y\ b/2, x\ a/2} = -0{,}084qa^2$$

Este momento es en valor absoluto mayor que el momento $-0{,}070\ qa^2$ encontrado en el apartado anterior para una placa cuadrada que tiene dos bordes empotrados. La tabla 32 da varios valores del momento en el centro del lado empotrado, correspondiente a los diferentes valores de a/b.

Sustituyendo el valor (*c*) de la constante E_m en (176) se obtiene la deformada debida a los momentos de empotramiento, de donde se deduce que la flecha en el centro de la placa es

$$(w_1)_{x=a/2,y=0} = \frac{a^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2} \frac{E_m \alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{\operatorname{ch} \alpha_m} \qquad (e)$$

Para una placa cuadrada, los dos primeros términos de la serie dan

$$(w_1)_{x=a/2,y=0} = 0{,}00127 \frac{qa^4}{D}$$

Restando esta flecha de la flecha de una placa cuadrada simplemente apoyada (tabla 8), se encuentra que la flecha en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada, que tiene un borde empotrado, es

$$(w)_{x=a/2,y=0} = 0{,}00279 \frac{qa^4}{D}$$

[1] En este caso simétrico sólo deben tomarse valores pares de m.

Librodot

TABLA 32

Flechas y momentos flectores en placa rectangular con un borde empotrado y los otros tres simplemente apoyados (fig. 88)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$(w)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_y)_{x=a/2,\ y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_y)_{x=a/2,\ y=0}$
∞	$0{,}0130qa^4/D$	$-0{,}125qa^2$	$0{,}125qa^2$	$0{,}037qa^2$
2,0	$0{,}0093qa^4/D$	$-0{,}122qa^2$	$0{,}094qa^2$	$0{,}047qa^2$
1,5	$0{,}0064qa^4/D$	$-0{,}112qa^2$	$0{,}069qa^2$	$0{,}048qa^2$
1,4	$0{,}0058qa^4/D$	$-0{,}109qa^2$	$0{,}063qa^2$	$0{,}047qa^2$
1,3	$0{,}0050qa^4/D$	$-0{,}104qa^2$	$0{,}056qa^2$	$0{,}045qa^2$
1,2	$0{,}0043qa^4/D$	$-0{,}098qa^2$	$0{,}049qa^2$	$0{,}044qa^2$
1,1	$0{,}0035qa^4/D$	$-0{,}092qa^2$	$0{,}041qa^2$	$0{,}042qa^2$
1,0	$0{,}0028qa^4/D$	$-0{,}084qa^2$	$0{,}034qa^2$	$0{,}039qa^2$
1/1,1	$0{,}0032qb^4/D$	$-0{,}092qb^2$	$0{,}033qb^2$	$0{,}043qb^2$
1/1,2	$0{,}0035qb^4/D$	$-0{,}098qb^2$	$0{,}032qb^2$	$0{,}047qb^2$
1/1,3	$0{,}0038qb^4/D$	$-0{,}103qb^2$	$0{,}031qb^2$	$0{,}050qb^2$
1/1,4	$0{,}0040qb^4/D$	$-0{,}108qb^2$	$0{,}030qb^2$	$0{,}052qb^2$
1/1,5	$0{,}0042qb^4/D$	$-0{,}111qb^2$	$0{,}028qb^2$	$0{,}054qb^2$
0,5	$0{,}0049qb^4/D$	$-0{,}122qb^2$	$0{,}023qb^2$	$0{,}060qb^2$
0,0	$0{,}0052qb^4/D$	$-0{,}125qb^2$	$0{,}019qb^2$	$0{,}062qb^2$

La tabla 32 da los valores de la flecha y los momentos flectores para diversos valores de la relación a/b.

Placas sometidas a una presión hidrostática

Si la placa está sometida a una presión hidrostática, como en la figura 89, la pendiente en el borde $y = b/2$, en el caso de bordes simplemente apoyados, es (v. pág. 213)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{q_0 a^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^4} (\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m - \alpha_m \operatorname{th}^2 \alpha_m) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (f)$$

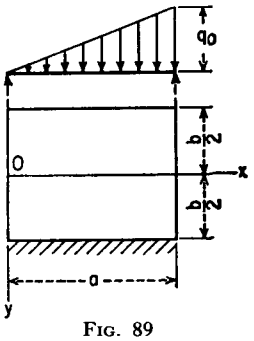


FIG. 89

Librodot

La pendiente debida a los momentos flectores repartidos a lo largo del borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{a}{4\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\, E_m(\alpha_m \operatorname{th}^2\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m + \alpha_m \operatorname{cth}^2\alpha_m - \operatorname{cth}\alpha_m - 2\alpha_m) \qquad (g)$$

Por la condición de empotramiento a lo largo de este borde, se encuentra, igualando (g) a (f) precedida del signo menos

$$E_m = -\frac{4qa^2}{\pi^3}\frac{(-1)^{m+1}}{m^3}\frac{\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m)}{\alpha_m \operatorname{th}^2\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m + \alpha_m \operatorname{cth}^2\alpha_m - \operatorname{cth}\alpha_m - 2\alpha_m}$$

Por consiguiente, la expresión del momento flector M_y sobre el borde $y = b/2$ es

$$(M_y)_{y=b/2} = \frac{4q_0a^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{m^3}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\frac{\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m)}{2\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m(\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m - 1) - \operatorname{cth}\alpha_m(\alpha_m \operatorname{cth}\alpha_m - 1)} \qquad (h)$$

Esta serie converge rápidamente y se puede calcular con facilidad el valor del momento en todo punto del borde empotrado. Tomando, por ejemplo, una placa cuadrada y poniendo $x = a/2$, se obtiene, para el momento en el centro del borde empotrado, el valor

$$(M_y)_{y=b/2,\,x=a/2} = -0{,}042q_0a^2$$

igual a la mitad del valor del momento de una placa cuadrada uniformemente cargada (v. tabla 32). La tabla 33 da los valores del momento $(M_y)_{y=b/2}$ para varios puntos del borde empotrado y para diferentes valores de la relación b/a. Se ve que cuando b/a disminuye el valor de M_y a lo largo del borde empotrado tiende rápidamente hacia $-q_0b^2x/8a$, que es el momento en el extremo empotrado de una franja de longitud b sometida a una carga uniformemente repartida q_0x/a.

TABLA 33

Valores del momento M_y en el borde empotrado $y = b/2$ de placas rectangulares bajo carga hidrostática $q = q_0x/a$ (fig. 89)

b/a	$x = a/4$	$x = a/2$	$x = \frac{3}{4}a$
∞	$-0{,}039q_0a^2$	$-0{,}062q_0a^2$	$-0{,}055q_0a^2$
2	$-0{,}038q_0a^2$	$-0{,}061q_0a^2$	$-0{,}053q_0a^2$
$\frac{3}{2}$	$-0{,}034q_0a^2$	$-0{,}056q_0a^2$	$-0{,}050q_0a^2$
1	$-0{,}025q_0a^2$	$-0{,}042q_0a^2$	$-0{,}040q_0a^2$
$\frac{3}{2}$	$-0{,}030q_0b^2$	$-0{,}056q_0b^2$	$-0{,}060q_0b^2$
$\frac{1}{2}$	$-0{,}031q_0b^2$	$-0{,}061q_0b^2$	$-0{,}073q_0b^2$
0	$-0{,}031q_0b^2$	$-0{,}062q_0b^2$	$-0{,}094q_0b^2$

Librodot

Consideremos como anteriormente, una placa bajo carga hidrostática pero, esta vez con el borde $x = a$ empotrado (fig. 90).

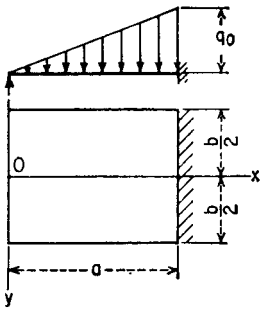


FIG. 90

Aplicando a este caso el método de M. Lévy, se escribe la deformada de la placa en la forma

$$w = \frac{q_0 x}{384D}(16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4) + \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} X_m \cos\frac{m\pi y}{b} \qquad (i)$$

donde

$$X_m = A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b}\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{b} + C_m \operatorname{sh}\frac{m\pi x}{b} + D_m \frac{m\pi x}{b}\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{b}$$

La expresión (i) satisface la ecuación diferencial de la placa flexada y las condiciones en los bordes $y = \pm b/2$. Desarrollando en serie el polinomio entre paréntesis de (i)

$$\frac{1{,}536b^4}{\pi^5}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}\frac{1}{m^5}\cos\frac{m\pi y}{b}$$

se obtienen los coeficientes A_m, B_m ... a partir de las condiciones de los otros dos lados, es decir:

$$(w)_{x=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0 \qquad (w)_{x=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} = 0 \qquad (j)$$

Sustituyendo en (i) los coeficientes por su valor, tenemos la solución completa. La tabla 34 da las flechas y los momentos flectores obtenidos mediante esta última ecuación.

Librodot

TABLA 34

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares empotradas en $x = a$ bajo carga hidrostática (fig. 90)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$(w)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_x)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_y)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_x)_{x=a,\ y=0}$
∞	$0{,}0024q_0a^4/D$	$0{,}029q_0a^2$	$0{,}009q_0a^2$	$-0{,}067q_0a^2$
2,0	$0{,}0023q_0a^4/D$	$0{,}029q_0a^2$	$0{,}011q_0a^2$	$-0{,}063q_0a^2$
1,5	$0{,}0019q_0a^4/D$	$0{,}026q_0a^2$	$0{,}013q_0a^2$	$-0{,}061q_0a^2$
1,0	$0{,}0013q_0a^4/D$	$0{,}019q_0a^2$	$0{,}016q_0a^2$	$-0{,}048q_0a^2$
$\frac{1}{3}$	$0{,}0030q_0b^4/D$	$0{,}028q_0b^2$	$0{,}034q_0b^2$	$-0{,}071q_0b^2$
0,5	$0{,}0045q_0b^4/D$	$0{,}024q_0b^2$	$0{,}046q_0b^2$	$-0{,}084q_0b^2$
0,0	$0{,}0065q_0b^4/D$	$0{,}019q_0b^2$	$0{,}062q_0b^2$	$-0{,}125q_0b^2$

44. *Placas rectangulares empotradas en todo el contorno*[1]

Para estudiar este problema, se utilizará el mismo método utilizado para los casos precedentes. Comenzaremos por resolver el problema para una placa rectangular simplemente apoyada y superponemos a la flecha de esta placa, la flecha de la placa, debida a los momentos repartidos a lo largo de los bordes (v. ap. 41). Estos momentos son tales que cumplen la condición $\partial w/\partial n = 0$ en el contorno de la placa empotrada. El método puede aplicarse a toda clase de carga transversal.

Placas uniformemente cargadas

Para simplificar nuestro estudio, comenzaremos por el caso de una carga uniformemente repartida. Las flechas y los momentos en este caso

[1] Respecto a literatura matemática sobre este problema, véase *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, vol. 4, apart. 25 (Tedone-Timpe), págs. 165 y 186. Otras referencias sobre este punto pueden verse en el estudio de A. E. H. Love, *Proc. London Math. Soc.*, vol. 29, página 189. Los primeros resultados numéricos para el cálculo de tensiones y flechas en placas rectangulares empotradas fueron expuestos por B. M. Koyalovich en su tesis doctoral, San Petersburgo, 1902, I. G. Boobnov, realizó nuevos progresos, calculando tablas para el cálculo de flechas y momentos en placas rectangulares uniformemente cargadas con bordes empotrados; véanse sus obras *Theory of Structures of Ships*, vol. 2, pág. 465, San Petersburgo, 1914, y *Collected Papers on Theory of Plates*, pág. 144, Moscú, 1953. H. Hencky trató el mismo problema en su estudio «Der Spannungszustand in rechteckigen Platten», Münich, 1913. I. A. Wojtaszak, *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, pág. 173, 1937, utilizó el método de Hencky. Los resultados numéricos obtenidos de esta forma por Wojtaszak en el caso de una placa uniformemente cargada coinciden con los dados por la tabla de Boobnov. Otras soluciones del mismo problema para varios tipos de carga se deben a H. Leitz, *Z. Math. Phys.*, vol. 64, página 262, 1917; A. Nádai, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 14, 1922; A. Weinstein y D. H. Rock, *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, pág. 262, 1944; P. Funk y E. Berger, *Federhofer-Girkmann-Festschrift*, pág. 199, Viena, 1950; G. A. Grinberg, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 76, pág. 661, 1951; K. Girkmann y E. Tungl, *Osterr. Bauzitschrift*, vol. 8, pág. 47, 1953; B. C. Laws, realizó un estudio experimental del problema, vease *Phil. Mag.*, vol. 24, pág. 1072, 1937. En el estudio que sigue utilizaremos el método desarrollado por S. Timoshenko, *Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938; el método es más general que la mayoría de los métodos mencionados antes y puede aplicarse a cualquier tipo de carga, incluso cargas concentradas.

Librodot

son simétricos con respecto a los ejes de coordenadas indicados en la figura 91. La flecha, para una placa simplemente apoyada, según la ecuación (139) (v. pág. 137) con relación a las nuevas coordenadas es

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos\frac{m\pi x}{a} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2}{2\operatorname{ch}\alpha_m} \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2\operatorname{ch}\alpha_m} \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (a)$$

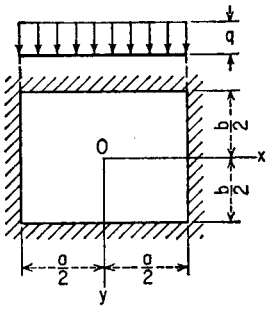


FIG. 91

donde $\alpha_m = m\pi b/2a$. El giro del borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\frac{m\pi x}{a} [\alpha_m - \operatorname{th}\alpha_m(1 + \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m)]$$

$$= \frac{2qa^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\frac{m\pi x}{a} \left(\frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m} - \operatorname{th}\alpha_m\right) \qquad (b)$$

Consideremos ahora la flecha de la placa debida a los momentos repartidos en los bordes $y = \pm b/2$. Por razón de simetría, se llega a que los momentos pueden escribirse en la forma

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (c)$$

La flecha correspondiente w_1 se obtiene mediante (173) sustituyendo x por $x + a/2$ y tomando $m = 1, 3, 5, \ldots$ Entonces

$$w_1 = -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2 \operatorname{ch}\alpha_m} \cos\frac{m\pi x}{a} \left(\frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (d)$$

Librodot

El giro en el borde $y = b/2$, correspondiente a esta flecha, es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\cos\frac{m\pi x}{a}\left(\operatorname{th}\alpha_m + \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right) \quad (e)$$

En lo que sigue, necesitaremos también el giro en los bordes paralelos al eje y. Derivando (d) con respecto a x y haciendo $x = a/2$, se obtiene

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = \frac{a}{2\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \frac{1}{m\operatorname{ch}\alpha_m}\left(\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right) = -\frac{1}{4D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{E_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\left(b\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} - 2y\operatorname{ch}\alpha_m\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right) \quad (f)$$

La expresión entre paréntesis es una función par de y, que se anula en los bordes $y = \pm b/2$. Esta función puede escribirse en forma de la serie

$$\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty} A_i \cos\frac{i\pi y}{b} \quad (g)$$

en la que los coeficientes A_i se calculan utilizando la fórmula

$$A_i = \frac{2}{b}\int_{-b/2}^{+b/2}\left(b\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} - 2y\operatorname{ch}\alpha_m\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\cos\frac{i\pi y}{b}\,dy$$

de donde

$$A_i = \frac{16ia(-1)^{(i-1)/2}}{m^3\pi^2}\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\operatorname{ch}^2\alpha_m$$

Sustituyendo en (g) y (f) se obtiene

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{4b^2}{\pi^2 Da}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{E_m}{m^3}\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cos\frac{i\pi y}{b} \quad (h)$$

Se obtienen, de la misma manera, las expresiones de las flechas w_2 y de los giros en los bordes, para el caso en que los momentos M_x están repartidos a lo largo de $x = \pm a/2$, suponiendo una distribución simétrica y tomando

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}F_m\cos\frac{m\pi y}{b} \quad (i)$$

Librodot

se encuentra en este caso, utilizando (*e*) y (*h*)

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = -\frac{b}{2\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} F_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\cos\frac{m\pi y}{b}\left(\text{th}\,\beta_m + \frac{\beta_m}{\text{ch}^2\,\beta_m}\right) \quad (j)$$

en donde $\beta_m = m\pi a/2b$ y

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{4a^2}{\pi^2 Db}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{F_m}{m^3}\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cos\frac{i\pi x}{a} \quad (k)$$

Cuando actúan los momentos (*c*) e (*i*) simultáneamente, se obtienen los giros de los bordes por el método de superposición. Tomando, por ejemplo, el borde $y = b/2$, se encuentra

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{a}{2\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\cos\frac{m\pi x}{a}\left(\text{th}\,\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\text{ch}^2\,\alpha_m}\right) - \frac{4a^2}{\pi^2 Db}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{F_m}{m^3}\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{i(-1)^{(i-1)/2}}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\cos\frac{i\pi x}{a} \quad (l)$$

Teniendo (*h*) y (*l*), se pueden obtener ya las ecuaciones para calcular las constantes E_m y F_m de las series (*c*) e (*i*) que representan los momentos que actúan a lo largo de los bordes de una placa empotrada. En el caso de una placa empotrada los bordes no giran. Por consiguiente, para los bordes $y = \pm b/2$, se obtiene

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2}+\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0 \quad (m)$$

De igual forma para $x = \pm a/2$, se encuentra

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a/2}+\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)_{x=a/2} = 0 \quad (n)$$

Si se lleva (*b*) y (*l*) a la ecuación (*m*) y se agrupan[1] los términos que contienen cos $(i\pi x/a)$, como factor común teniendo en cuenta que la ecuación (*m*) es válida cualquiera que sea *x*, se llega a que el coeficiente que multiplica a cos $(i\pi x/a)$ es nulo para todo valor de *i*. Así, se obtiene un

[1] Se supone que el orden de suma en (*l*) es permutable.

Librodot

sistema de ecuaciones lineales, infinito, para el cálculo de los coeficientes E_i y F_i

$$\frac{4qa^2}{\pi^3}\,\frac{1}{i^4}\left(\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}-\operatorname{th}\alpha_i\right)$$
$$-\frac{E_i}{i}\left(\operatorname{th}\alpha_i+\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}\right)-\frac{8ia}{\pi b}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{F_m}{m^3}\frac{1}{\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}=0 \qquad (o)$$

Con ayuda de (n) se obtiene un sistema semejante. Las constantes E_1, E_3, ... F_1, F_3, ... , se determinan en cada caso particular por estos dos sistemas de ecuaciones utilizando el método de aproximaciones sucesivas.

Para ilustrar este método consideremos una placa cuadrada, en este caso la distribución de los momentos flectores es la misma en todos los lados del cuadrado. Por consiguiente $E_i = F_i$ y los dos sistemas de ecuaciones son idénticos. Las ecuaciones son de la forma

$$\frac{E_i}{i}\left(\operatorname{th}\alpha_i+\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}\right)+\frac{8i}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{E_m}{m^3}\frac{1}{\left(1+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$
$$=\frac{4qa^2}{\pi^3}\,\frac{1}{i^4}\left(\frac{\alpha_i}{\operatorname{ch}^2\alpha_i}-\operatorname{th}\alpha_i\right)$$

Sustituyendo los coeficientes por los valores numéricos en estas ecuaciones y considerando sólo los cuatro primeros coeficientes, se obtiene el sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incognitas E_1, E_3, E_5 y E_7.

$$\begin{array}{llll}
1{,}8033E_1 & +0{,}0764E_3 & +0{,}0188E_5 & +0{,}0071E_7 = 0{,}6677K \\
0{,}0764E_1 & +0{,}4045E_3 & +0{,}0330E_5 & +0{,}0159E_7 = 0{,}01232K \\
0{,}0188E_1 & +0{,}0330E_3 & +0{,}2255E_5 & +0{,}0163E_7 = 0{,}00160K \\
0{,}0071E_1 & +0{,}0159E_3 & +0{,}0163E_5 & +0{,}1558E_7 = 0{,}00042K
\end{array} \qquad (p)$$

donde $K = -4qa^2/\pi^3$. Se observa que los términos de la diagonal tienen los coeficientes mayores. Por consiguiente, se obtienen las primeras aproximaciones de las constantes E_1, ..., E_7 no teniendo en cuenta, en los primeros miembros de las ecuaciones (p), más que los términos situados a la izquierda de la línea señalada. De este modo se encuentra en la primera ecuación $E_1 = 0{,}3700K$. Sustituyendo en la segunda, tendremos $E_3 = -0{,}0395K$. Sustituyendo los valores de E_1 y E_3 en la tercera ecuación, se encuentra $E_5 = -0{,}0180K$. Por último la última ecuación, nos da $E_7 = -0{,}0083K$. Sustituyendo estas primeras aproximaciones de los coeficientes, en los términos situados a la derecha de la línea señalada, se calculan así las segundas aproximaciones que son $E_1 = 0{,}3722K$, $E_3 = -0{,}0380K$, $E_5 = -0{,}0178K$, $E_7 = 0{,}0085K$. Repitiendo de nuevo los cálculos, se obtendrá una tercera aproximación y así sucesivamente.

Sustituyendo en (*c*) E_1, E_3 ... por su valor, se obtienen los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados de la placa. El máximo valor absoluto de estos momentos se sitúa en el centro de los lados del cuadrado. Con las cuatro ecuaciones (*p*), este valor es

$$|M_y|_{y=b/2,x=0} = |E_1 - E_3 + E_5 - E_7| = 0{,}0517qa^2$$

La comparación de este resultado con el de la tabla de Boobvov, calculado con un número mayor de ecuaciones semejantes a (*p*), muestra que el error en el momento flector máximo, es inferior a 1 %, cuando no se toman más que cuatro ecuaciones (*p*). Se obtiene, para el momento, una serie de signos alternados, y el valor del error depende del valor del último coeficiente E_1, E_3 ... calculado.

Sustituyendo los valores de E_1, E_3 ... en la expresión (*d*) se obtiene la flecha de la placa debida a los momentos repartidos a lo largo de los bordes $y = \pm b/2$.

En el centro de la placa ($x = y = 0$) esta flecha es

$$(w_1)_{x=y=0} = \frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m (-1)^{(m-1)/2} \frac{\alpha_m \operatorname{th} \alpha_m}{m^2 \operatorname{ch} \alpha_m} = -0{,}00140 \frac{qa^4}{D}$$

Multiplicando por dos, este resultado, para tener en cuenta la acción de los momentos repartidos sobre los lados $x = \pm a/2$ y sumándolo a la flecha de una placa simplemente apoyada (tabla 8), se obtiene la flecha en el centro de una placa cuadrada uniformemente cargada y de bordes empotrados

$$(w)_{\text{máx}} = (0{,}00406 - 0{,}00280) \frac{qa^4}{D} = 0{,}00126 \frac{qa^4}{D} \qquad (q)$$

TABLA 35

Flechas y momentos flectores en placa rectangular uniformemente cargada con bordes empotrados (fig. 91)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$(w)_{x=0,\ y=0}$	$(M_x)_{x=a/2,\ y=0}$	$(M_y)_{x=0,\ y=b/2}$	$(M_x)_{x=0,\ y=0}$	$(M_y)_{x=0,\ y=0}$
1,0	$0{,}00126qa^4/D$	$-0{,}0513qa^2$	$-0{,}0513qa^2$	$0{,}0231qa^2$	$0{,}0231qa^2$
1,1	$0{,}00150qa^4/D$	$-0{,}0581qa^2$	$-0{,}0538qa^2$	$0{,}0264qa^2$	$0{,}0231qa^2$
1,2	$0{,}00172qa^4/D$	$-0{,}0639qa^2$	$0{,}0554qa^2$	$0{,}0299qa^2$	$0{,}0228qa^2$
1,3	$0{,}00191qa^4/D$	$-0{,}0687qa^2$	$0{,}0563qa^2$	$0{,}0327qa^2$	$0{,}0222qa^2$
1,4	$0{,}00207qa^4/D$	$-0{,}0726qa^2$	$-0{,}0568qa^2$	$0{,}0349qa^2$	$0{,}0212qa^2$
1,5	$0{,}00220qa^4/D$	$-0{,}0757qa^2$	$-0{,}0570qa^2$	$0{,}0368qa^2$	$0{,}0203qa^2$
1,6	$0{,}00230qa^4/D$	$-0{,}0780qa^2$	$-0{,}0571qa^2$	$0{,}0381qa^2$	$0{,}0193qa^2$
1,7	$0{,}00238qa^4/D$	$-0{,}0799qa^2$	$-0{,}0571qa^2$	$0{,}0392qa^2$	$0{,}0182qa^2$
1,8	$0{,}00245qa^4/D$	$-0{,}0812qa^2$	$-0{,}0571qa^2$	$0{,}0401qa^2$	$0{,}0174qa^2$
1,9	$0{,}00249qa^4/D$	$-0{,}0822qa^2$	$-0{,}0571qa^2$	$0{,}0407qa^2$	$0{,}0165qa^2$
2,0	$0{,}00254qa^4/D$	$-0{,}0829qa^2$	$-0{,}0571qa^2$	$0{,}0412qa^2$	$0{,}0158qa^2$
∞	$0{,}00260qa^4/D$	$-0{,}0833qa^2$	$0{,}0571qa^2$	$0{,}0417qa^2$	$0{,}0125qa^2$

Librodot

Se pueden efectuar cálculos semejantes para cualquier relación de los lados de una placa rectangular. Los resultados de estos cálculos están dados en la tabla 35[1].

Placas bajo presión hidrostática

Se representa la intensidad de la carga, repartida como indica la figura 92, por

$$q_0 = \frac{q_0}{2} + \frac{q_0}{2}\frac{x}{a}$$

se ve que la influencia del término $q_0/2$ sobre las flechas de la placa está ya dada por la solución anterior. Así, queda considerar la presión $q_0 x/2a$.

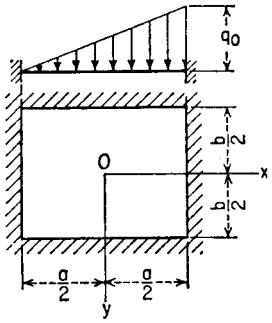


FIG. 92

La deformada de una placa simplemente apoyada que soporta una carga semejante se obtiene asimismo combinando la expresión (*k*) (pág. 213) con la expresión (*a*) (pág. 209). Poniendo $q = -q_0/2$ en esta última ecuación y sustituyendo x por $x + a/2$ en las dos expresiones, de acuerdo con las nuevas coordenadas, obtenemos la deformada

$$w = \frac{2q_0a^4}{\pi^5 D}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2+1}}{m^5}\left(2 - \frac{2 + \alpha_m \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{ch}\alpha_m}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_m}\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \qquad (r)$$

simétrica respecto al eje x y antisimétrica respecto a y. Por consiguiente, para eliminar la pendiente a lo largo del contorno de la placa se deben aplicar en los bordes los momentos siguientes:

$$(M_x)_{x=\pm a/2} = \pm\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}(-1)^{(m-1)/2}E_m\cos\frac{m\pi y}{b}$$
$$(M_y)_{y=\pm b/a} = \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}(-1)^{m/2-1}F_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (s)$$

[1] Esta tabla fue calculada por T. H. Evans, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-7, 1939.

Librodot

Operando como en el caso de una carga uniformemente repartida, se calculan los coeficientes E_m y F_m por un sistema de ecuaciones lineales. Las flechas debidas a la acción simultánea de la carga $q_0x/2a$ y de los momentos (s) deben finalmente sumarse a las flechas de la placa empotrada sometidas a una carga uniforme $q_0/2$. La tabla 36[1] da los resultados obtenidos por este método.

TABLA 36

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con bordes empotrados, bajo carga hidrostática (fig. 92)

$\nu = 0{,}3$

	$x = 0, y = 0$			$x = a/2, y = 0$	$x = -a/2, y = 0$	$x = 0, y = \pm b/2$
$\frac{b}{a}$	$w = \alpha\frac{q_0a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$M_y = \beta_2 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_1 q_0 a^2$	$M_x = \gamma_2 q_0 a^2$	$M_y = \delta q_0 a^2$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2	δ
0,5	0,000080	0,00198	0,00515	−0,0115	−0,0028	−0,0104
2/5	0,000217	0,00451	0,00817	−0,0187	−0,0066	−0,0168
1,0	0,00063	0,0115	0,0115	−0,0334	−0,0179	−0,0257
1,5	0,00110	0,0184	0,0102	−0,0462	−0,0295	−0,0285
∞	0,00130	0,0208	0,0063	−0,0500	−0,0333	

Placas cargadas en el centro

Consideremos como tercer ejemplo la flexión de una placa rectangular de bordes empotrados sometida a una carga P concentrada en el centro (fig. 93). Volvamos ahora al caso de una placa simplemente apoyada.

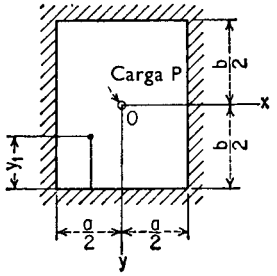


FIG. 93

Sustituyendo en la ecuación (116) ξ por $a/2$ y x por $x + a/2$, se obtiene la deformada (válida para $y > 0$)

$$w = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^3}\cos\frac{m\pi x}{a}\left[\left(\operatorname{th}\alpha_m - \frac{\alpha_m}{\operatorname{ch}^2\alpha_m}\right)\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} - \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\operatorname{th}\alpha_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right]$$

[1] Véase Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 7, pág. A-139, 1940. Tablas más extensas calculadas por diferencias finitas se deben a E. G. Odley, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 14, página A-289, 1947.

Librodot

El ángulo de giro en el borde $y = b/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = -\frac{Pa}{2\pi^2 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\,\frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{ch}\alpha_m} \qquad (t)$$

Para calcular los momentos flectores a lo largo de los bordes empotrados se procede como en el caso de una carga uniforme y se obtiene el mismo sistema de ecuaciones (m) y (n). Las expresiones de w_1 y w_2 son las mismas que en el caso anterior, y será suficiente cambiar el primer término de estas ecuaciones sustituyendo $(\partial w/\partial y)_{y\ b/2}$ de (m), por la expresión (t), y lo mismo para $(\partial w/\partial x)_{x\ a/2}$ en la ecuación (n).

En el caso particular de una placa cuadrada, limitándonos a cuatro ecuaciones, encontramos que el primer miembro de las ecuaciones es el mismo que en las ecuaciones (p). Los segundos miembros se obtienen por la expresión (t) y se encuentra

$$\begin{aligned}
1{,}8033E_1 + \boxed{0{,}0764E_3} + 0{,}0188E_5 + 0{,}0071E_7 &= -0{,}1828P\\
0{,}0764E_1 + \boxed{0{,}4045E_3} + \boxed{0{,}0330E_5} + 0{,}0159E_7 &= +0{,}00299P\\
0{,}0188E_1 + 0{,}0330E_3 + \boxed{0{,}2255E_5} + \boxed{0{,}0163E_7} &= -0{,}000081P\\
0{,}0071E_1 + 0{,}0159E_3 + 0{,}0163E_5 + \boxed{0{,}1558E_7} &= +0{,}000005P
\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones por aproximaciones sucesivas como antes, se encuentra

$$\begin{aligned}
E_1 &= -0{,}1025P & E_3 &= 0{,}0263P\\
E_5 &= \ \ 0{,}0042P & E_7 &= 0{,}0015P
\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (c), se obtiene el momento flector para el centro del lado $y = b/2$. Un cálculo[1] más preciso da

$$(M_y)_{y\ b/2,x\ 0} = -\ 0{,}1257P$$

Comparando este resultado al de una placa cuadrada uniformemente cargada, se llega a que la carga uniforme produce en el centro de los lados momentos menores de la mitad que los momentos debidos a esta misma carga concentrada en el centro.

Conociendo los momentos a lo largo de los bordes empotrados, se calculan las flechas correspondientes mediante (d). Superponiendo estas flechas a las de una placa simplemente apoyada, se obtienen las flechas de la placa de bordes empotrados. Por el mismo método de superposición se encuentran otros datos relativos a la deformación de placas de bordes empotrados sometidos a una carga concentrada en el centro[2]. Así, si la

[1] En este cálculo se utilizaron siete ecuaciones en lugar de las cuatro tomadas antes.

[2] Cálculos efectuados por Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-114, 1939. Para obtener los momentos con cuatro cifras exactas, es necesario utilizar siete coeficientes E y otros siete F en las ecuaciones (m) y (n). H. Marcus dio otras soluciones del problema, véase *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2.ª ed., pág. 155, Berlín, 1932; igualmente J. Barta, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 17, pág. 184, 1937; G. Pickett, *J. Appl. Mechanics*, vol. 6, pág. A-168, 1939; C. J. Thorne y J. V. Atanasoff, *Iowa State Coll. J. Sci.*, vol. 14, pág. 333, 1940. R. G. Sturm y R. L. Moore han estudiado este caso experimentalmente, véase *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, página A-75, 1937.

Librodot

carga P está repartida uniformemente sobre el área de un pequeño círculo o de un rectángulo, los momentos flectores en el centro del área cargada $x = y = 0$, se obtienen por combinación de los resultados válidos para las placas simplemente apoyadas [v. ec. (157) y (167)] con momentos adicionales

$$m_x = \beta_1 P \qquad m_y = \beta_2 P$$

dados en la tabla 37 con los valores relativos a la flecha máxima de la placa así como el momento de empotramiento máximo en valor absoluto. Este último puede como máximo alcanzar el valor $-P/\pi = -0{,}3183P$, mencionado en la página 216, en el caso de una carga móvil.

TABLA 37

Momentos flectores en los puntos medios de los lados mayores y flechas y momentos adicionales en el centro de placas rectangulares bajo carga concentrada en el centro (fig. 93)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$(w)_{x=y=0} = \alpha \frac{Pa^2}{D}$	$(M_y)_{x=0,\ y=b/2} = \gamma P$	Momentos adicionales	
			$(m_x)_{x=y=0} = \beta_1 P$	$(m_y)_{x=y=0} = \beta_2 P$
	α	γ	β_1	β_2
1,0	0,00560	−0,1257	−0,0536	−0,0536
1,2	0,00647	−0,1490	−0,0579	−0,0526
1,4	0,00691	−0,1604	0,0618	0,0517
1,6	0,00712	−0,1651	−0,0653	−0,0510
1,8	0,00720	−0,1667	−0,0683	−0,0504
2,0	0,00722	−0,1674	−0,0710	−0,0500
∞	0,00725	−0,168	−0,0742	−0,0484

45. *Placas rectangulares con un borde o dos adyacentes simplemente apoyados y los restantes empotrados*

Comencemos por el caso de una placa simplemente apoyada sobre el borde $y = 0$ y empotrada en los otros lados (fig. 94). Cualquiera que sea la forma en la que la carga está distribuida sobre la placa *sstt*, se considera ésta como igual a la mitad de una placa *rrtt* que tiene todos sus bordes empotrados y soporta una carga antisimétrica con relación a la línea *ss*. De este modo las flechas y los momentos flectores son nulos a lo largo de esta línea. El problema se reduce entonces al problema ya resuelto en el apartado 44. La tabla 38[1] da algunos valores numéricos relativos a dos casos de distribución de carga. En la página 270 se da una tabla más completa de los momentos flectores en relación con un método de proyecto de losas. La

[1] Estos resultados se deben a Dana Young, *J. Appl. Mechanics*, vol. 7, pág. A-139, 1940, y a C. P. Siess y N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, vol. 47, pág. 98, 1950. Y. S. Yflyand utilizó un método completamente distinto para tratar este problema; véase *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 72, pág. 655, 1950.

Librodot

placa rectangular *rsut* (fig. 95), en la que dos lados adyacentes $x = 0$ e $y = 0$ están simplemente apoyados, y los otros dos están empotrados, puede estar considerada en cierto modo, como parte integrante de la placa limitada por $x = \pm a$, $y = \pm b$, y empotrada en todo su contorno.

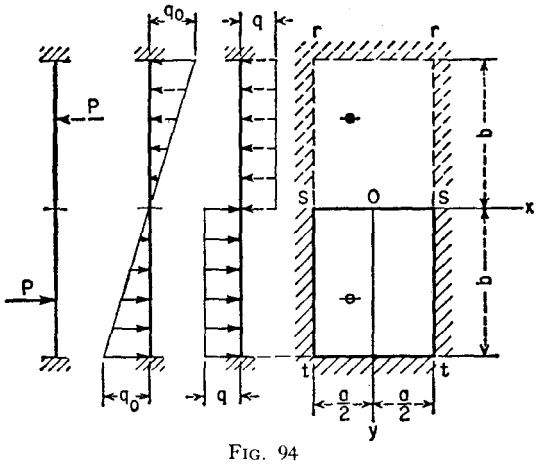


FIG. 94

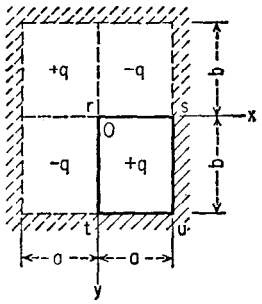


FIG. 95

Consideremos una carga uniformemente repartida sobre el área *rsut* de la placa dada[1]. Una carga constante de signo alternado en forma de tablero de damas e intensidad repartida sobre el área $2a \cdot 2b$, como indica la figura 95, crea entonces las condiciones de un borde simplemente apoyado a lo largo de las líneas $x = 0$, $y = 0$. Por consiguiente, el problema de flexión de una placa que tiene dos bordes adyacentes simplemente apoyados y los otros dos empotrados, se transforma en el problema ya resuelto del apartado 44, de una placa empotrada en todo su contorno. Los resulta-

TABLA 38

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con un borde simplemente apoyado y los otros tres empotrados (fig. 94)

Carga	b/a	$(w)_{x=0,\ y=b/2}$	$(M_x)_{x=a/2,\ y=b/2}$	$(M_y)_{x=0,\ y=b}$
Presión uniforme q	0,5	$0{,}00449qb^4/D$	$-0{,}0786qb^2$	$-0{,}1148qb^2$
	0,75	$0{,}00286qb^4/D$	$-0{,}0730qb^2$	$-0{,}0838qb^2$
	1,0	$0{,}00157qb^4/D$	$-0{,}0601qb^2$	$-0{,}0551qb^2$
	$\frac{1}{3}$	$0{,}00215qa^4/D$	$-0{,}0750qa^2$	$-0{,}0571qa^2$
	2,0	$0{,}00257qa^4/D$	$-0{,}0837qa^2$	$-0{,}0571qa^2$
Presión hidrostática q_0y/b. .	0,5	$0{,}00202q_0b^4/D$	$-0{,}0368q_0b^2$	$-0{,}0623q_0b^2$
	0,75	$0{,}00132q_0b^4/D$	$-0{,}0344q_0b^2$	$-0{,}0484q_0b^2$
	1,0	$0{,}00074q_0b^4/D$	$-0{,}0287q_0b^2$	$-0{,}0347q_0b^2$

[1] Para el estudio de este caso Siess en Newmark (trabajo citado) han aplicado una modificación del método de Timoshenko. Para la utilización del método de la energía véase W. B. Stiles, *J. Appl. Mechanics*, vol. 14, pág. A-35, 1947. Véase también M. K. Huang y H. D. Conway, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 451, 1952.

Librodot

dos muestran que el momento máximo en valor absoluto, se sitúa en el centro del lado mayor de la placa. Los valores de este momento de empotramiento son $-0{,}1180qb^2$ para $b/a = 0{,}5$ y $-0{,}0694qb^2$ para $b/a = 1{,}0$. El momento flector máximo en el centro de la placa cuadrada, vale $0{,}034qa^2$ (para $\nu = 0{,}3$) y la flecha correspondiente es $0{,}0023qa^4/D$. En la página 269 se dan otros datos numéricos relativos a los momentos flectores en este caso.

46. *Placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, uno libre y el cuarto empotrado o simplemente apoyado*[1]

Supongamos los bordes $x = 0$ y $x = a$ (fig. 96) simplemente apoyados, el borde $y = b$ libre y el borde $y = 0$ empotrado. En este caso, las condiciones de borde son

$$w = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = a \tag{a}$$

$$w = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \tag{b}$$

y a lo largo del borde libre [v. ec. (112), (113), pág. 104].

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0 \qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \, \partial y}\right]_{y=b} = 0 \tag{c}$$

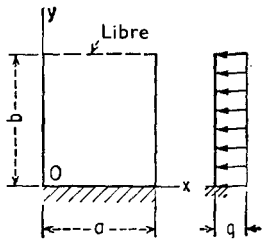


FIG. 96

En el caso particular de una carga uniformemente repartida se opera como en el apartado 30 y se supone que la flecha está compuesta de dos partes

$$w = w_1 + w_2$$

donde w_1 representa la flecha de una franja uniformemente cargada y simplemente apoyada de anchura a que puede escribirse en forma de serie

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \tag{d}$$

[1] Este caso fue estudiado por Boobnov; véase la traducción inglesa de su obra en *Trans. Inst. Naval Arch.*, vol. 44, pág. 15, 1902, y su *Theory of Structure of Ships*, vol. 2, pág. 545, San Petersburgo, 1914. Fue estudiado también por K. Goriupp, *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 77, 1947, y por V. Bogunovic, «On the Bending of a Rectangular Plate with One Edge Free», Belgrado, 1953.

Librodot

y w_2 viene dada por

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

donde

$$Y_m = \frac{qa^4}{D}\left(A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (f)$$

Las series (*d*) y (*e*) satisfacen las condiciones de contorno (*a*), y se determinan las cuatro constantes de (*f*) de tal manera que cumplan las condiciones (*b*) y (*c*). Entonces de (*b*) obtenemos

$$A_m = -\frac{4}{\pi^5 m^5} \qquad C_m = -D_m \qquad (g)$$

De las dos condiciones restantes (*c*) hallamos

$$B_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \beta_m + 2\nu \operatorname{ch} \beta_m - \nu(1-\nu)\beta_m \operatorname{sh} \beta_m - (1-\nu^2)}{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2\beta_m^2 + (1+\nu)^2}$$

$$C_m = \frac{4}{\pi^5 m^5} \frac{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh} \beta_m \operatorname{ch} \beta_m + \nu(1+\nu)\operatorname{sh} \beta_m - \nu(1-\nu)\beta_m \operatorname{ch} \beta_m - (1-\nu)^2\beta_m}{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{ch}^2 \beta_m + (1-\nu)^2\beta_m^2 + (1+\nu)^2} \qquad (h)$$

donde $\beta_m = m\pi b/a$.

Sustituyendo las constantes (*g*) y (*h*) en (*f*) y utilizando las series (*e*) y (*d*), se obtiene la expresión de la deformada. La flecha máxima se produce, en este caso, en el centro del borde libre. Si b es muy grande en comparación con a, es decir si el borde libre está lejos del borde empotrado, la flecha del borde libre es la misma que la de una franja de longitud a, uniformemente cargada y simplemente apoyada, multiplicada por el factor constante $(3-\nu)(1+\nu)/(3+\nu)$. Resultando de la presencia de este factor que la flecha máxima es un 6,4 % mayor que la de la franja, para $\nu = 0{,}3$. Esto se explica fácilmente si se tiene en cuenta que junto al borde libre la placa está flexada según una superficie anticlástica.

Consideremos otro caso extremo, en el que a es muy grande en comparación con b, la flecha máxima de la placa es evidentemente la misma que la de una franja de longitud b uniformemente cargada, empotrada en un

Librodot

extremo y libre en otro. La tabla 39 da varios valores de la flecha máxima calculados[1] para diferentes relaciones b/a. Da también los valores máximos de los momentos flectores que se calculan igualmente a partir de la expresión de la deformada. Los cálculos muestran que $(M_x)_{\text{máx}}$ se produce en el centro del borde libre. El máximo valor absoluto del momento M_y se sitúa en el centro del borde empotrado.

TABLA 39

Flechas y momentos flectores en placa uniformemente cargada con dos bordes opuestos simplemente apoyados, el tercer borde libre y el cuarto empotrado (fig. 96)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$w_{\text{máx}}$	$x = a/2,\ y = b$	$x = a/2,\ y = 0$
		M_x	M_y
0	$0{,}125qb^4/D$	0	$-0{,}500qb^2$
$\frac{1}{3}$	$0{,}094qb^4/D$	$0{,}0078qa^2$	$-0{,}428qb^2$
$\frac{1}{2}$	$0{,}0582qb^4/D$	$0{,}0293qa^2$	$-0{,}319qb^2$
$\frac{2}{3}$	$0{,}0335qb^4/D$	$0{,}0558qa^2$	$-0{,}227qb^2$
1	$0{,}0113qb^4/D$	$0{,}0972qa^2$	$-0{,}119qb^2$
$\frac{3}{2}$	$0{,}0141qa^4/D$	$0{,}123qa^2$	$-0{,}124qa^2$
2	$0{,}0150qa^4/D$	$0{,}131qa^2$	$-0{,}125qa^2$
3	$0{,}0152qa^4/D$	$0{,}133qa^2$	$0{,}125qa^2$
∞	$0{,}0152qa^4/D$	$0{,}133qa^2$	$-0{,}125qa^2$

Se trata de la misma manera, el caso de una carga hidrostática repartida según la ley $q_0(1 - y/b)$. Pondremos la flecha en la forma

$$w = \frac{4q_0(1 - y/b)a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (i)$$

donde Y_m es de la forma de (f), con q_0 como constante en lugar de q. Operando, como anteriormente, se obtienen las cuatro constantes A_m, B_m ... D_m a partir de las condiciones en los límites (a), (b) y (c).

Si la placa está flexada por una carga repartida en el borde libre, en lugar de serlo, por una carga repartida sobre la superficie, se debe modificar la segunda de las condiciones (c) sustituyendo el cero del segundo miembro por la intensidad de la carga repartida en el borde libre. Se ha estudiado[2] (fig. 97), el caso particular de una fuerza concentrada aplicada en el borde

[1] Esta tabla se debe a Boobnov, *op. cit.*

[2] Véase C. W. Mac Gregor, *Mech. Eng.*, vol. 57, pág. 225, 1935. D. L. Holl, *J. Appl. Mechanics*, vol. 4, pág. 8, 1937; T. J. Jaramillo, *J. Appl. Mechanics*, vol. 17, pág. 67, 1950; y K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 4.ª ed., pág. 233, Viena, 1956. El caso de una placa cantilever con tres bordes libres y carga uniformemente repartida fue estudiado por W. A. Nash, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 33, 1952. Véase también el estudio de este tipo de placa hecho por W. T. Koiter y J. B. Alblas con resultados numéricos en *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Amsterdam*, vol. 60, pág. 173, 1957.

Librodot

libre de una placa muy larga. La flecha a lo largo de este borde está dada por la fórmula

$$(w)_{y=b} = \alpha \frac{Pb^2}{D}$$

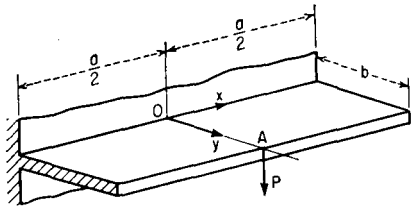


FIG. 97

El factor α disminuye rápidamente cuando la distancia del punto A de aplicación de la carga aumenta. La tabla 40 expone varios valores de α. La tabla 41 da los valores absolutos máximos del momento de empotramiento

TABLA 40

$x =$	0	$b/4$	$b/2$	b	$2b$
$\alpha =$	0,168	0,150	0,121	0,068	0,016

TABLA 41

Momentos flectores $M = \beta P$, para $x = 0$, $y = 0$, debidos a carga concentrada P en $x = 0$, $y = b$, estando los bordes $x = \pm a/2$ simplemente apoyados (fig. 97)

$\nu = 0,3$

$b/a =$	4	2	1,5	1	$\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25	0
$\beta =$	−0,000039	−0,0117	−0,0455	−0,163	−0,366	−0,436	−0,498	−0,507	−0,509

debido a una carga que actúa en el centro del borde libre de una placa de longitud finita[1] a.

El caso de una placa rectangular uniformemente cargada simplemente apoyada sobre tres bordes y libre en $y = b$ (fig. 98), se trata de la misma manera que el caso anterior en que el borde $q = 0$ estaba empotrado.

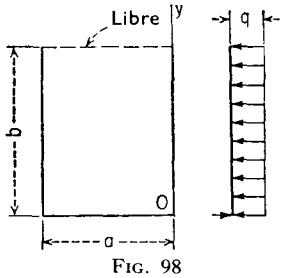


FIG. 98

[1] Esta tabla es debida a V. Bogunovic, *op. cit.* Véase también apartado 78.

Librodot

Basta sustituir la segunda de las condiciones de borde (b) por

$$\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]_{y=0} = 0$$

Omitiendo las deducciones damos solamente el resultado numérico final obtenido para este caso. La flecha máxima se produce en el centro del borde libre así como el momento flector máximo M_x. Estos valores de las flechas $w_{máx}$ y $(M_x)_{máx}$ están dados en la segunda y tercera columnas de la tabla 42[1]. Las dos últimas dan los momentos flectores en el centro de la placa.

TABLA 42

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares uniformemente cargadas con tres bordes simplemente apoyados y el cuarto borde libre (fig. 98)

$\nu = 0{,}3$

b/a	$x = a/2,\ y = b$		$x = a/2,\ y = b/2$	
	$w_{máx}$	$(M_x)_{máx}$	M_x	M_y
$\frac{1}{2}$	$0{,}00710qa^4/D$	$0{,}060qa^2$	$0{,}039qa^2$	$0{,}022qa^2$
$\frac{2}{3}$	$0{,}00968qa^4/D$	$0{,}083qa^2$	$0{,}055qa^2$	$0{,}030qa^2$
1/1,4	$0{,}01023qa^4/D$	$0{,}088qa^2$	$0{,}059qa^2$	$0{,}032qa^2$
1/1,3	$0{,}01092qa^4/D$	$0{,}094qa^2$	$0{,}064qa^2$	$0{,}034qa^2$
1/1,2	$0{,}01158qa^4/D$	$0{,}100qa^2$	$0{,}069qa^2$	$0{,}036qa^2$
1/1,1	$0{,}01232qa^4/D$	$0{,}107qa^2$	$0{,}074qa^2$	$0{,}037qa^2$
1,0	$0{,}01286qa^4/D$	$0{,}112qa^2$	$0{,}080qa^2$	$0{,}039qa^2$
1,1	$0{,}01341qa^4/D$	$0{,}117qa^2$	$0{,}085qa^2$	$0{,}040qa^2$
1,2	$0{,}01384qa^4/D$	$0{,}121qa^2$	$0{,}090qa^2$	$0{,}041qa^2$
1,3	$0{,}01417qa^4/D$	$0{,}124qa^2$	$0{,}094qa^2$	$0{,}042qa^2$
1,4	$0{,}01442qa^4/D$	$0{,}126qa^2$	$0{,}098qa^2$	$0{,}042qa^2$
1,5	$0{,}01462qa^4/D$	$0{,}128qa^2$	$0{,}101qa^2$	$0{,}042qa^2$
2,0	$0{,}01507qa^4/D$	$0{,}132qa^2$	$0{,}113qa^2$	$0{,}041qa^2$
3,0	$0{,}01520qa^4/D$	$0{,}133qa^2$	$0{,}122qa^2$	$0{,}039qa^2$
∞	$0{,}01522qa^4/D$	$0{,}133qa^2$	$0{,}125qa^2$	$0{,}037qa^2$

TABLA 43

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares con tres bordes simplemente apoyados y el cuarto borde libre, bajo carga hidrostática (fig. 99)

b/a	$x = a/2,\ y = b$		$x = a/2,\ y = b/2$		
	w	M_x	w	M_x	M_y
$\frac{1}{2}$	$0{,}00230q_0a^4/D$	$0{,}0197q_0a^2$	$0{,}00135q_0a^4/D$	$0{,}0145q_0a^2$	$0{,}0120q_0a^2$
$\frac{2}{3}$	$0{,}00304q_0a^4/D$	$0{,}0265q_0a^2$	$0{,}00207q_0a^4/D$	$0{,}0220q_0a^2$	$0{,}0156q_0a^2$
1,0	$0{,}00368q_0a^4/D$	$0{,}0325q_0a^2$	$0{,}00313q_0a^4/D$	$0{,}0331q_0a^2$	$0{,}0214q_0a^2$
1,5	$0{,}00347q_0a^4/D$	$0{,}0308q_0a^2$	$0{,}00445q_0a^4/D$	$0{,}0453q_0a^2$	$0{,}0231q_0a^2$
2,0	$0{,}00291q_0a^4/D$	$0{,}0258q_0a^2$	$0{,}00533q_0a^4/D$	$0{,}0529q_0a^2$	$0{,}0222q_0a^2$
∞	0	0	$0{,}00651q_0a^4/D$	$0{,}0625q_0a^2$	$0{,}0187q_0a^2$

[1] Esta tabla y la tabla 43 fueron calculadas por B. G. Galerkin; véase *Bull. Polytech. Inst.*, volumen 26, pág. 124, San Petersburgo, 1915.

Librodot

La tabla 43, contiene en forma similar los valores de las flechas y de los momentos flectores producidos en el centro del borde libre y en el centro de la placa por una carga hidrostática.

47. *Placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto borde libre*

Placas, con tales condiciones en los bordes presentan un interés particular como partes integrantes de depósitos rectangulares o muros de contención. Por consiguiente, se considerará en este caso, en primer lugar, las cargas uniformemente repartidas e hidrostáticas.

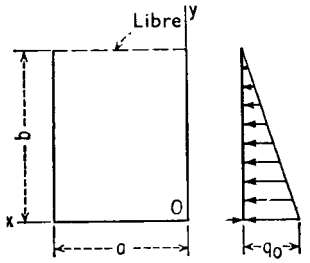


FIG. 99

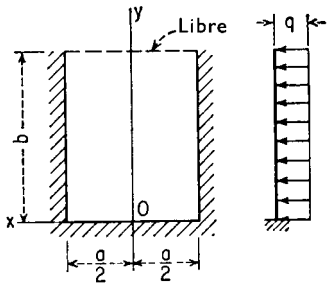


FIG. 100

Supongamos el contorno de la placa empotrada en $y = 0$, $x = \pm a/2$ y libre en $y = b$ (fig. 100). Supongamos primero una carga de intensidad q, uniformemente repartida, la ecuación de las flechas puede ponerse en la forma

$$w = w_1 + w_2 + w_3 \tag{a}$$

Siendo

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^5} \cos\frac{m\pi x}{a} \tag{b}$$

y

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m (-1)^{(m-1)/2} \cos\frac{m\pi x}{a} \tag{c}$$

contenidas en (a) idénticas a (d) y (e) del apartado anterior, si se considera la nueva posición del origen.

Las flechas adicionales w_3, debidas a las coacciones adicionales en los bordes $x = \pm a/2$, se escriben de la forma[1]

[1] Este método de solución se debe fundamentalmente a Goriupp, *op. cit.*, pág. 153, 1948. Véase también W. J. Van der Eb, *Ingenieur*, vol. 26, pág. 31, 1950.

Librodot

TABLA 44

Flechas, momentos flectores y reacciones de placas rectangulares uniformemente cargadas con tres bordes empotrados y el cuarto libre (fig. 100)

$\nu = 1/6$

$\frac{b}{a}$	$x = 0,\ y = b$		$x = 0,\ y = b/2$			$x = a/2,\ y = b$		$x = a/2,\ y = b/2$		$x = 0,\ y = 0$	
	$w = \alpha_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2 qa^2$	$M_y = \beta'_2 qa^2$	$M_x = \beta_3 qa^2$	$V_x = \gamma_3 qa$	$M_x = \beta_4 qa^2$	$V_x = \gamma_4 qa$	$M_y = \beta'_4 qa^2$	$V_y = \gamma_5 qa$
	α_1	β_1	α_2	β_2	β'_2	β_3	γ_3	β_4	γ_4	β'_4	γ_5
0,6	0,00271	0,0336	0,00129	0,0168	0,0074	−0,0745	0,750	−0,0365	0,297	−0,0554	0,416
0,7	0,00292	0,0371	0,00159	0,0212	0,0097	−0,0782	0,717	−0,0439	0,346	−0,0545	0,413
0,8	0,00308	0,0401	0,00185	0,0252	0,0116	−0,0812	0,685	−0,0505	0,385	−0,0535	0,410
0,9	0,00323	0,0425	0,00209	0,0287	0,0129	−0,0836	0,656	−0,0563	0,414	−0,0523	0,406
1,0	0,00333	0,0444	0,00230	0,0317	0,0138	−0,0853	0,628	−0,0614	0,435	−0,0510	0,401
1,25	0,00345	0,0467	0,00269	0,0374	0,0142	−0,0867	0,570	−0,0708	0,475	−0,0470	0,388
1,5	0,00335	0,0454	0,00290	0,0402	0,0118	−0,0842	0,527	−0,0755	0,491	−0,0418	0,373

Librodot

$$w_3 = \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(F_n \gamma_n \operatorname{th} \gamma_n \operatorname{ch} \frac{n\pi x}{2b} - F_n \frac{n\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{2b} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{2b}$$

$$+ \frac{qa^4}{D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(G_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + H_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + I_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \cos \frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

donde F_n ... I_m son las constantes y $\gamma_n = n\pi a/4b$.

Puesto que $w_3 = 0$ para $y = 0$ y $x = \pm a/2$, las condiciones en los bordes que deben cumplir también las flechas (d) son:

$$\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0 \qquad \left[\frac{\partial^3 w_3}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_3}{\partial x^2 \, \partial y}\right]_{y=b} = 0$$
$$\left(\frac{\partial w_3}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \qquad \left[\frac{\partial (w_1 + w_2 + w_3)}{\partial x}\right]_{x=\pm a/2} = 0 \qquad (e)$$

Desarrollemos ahora todas las funciones no circulares de x, contenidas en (a), en serie de la forma $\Sigma a_m \cos (m\pi x/a)$ y todas las funciones similares de y, en serie de la forma $\Sigma b_n \operatorname{sen} (n\pi y/2b)$. Se obtienen entonces a partir de las condiciones (e) una serie de ecuaciones lineales para $F_n G_n$, ..., I_n. Resolviendo las ecuaciones se pueden expresar las constantes desconocidas por los valores conocidos A_m ... D_m (v. pág. 233).

En el caso de una presión hidrostática (v. fig. 101), se superpone la solución (i) del apartado anterior a la solución (d) y se opera como se ha indicado anteriormente.

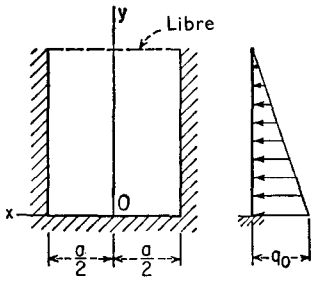


FIG. 101

Cualquiera que sea la carga, el problema puede tratarse por el método de diferencias finitas (v. ap. 83). Los valores de las tablas 44 y 45 están esencialmente calculados por este método[1]

[1] Véase A. Smotrov, «Solution for Plates Loaded According to the Law of Trapeze», Moscú, 1936.

Librodot

TABLA 45

Flechas, momentos flectores y reacciones de placas rectangulares con tres bordes empotrados y el cuarto libre, bajo carga hidrostática (fig. 101)

$\nu = 1/6$

$\frac{b}{a}$	$x = 0,\ y = b$		$x = 0,\ y = b/2$			$x = a/2,\ y = b$		$x = a/2,\ y = b/2$		$x = 0,\ y = 0$	
	$w = a_1 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_1 q_0 a^2$	$w = \alpha_2 \frac{q_0 a^4}{D}$	$M_x = \beta_2 q_0 a^2$	$M_y = \beta'_2 q_0 a^2$	$M_x = \beta_3 q_0 a^2$	$V_x = \gamma_3 q_0 a$	$M_x = \beta_4 q_0 a^2$	$V_x = \gamma_4 q_0 a$	$M_y = \beta_5 q_0 a^2$	$V_y = \gamma_5 q_0 a$
	a_1	β_1	α_2	β_2	β'_2	β_3	γ_3	β_4	γ_4	β_5	γ_5
0,6	0,00069	0,0089	0,00044	0,0060	0,0062	−0,0179	0,093	−0,0131	0,136	−0,0242	0,248
0,7	0,00069	0,0093	0,00058	0,0080	0,0074	−0,0172	0,081	−0,0170	0,158	−0,0261	0,262
0,8	0,00068	0,0096	0,00072	0,0100	0,0083	−0,0164	0,069	−0,0206	0,177	−0,0278	0,275
0,9	0,00067	0,0096	0,00085	0,0118	0,0090	−0,0156	0,057	−0,0239	0,194	−0,0290	0,286
1,0	0,00065	0,0095	0,00097	0,0135	0,0094	−0,0146	0,045	−0,0269	0,209	−0,0299	0,295
1,25	0,00056	0,0085	0,00121	0,0169	0,0092	−0,0119	0,018	−0,0327	0,234	−0,0306	0,309
1,5	0,00042	0,0065	0,00138	0,0191	0,0075	−0,0087	−0,006	−0,0364	0,245	−0,0291	0,311

Librodot

48. Placas rectangulares con los dos bordes opuestos simplemente apoyados y los otros dos libres o elásticamente apoyados

Sea el caso en que los bordes $x = 0$, $x = a$ (fig. 102) están simplemente apoyados y los otros apoyados sobre vigas elásticas. Supongamos que la carga está uniformemente repartida y que las vigas son idénticas la deformada de la placa es simétrica con relación al eje x y se han de tener en

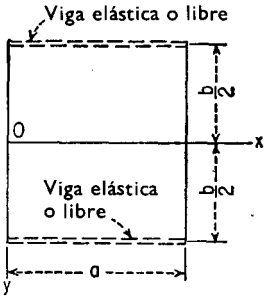


FIG. 102

cuenta solamente las condiciones a lo largo de $y = b/2$. Supongamos que las vigas resisten a la flexión en planos verticales y no a la torsión, las condiciones de contorno en el borde $y = b/2$ son, utilizando (114)

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=b/2} = 0$$
$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}\right]_{y=b/2} = \left(EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{y=b/2} \qquad (a)$$

donde EI es la rigidez a la flexión de las vigas de apoyo. Operando como en el apartado 46, puede ponerse la deformada en la forma

$$w = w_1 + w_2 \qquad (b)$$

donde

$$w_1 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (c)$$

y

$$w_2 = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

Por razón de simetría, se deduce que hay que poner $C_m = D_m = 0$ en la expresión (f) del apartado 46, y tomar

$$Y_m = \frac{qa^4}{D}\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right) \qquad (e)$$

Las otras dos constantes A_m, B_m se obtienen por las condiciones de contorno (a), de donde, utilizando las notaciones

$$\frac{m\pi b}{2a} = \alpha_m \qquad \frac{EI}{aD} = \lambda$$

se obtiene

$$A_m(1-\nu)\operatorname{ch}\alpha_m + B_m[2\operatorname{ch}\alpha_m + (1-\nu)\alpha_m \operatorname{sh}\alpha_m] = \frac{4\nu}{m^5\pi^5}$$

$$-A_m[(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_m + m\pi\lambda\operatorname{ch}\alpha_m] + B_m[(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha_m$$

$$-(1-\nu)\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m - m\pi\lambda\alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m] = \frac{4\lambda}{m^4\pi^4}$$

Resolviendo, estas ecuaciones encontramos

$$A_m = \frac{4}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\nu(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha_m - \nu(1-\nu)\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m - m\pi\lambda(2\operatorname{ch}\alpha_m + \alpha_m\operatorname{sh}\alpha_m)}{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m - (1-\nu)^2\alpha_m + 2m\pi\lambda\operatorname{ch}^2\alpha_m} \qquad (f)$$

$$B_m = \frac{4}{m^5\pi^5} \cdot \frac{\nu(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_m + m\pi\lambda\operatorname{ch}\alpha_m}{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_m\operatorname{ch}\alpha_m - (1-\nu)^2\alpha_m + 2m\pi\lambda\operatorname{ch}^2\alpha_m} \qquad (g)$$

La deformada de la placa se obtiene sustituyendo los valores de las constantes en

$$w = w_1 + w_2 = \frac{qa^4}{D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m\frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{m\pi y}{a} \qquad (h)$$

Si las vigas de apoyo son absolutamente rígidas, $\lambda = \infty$ en (f) y (g), y $A_m B_m$ tienen el mismo valor que en el apartado 30, para una placa en la que los cuatro lados están apoyados sobre soportes rígidos.

Sustituyendo λ por 0 en (f) y (g), se encuentran los valores de las constantes de la serie (h) en el caso en que dos lados de la placa están simplemente apoyados y los otros dos libres.

La flecha y los momentos flectores máximos se sitúan en el centro de la placa salvo para valores muy pequeños de λ. La tabla 46[1] da varios valores de estas cantidades en función de los valores de λ.

[1] La tabla ha sido calculada por K. A. Čališev, *Mem. Inst. Engrs. Ways Commun.*, San Petersburgo, 1914. Más recientemente ha estudiado el problema E. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 2, página 606, 1932. En este trabajo se calculan tablas para casos no simétricos. V. P. Jensen, en *Univ. Illinois Bull.*, 81, 1938, estudió varios casos de placas rectangulares y continuas apoyadas en vigas flexibles.

Librodot

TABLA 46

Flechas y momentos flectores en el centro de placa cuadrada uniformemente cargada con dos bordes simplemente apoyados y los otros dos apoyados en vigas elásticas (fig. 102)

$\nu = 0{,}3$

$\lambda = EI/aD$	$w_{máx}$	$(M_x)_{máx}$	$(M_y)_{máx}$
∞	$0{,}00406qa^4/D$	$0{,}0479qa^2$	$0{,}0479qa^2$
100	$0{,}00409qa^4/D$	$0{,}0481qa^2$	$0{,}0477qa^2$
30	$0{,}00416qa^4/D$	$0{,}0486qa^2$	$0{,}0473qa^2$
10	$0{,}00434qa^4/D$	$0{,}0500qa^2$	$0{,}0465qa^2$
6	$0{,}00454qa^4/D$	$0{,}0514qa^2$	$0{,}0455qa^2$
4	$0{,}00472qa^4/D$	$0{,}0528qa^2$	$0{,}0447qa^2$
2	$0{,}00529qa^4/D$	$0{,}0571qa^2$	$0{,}0419qa^2$
1	$0{,}00624qa^4/D$	$0{,}0643qa^2$	$0{,}0376qa^2$
0,5	$0{,}00756qa^4/D$	$0{,}0744qa^2$	$0{,}0315qa^2$
0	$0{,}01309qa^4/D$	$0{,}1225qa^2$	$0{,}0271qa^2$

El caso particular $\lambda = 0$ de una placa con los dos bordes opuestos simplemente apoyados, y los otros dos libres, merece alguna consideración. Como muestra la tabla 47[1] las flechas y los momentos máximos de una placa tal, cargada uniformemente,

TABLA 47

Flechas y momentos flectores en placas rectangulares uniformemente cargadas con los bordes $x = 0$, $x = a$ simplemente apoyados y los otros dos libres (fig. 102)

$\nu = 0{,}3$

	$x = a/2,\ y = 0$			$x = a/2,\ y = \pm b/2$	
b/a	$w = \alpha_1 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_1 qa^2$	$M_y = B'_1 qa^2$	$w = \alpha_2 \frac{qa^4}{D}$	$M_x = \beta_2 qa^2$
	α_1	β_1	β'_1	α_2	β_2
0,5	0,01377	0,1235	0,0102	0,01443	0,1259
1,0	0,01309	0,1225	0,0271	0,01509	0,1318
2,0	0,01289	0,1235	0,0364	0,01521	0,1329
∞	0,01302	0,1250	0,0375	0,01522	0,1330

difieren poco de las flechas y de los momentos de una placa flexada según una superficie cilíndrica.

49. Placas rectangulares con los cuatro bordes apoyados elásticamente o apoyadas en las esquinas con todos los bordes libres

Consideremos una placa sometida a una presión uniforme y apoyada sobre cuatro vigas flexibles a todo lo largo del contorno. Las vigas se supone que tienen soportes rígidos en los ángulos de la placa y las vigas paralelas entre sí tienen la misma rigidez a flexión (fig. 103).

[1] Estos resultados se deben a D. L. Holl, *Iowa State Coll. Eng. Exp. Sta. Bull.*, 129, 1936. Para el caso de carga concentrada, véase también R. Ohlig, *Ingr.-Arch.*, vol. 16, pág. 51, 1947. Ambos autores estudiaron también el efecto de empotramiento de los bordes de apoyo.

Librodot

Poniendo las flechas de la forma

$$w = \frac{q}{384D(\gamma+\delta)}[\gamma(16x^4 - 24a^2x^2 + 5a^4) + \delta(16y^4 - 24b^2y^2 + 5b^4)]$$
$$+ \sum A_n \operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}\cos\frac{n\pi x}{a} + \sum B_n \operatorname{ch}\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}$$
$$+ \sum C_n y \operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\cos\frac{n\pi x}{a} + \sum D_n x \operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (a)$$

donde δ/γ y A_n, ..., D_n son constantes cualesquiera y $n = 1, 3, 5, \ldots$, se satisface la ecuación diferencial $\Delta\Delta w = q/D$ de la placa y también las condiciones de simetría[1].

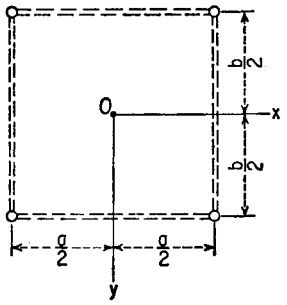


FIG. 103

Desarrollemos las funciones algebraicas e hiperbólicas de (a) en serie de cosenos. Entonces, utilizando para $x = a/2$ e $y = b/2$, las condiciones de borde similares a las (a) del apartado anterior, se obtiene un sistema de ecuaciones para las constantes A_n, ..., D_n de la expresión (a).

Sustituyamos, en particular, $\delta/\gamma = 0$ y $E_bI_b = \infty$, se llega a la solución del problema ya estudiado en el apartado 48.

Consideremos ahora, la flexión de una placa cuadrada ($a = b$) apoyada en cuatro vigas idénticas. Tenemos entonces, por simetría $\delta/\gamma = 1$; $A_n = B_n$; y $C_n = D_n$. Los coeficientes desconocidos A_n se eliminan, igualando a cero los momentos en los bordes. Tomemos cuatro términos ($n = 1$, 3, 5 y 7) de la serie (a), se obtienen cuatro ecuaciones lineales para C_1, C_3, C_5 y C_7. La tabla 48 da los resultados numéricos de los cálculos llevado a cabo por este método.

En el caso particular en que $EI = 0$, tenemos una placa cuadrada que soporta una carga uniformemente repartida y apoyada únicamente sobre los vértices. El valor de ν tiene poca influencia en las flechas y momentos en el centro de la placa, su influencia sobre los momentos de los bordes es más importante. Tomemos, por ejemplo, $\nu = 0{,}3$ los valores dados por la última línea de la tabla 48, donde $\nu = 0{,}25$ serían ahora 0,0249; 0,1090 y 0,1404, respectivamente[2].

[1] Este método de resolución se debe a B. G. Galerkin; véase su *Collected Papers*, vol. 2, página 15, Moscú, 1953. Las condiciones de contorno en consideración son fácilmente realizables y apropiadas para la verificación experimental de la teoría. Véase N. Dimitrov, *Bauingenieur*, vol. 32, pág. 359, 1957.

[2] Véase H. Marcus, *Die Theorie elasticher Gewebe*, 2.ª ed., pág. 173, Berlín, 1932; diversos casos de placas sujetas en puntos aislados han sido estudiados por A. Nádai, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922, y también por C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 15, pág. 73, 1948.

Librodot

TABLA 48

Flechas y momentos flectores en placa cuadrada con los cuatro lados elásticamente apoyados (fig. 103)

$\nu = 0{,}25$

$\gamma = \frac{EI}{aD}$	$x = 0,\ y = 0$		$x = 0,\ y = b/2$
	$w = \alpha \frac{qa^4}{D}$	$M_x = M_y = \beta_1 qa^2$	$M_x = \beta_2 qa^2$
	α	β_1	β_2
∞	0,00406	0,0460	0,0000
100	0,00412	0,0462	
50	0,00418	0,0463	
25	0,00429	0,0467	0,0002
10	0,00464	0,0477	0,0024
5	0,00519	0,0494	0,0065
4	0,00546	0,0502	0,0085
3	0,00588	0,0515	0,0117
2	0,00668	0,0539	0,0177
1	0,00873	0,0601	0,0332
0,5	0,01174	0,0691	0,0559
0	0,0257	0,1109	0,1527

El problema de la flexión de una placa cuadrada, cargada en el centro y fija en los vértices ha sido también objeto de estudio[1]. Si la carga P está uniformemente repartida sobre una pequeña superficie rectangular o circular, se puede deducir[2] una expresión para los momentos que actúan en el centro del área cargada. Tomemos, por ejemplo, un área cargada cuadrada de lado u, tales momentos para $\nu = 0{,}3$ toman la forma

$$M_x = M_y = \left(0{,}1034 \ln \frac{a}{u} + 0{,}129\right) P \qquad (b)$$

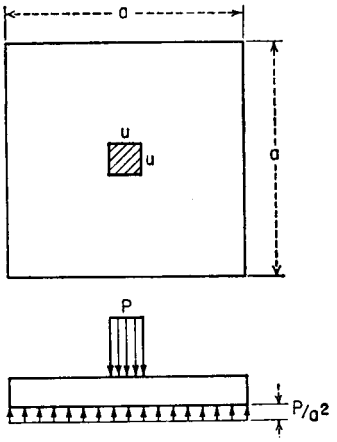


FIG. 104*a*

[1] Véase Marcus, *ibid.*

[2] Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 23, pág. 349, 1955.

Librodot

A partir de esta ecuación y de la de una placa cuadrada uniformemente cargada apoyada en los vértices, el problema de la figura 104 *a*) puede resolverse por el método de superposición. Se ve que si una placa cuadrada de borde libre está sostenida por reacciones uniformemente repartidas, los momentos flectores en el centro se obtienen restando el valor $M_x = M_y = 0{,}1090qa^2$ de la expresión (*b*), dada aquí, para una placa cuadrada uniformemente cargada y simplemente apoyada en sus vértices (con $\nu = 0{,}3$). Se obtiene entonces,

$$M_x = M_y = \left(0{,}1034 \ln \frac{a}{u} + 0{,}020\right) P \qquad (c)$$

válida para $\nu = 0{,}3$. La figura 104 *b*) indica el reparto de los momentos flectores a lo largo de la línea media de una placa de cimentación, para $u/a = 0{,}1$ y $u/a = 0{,}2$. Se puede suponer un reparto uniforme de la presión para una placa de cimentación muy rígida apoyada sobre terreno blando. En el capítulo 8, se admitirán hipótesis más generales respecto a la ley de distribución de esta presión.

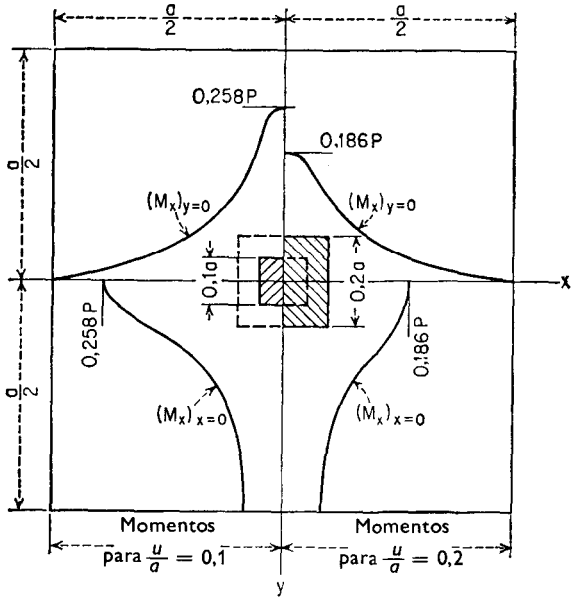


FIG. 104*b*

50. Placas rectangulares semiinfinitas sometidas a una presión uniforme

La deformada y la distribución de tensiones junto al lado menor de una placa rectangular larga, son prácticamente las mismas que las de los extremos de las placas semiinfinitas (v. fig. 105). Es sobre todo por esta razón por lo que la teoría sencilla de estas últimas placas merece algunas consideraciones. Sea una carga uniformemente repartida sobre el área de toda la placa y estén los bordes $x = 0$, $x = a$ simplemente apoyados[1].

[1] Las soluciones de este problema expuestas aquí se deben a A. Nádai, véase su obra *Elastische Platten*, pág. 72, Berlín, 1925.

Librodot

La superficie de la placa puede ponerse en la forma

$$w = w_1 + w_2 \tag{a}$$

donde

$$w_1 = \frac{q}{24D}(x^4 - 2ax^3 + a^3x) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{b}$$

es la solución particular de $\Delta\Delta w = q/D$, siendo q la intensidad de la carga y

$$w_2 = \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(A_m + B_m\frac{m\pi y}{a}\right)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{c}$$

es una solución de $\Delta\Delta w = 0$, que da flechas nulas $y = \infty$. Los coeficientes A_m y B_m, de los que aún podemos disponer deben determinarse de forma que satisfagan las condiciones de la placa a lo largo de $y = 0$. Consideremos los tres casos siguientes:

El borde y = 0 *está simplemente apoyado* [fig. 105 *a*)]

Las condiciones particulares que tiene que cumplir son $w = 0$ y $\partial^2 w/\partial y^2 = 0$, para $y = 0$. Sustituyendo las series quedan $w = w_1 + w_2$ en estas condiciones se

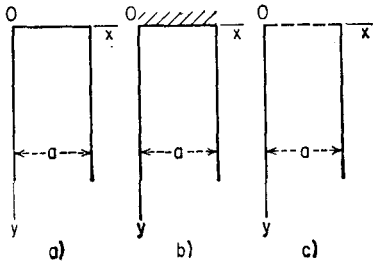


FIG. 105

tienen los valores $A_m = -1/m^3$ y $B_m = A_m/2$ para los coeficientes. Así llegamos a la deformada

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(1 + \frac{m\pi y}{2a}\right)\frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{d}$$

donde w_1 está dado por (*b*).

Los momentos flectores M_y, de la placa, tienen un interés particular. A lo largo de la línea media $x = a/2$ de la placa, tenemos, derivando

$$M_y = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[(1-\nu)\frac{m\pi y}{2a} - \nu\right]\frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3}(-1)^{(m-1)/2} \tag{e}$$

Utilizando la condición $\partial M_y/\partial y = 0$ y teniendo en cuenta el primer término de la serie rápidamente convergente, se llega a que M_y es máximo en

$$y = \frac{a}{\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

Librodot

La tabla 49 da los valores máximos de los momentos flectores y de las reacciones de los bordes V_y así como las fuerzas R que actúan hacia abajo, en las esquinas de la placa.

Debe notarse que el valor $0{,}0364qa^2$ supera en un 45 % el valor $0{,}0250qa^2$ de los momentos máximos M_y, de una placa de longitud infinita, para un mismo valor del coeficiente de Poisson en ambos casos.

TABLA 49

Máximos momentos flectores y reacciones en una placa semiinfinita uniformemente cargada con todos los bordes simplemente apoyados (fig. 105*a*)

ν	$(M_x)_{\text{máx}}$	$(M_y)_{\text{máx}}$	$(V_y)_{\text{máx}}$	R
0,2	$0{,}1250qa^2,\ x=\frac{a}{2},\ y=\infty$	$0{,}0364qa^2,\ x=\frac{a}{2},\ y=0{,}48a$	$0{,}520qa,\ x=\frac{a}{2},\ y=0$	$0{,}1085qa^2$
0,3	$0{,}1250qa^2,\ x=\frac{a}{2},\ y=\infty$	$0{,}0445qa^2,\ x=\frac{a}{2},\ y=0{,}59a$	$0{,}502qa,\ x=\frac{a}{2},\ y=0$	$0{,}0949qa^2$

El borde y = 0 *está empotrado* [fig. 105 *b*)]

Siguiendo el procedimiento general mencionado más arriba, pero utilizando esta vez las condiciones de bordes $w = 0$, $\partial w/\partial y = 0$ para $y = 0$, se obtiene en lugar de (*d*) la expresión

$$w = w_1 - \frac{4qa^4}{\pi^5 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(1+\frac{m\pi y}{a}\right)\frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (f)$$

donde w_1 está de nuevo dada por la ecuación (*b*). El momento flector correspondiente

$$M_y = \frac{\nu qa^2}{8} + \frac{4qa^2}{\pi^3}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left[(1-\nu)\frac{m\pi y}{a} - 1 - \nu\right]\frac{e^{-m\pi y/a}}{m^3}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

es máximo en $x = a/2$ e $y = 2a/\pi(1-\nu)$. Supongamos $\nu = 0{,}3$ se encuentra $y = 0{,}91a$ y $(M_y)_{\text{máx}} = 0{,}0427qa^2$, mientras que para $\nu = 0{,}2$, se obtienen respectivamente $y = 0{,}80a$ y $0{,}0387qa^2$. Se ve también que la variación de los momentos de empotramiento a lo largo del lado $y = 0$, obedece a la sencilla ley

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{q}{2}(ax - x^2)$$

Teniendo en cuenta que para valores grandes de y, la deformada de la placa puede suponerse cilíndrica, tenemos

$$M_x = \frac{q}{2}(ax - x^2) \qquad M_y = \nu\frac{q}{2}(ax - x^2)$$

De este modo el reparto de los momentos de borde (*g*) es idéntico al de los momentos M_x a través de la placa en $y = \infty$; pero de signo opuesto.

El borde y = 0 *esta libre* [fig. 105 *c*)]

Si las condiciones impuestas para $y = 0$ son

$$\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2\,\partial y} = 0$$

Librodot

entonces, utilizando las expresiones (*a*), (*b*) y (*c*), se llega a la deformada

$$w = w_1 + \frac{4\nu q a^4}{(3+\nu)\pi^5} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} - \frac{m\pi y}{a} \right) \frac{e^{-m\pi y/a}}{m^5} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (h)$$

La flecha y el momento flector M_x son máximos en el centro del borde libre y se demuestra que

$$(w)_{y=0} = \frac{3-\nu}{(1-\nu)(3+\nu)} w_1$$

y

$$(M_x)_{y=0} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{3+\nu} (M_x)_1$$

siendo w_1 y (M_x) las flechas y los momentos de una placa infinita simplemente apoyada. Tenemos entonces

$$(M_x)_{\max} = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{3+\nu} \frac{qa^2}{8}$$

Como último ejemplo que nos lleva a una solución de forma diferente, se considera una placa semiinfinita uniformemente cargada en la que el borde $y = 0$ está simplemente apoyado y los bordes $x = \pm a/2$ empotrados (fig. 106). La resolución

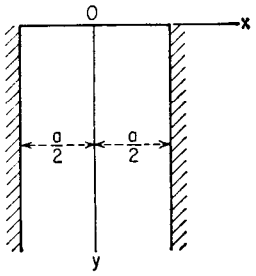


FIG. 106

se efectúa haciendo $b = \infty$ en una expresión convenientemente escogida, de las flechas de una placa rectangular simplemente apoyada en los bordes $y = 0$, b y empotrada sobre $x = \pm a/2$. El resultado de esta deducción que omitimos aquí, es

$$w = \frac{4qa^4}{\pi D} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{\left(\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{\beta x}{a} - \frac{\beta x}{a} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta x}{a}}{\operatorname{sh} \beta + \beta} \right] \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a}}{\beta^5} d\beta \qquad (i)$$

Diferenciando (*i*) y recordando que

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a} d\beta}{\beta} = \frac{\pi}{2} \quad \text{para} \quad y > 0$$

se obtiene

$$\Delta\Delta w = \frac{2q}{\pi D} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta y}{a} d\beta}{\beta} = \frac{q}{D}$$

Librodot

Así se satisface la ecuación diferencial de la flexión de placas. Se demuestra también que la solución (*i*) cumple también las condiciones de borde correspondiente a $y = 0$ y $x = \pm a/2$.

Las expresiones de los momentos flectores de la placa incluyen integrales infinitas que se pueden calcular. Los momentos M_y son de interés. Supongamos, por ejemplo, $\nu = 0{,}2$ se obtiene $(M_y)_{\text{máx}} = 0{,}0174qa^2$ en $y = 0{,}3a$ mientras que el momento $M_y = \nu qa^2/24$ de una placa infinita no pasa de $0{,}00833qa^2$ para el mismo valor de ν.

Hay que tener en cuenta que las propiedades de las placas semiinfinitas pueden servir de base para calcular las flechas y los momentos flectores de placas rectangulares finitas de bordes simplemente apoyados o empotrados en cualquier combinación dada[1].

51. Placas rectangulares semiinfinitas bajo cargas concentradas

Supongamos los bordes $x = 0$ y $x = a$ de la placa, simplemente apoyados, y consideramos respecto al tercer lado, los dos casos siguientes: 1) borde $y = 0$ simplemente apoyado; 2) borde $y = 0$ empotrado.

Borde y = 0 *simplemente apoyado* (fig. 107)

Suponiendo que la carga dada P está aplicada en $x = \xi$, $y = \eta$ (fig. 107), consideramos primero una placa infinita apoyada sobre los bordes $x = 0$ y $x = a$. Con objeto de utilizar el método de imágenes (v. pág. 179) se supone una segunda carga $-P$ que actúa en el punto $x = \xi$, $y = -\eta$ de la placa infinita. La línea $y = 0$ es

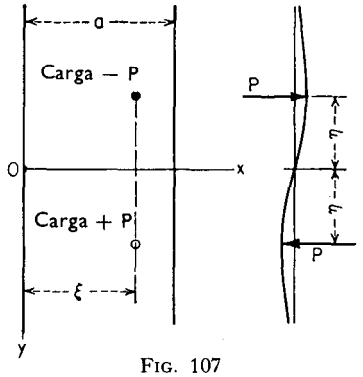


FIG. 107

entonces una línea nodal de la deformada. Así la flexión de la placa semiinfinita se obtiene superponiendo las flechas [v. ec. (148), pág. 167] producidas en la placa infinita por las dos cargas concentradas. En este caso, se llega a la deformada

$$w_1 = \frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta-y)}}{m^3}\left[1+\frac{m\pi}{a}(\eta-y)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

$$-\frac{Pa^2}{2\pi^3 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(\eta+y)}}{m^3}\left[1+\frac{m\pi}{a}(\eta+y)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

[1] Para esta aproximación de la teoría de las placas rectangulares, véase W. Koepcke, *Ingr.-Arch.*, vol. 18, pág. 106, 1950.

Librodot

o, reagrupando términos

$$w_1 = \frac{Pa^2}{\pi^3 D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-m\pi\eta/a}}{m^3}\left[\left(1+\frac{m\pi\eta}{a}\right)\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (a)$$

expresión válida para $0 \leq y \leq \eta$ que da $w_1 = 0$, $\partial^2 w_1/\partial y^2 = 0$ en $y = 0$. Las flechas en la región $y > \eta$ se obtienen de la misma manera.

Si se reparte la carga única sobre una superficie pequeña, los momentos M_x en el centro de este área y las flechas correspondientes resultan ser más pequeñas que las de una placa infinita sin borde transversal en $y = 0$. Pero el momento M_y es de nuevo una excepción. Escribamos este momento de la forma $M_y = M_{y0} + m_y$ donde M_{y0} es el momento de la placa infinita. El término adicional m_y, que representa la influencia de la carga $-P$ de la figura 107, se calcula fácilmente por medio de la segunda de las ecuaciones (151) (v. pág. 161). Supongamos por ejemplo, $\nu = 0{,}3$ se obtiene $m_y = 0{,}0065P$, como máximo valor del término adicional correspondiente a una posición de la carga dada por $x = a/2$, $y = 0{,}453a$.

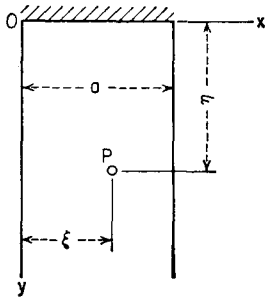


FIG. 108

Borde y = 0 *empotrados* (fig. 108)

Se comienza por calcular la pendiente de la deformada (*a*) en $y = 0$, por derivación obtenemos

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{P\eta}{\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-m\pi\eta/a}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

Sometemos la placa semiinfinita, simplemente apoyada, a momentos repartidos a lo largo del borde $y = 0$, de acuerdo con la ley

$$(M_y)_{y=0} = f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} E_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}$$

Las flechas correspondientes que se anulan en $y = \infty$, toman la forma

$$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty}(A_m + B_m y)e^{-m\pi y/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (c)$$

Los coeficientes A_m, B_m de esta expresión se obtienen fácilmente de las condiciones

$$(w_2)_{y=0} = 0 \qquad -D\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right)_{y=0} = f(x) \qquad (d)$$

Librodot

Esto da $A_m = 0$, $B_m = E_m a/2m\,\pi D$ y, finalmente

$$w_2 = \frac{ay}{2\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{E_m e^{-m\pi y/a}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

Puesto que se debe anular la pendiente (b), la condición en el borde es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)_{y=0} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \qquad (f)$$

Sustituyendo (b) y (e) en la ecuación (f), queda

$$E_m = -\frac{2P\eta}{a}\,e^{-m\pi\eta/a}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}$$

y la expresión (e) deberá ser en consecuencia

$$w_2 = -\frac{Py\eta}{\pi D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m\pi}{a}(y+\eta)}}{m}\operatorname{sen}\frac{m\pi\xi}{a}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (g)$$

La deformada de la placa semiinfinita empotrada en $y = 0$ está dada por

$$w = w_1 + w_2 \qquad (h)$$

donde w_1 representa (a). Como ocurre con la serie (g) se puede escribir ésta de forma finita. Basta para ello expresar las funciones en seno contenidas en (g), bajo la forma de funciones exponenciales

$$e^{\pm(m\pi\xi i/a)} \qquad \text{y} \qquad e^{\pm(m\pi x i/a)}$$

y tener en cuenta el desarrollo

$$\ln(1 \pm e^z) = \pm e^z - \frac{e^{2z}}{2} \pm \frac{e^{3z}}{3} - \cdots$$

De esta manera, la expresión (g) toma la forma más sencilla

$$w_2 = \frac{Py\eta}{4\pi D}\ln\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(y+\eta) - \cos\frac{\pi}{a}(x-\xi)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(y+\eta) - \cos\frac{\pi}{a}(x+\xi)} \qquad (i)$$

El valor de los momentos de empotramiento en $y = 0$ se obtiene fácilmente derivando (i) y el resultado es

$$(M_y)_{y=0} = -\frac{P\eta}{2a}\operatorname{sh}\frac{\pi\eta}{a}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi\eta}{a} - \cos\frac{\pi}{a}(x-\xi)} - \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi\eta}{a} - \cos\frac{\pi}{a}(x+\xi)}\right) \qquad (j)$$

Cuando la carga concentrada tiende hacia el borde empotrado $y = 0$ el valor dado para (j) en general tiende a cero. No obstante, si $\xi = x$ y $\eta \to 0$ simultáneamente, entonces (j) da

$$(M_y)_{y=0} = -\lim\left(\frac{P\eta}{2a}\operatorname{cth}\frac{\pi\eta}{2a}\,\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}}{\operatorname{ch}\frac{\pi\eta}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}}\right)_{\eta\to 0} = -\frac{P}{\pi} \qquad (k)$$

Finalmente, si $\eta = 0$, el momento M_y es nulo.

Librodot

Por último consideremos una carga P (fig. 109) uniformemente repartida sobre un segmento de línea recta de longitud u. El momento debido a esta carga en el centro del borde empotrado se obtiene fácilmente con ayuda de la expresión (j). Sustituyen-

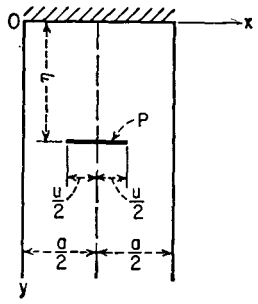


FIG. 109

do $x = a/2$ y P por $Pd\xi/u$ en esta expresión e integrando, obtenemos para el momento buscado:

$$(M_y)_{x=a/2,y=0} = -\frac{2P\eta}{au}\ \operatorname{sh}\frac{\pi\eta}{a}\int_{(a-u)/2}^{(a+u)/2}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi\xi}{a}\,d\xi}{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi\eta}{a}+\cos\dfrac{2\pi\xi}{a}}$$

$$= -\frac{2P\eta}{\pi u}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sen}\dfrac{\pi u}{2a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi\eta}{a}}$$

La tabla 50 da la posición de la carga que crea el momento de empotramiento mayor en valor absoluto y el valor de este momento para diversos valores de la relación u/a.

TABLA 50

Máximos momentos de empotramiento en $x = a/2$ debidos a una carga repartida en un segmento de longitud u (fig. 109)

u/a	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
η/a	0	0,147	0,203	0,272	0,312	0,321	0,343
M_y/P	−0,318	−0,296	−0,275	−0,237	−0,204	−0,172	−0,143

Librodot