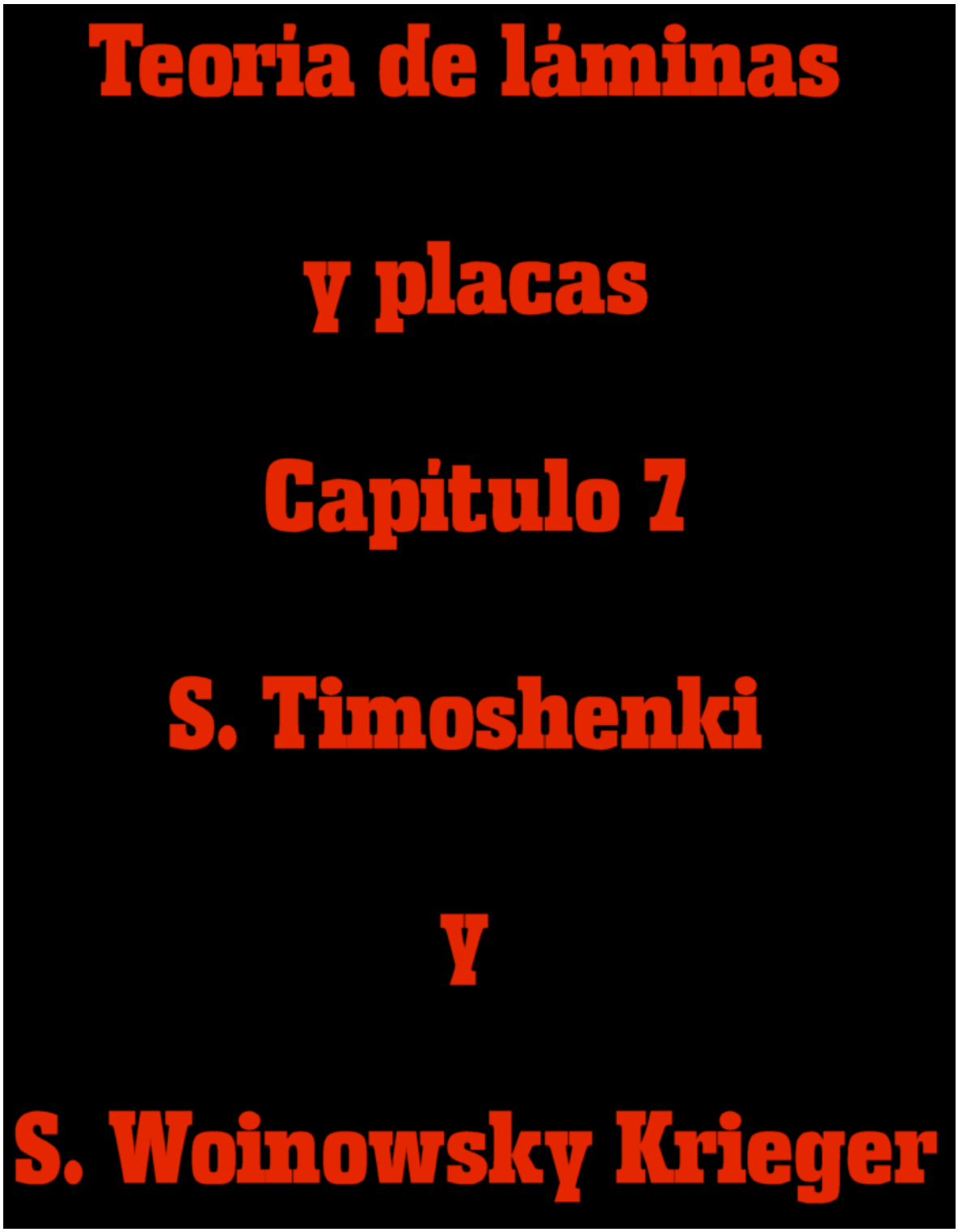
Teoría de láminas y placas, Capítulo 7
S. Timoshenki y S. Woinowsky Krieger



Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

7

Placas rectangulares continuas

52. *Placas continuas simplemente apoyadas*

Las losas de forjado utilizadas en los edificios y apoyadas en los muros exteriores, tienen a menudo apoyos intermedios tales como las vigas, medianerías o columnas.

En el primer caso tenemos las placas continuas propiamente dichas; en el caso de columnas sin vigas intermedias tenemos el caso de *techos fungiformes*. La losa de forjado está ordinariamente subdividida por sus soportes en varios vanos. En este capítulo, no se tendrá en consideración más que las placas continuas con los vanos de forma rectangular.

Comencemos por un caso que admite una solución rigurosa deducida de los métodos ya utilizados en el capítulo anterior. Una placa rectangular de anchura b y de longitud $a_1 + a_2 + a_3$ apoyada a lo largo de sus bordes y también a lo largo de las líneas intermedias ss y tt (v. fig. 110) forma una

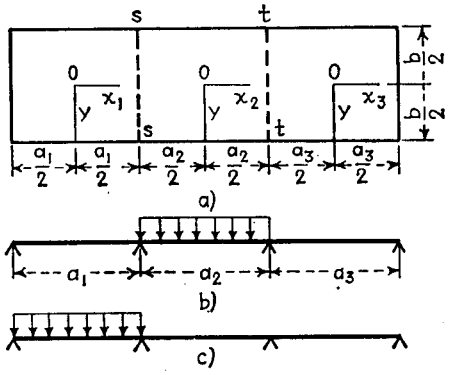


FIG. 110

Librodot

placa continua, simplemente apoyada de tres vanos. Se supone que los soportes intermedios no ceden a la presión en la dirección transversal y no presentan ninguna resistencia al giro de la placa en torno a los ejes *ss* y *tt*. Con estas hipótesis la flexión de cada vano de la placa se calcula fácilmente combinando las soluciones conocidas para placas rectangulares cargadas transversalmente, simplemente apoyadas con las de las placas rectangulares flexadas con los momentos repartidos a lo largo de los bordes.

Comencemos por el caso simétrico en que

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

y el vano central está uniformemente cargado, mientras que los otros dos no lo están [fig. 110 *b*)]. Asimilando este vano central a una placa rectangular simplemente apoyada y utilizando la expresión (*b*) del apartado 44 (v. pág. 222) se llega a que la pendiente de la deformada en el borde $x_2 = a/2$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos\frac{m\pi y}{b}\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m} - \operatorname{th} \beta_m\right) \qquad (a)$$

donde $\beta_m = m\pi a/2b$. A causa de la continuidad de la placa aparecen momentos flectores repartidos a lo largo de los bordes $x_2 = \pm a/2$. Por razón de simetría estos momentos pueden ponerse en la forma

$$(M_x)_{x_2=\pm a/2} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m \cos\frac{m\pi y}{b} \qquad (b)$$

Las flechas w_1 debidas a estos momentos se obtienen mediante la ecuación (173) y la pendiente correspondiente en el borde $x_2 = a/2$ [ec. (*e*), pág. 223] es

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = -\frac{b}{2\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos\frac{m\pi y}{b}\left(\operatorname{th} \beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2 \beta_m}\right) \qquad (c)$$

A partir de la condición de continuidad se llega a que la suma de las expresiones (*a*) y (*c*) que presentan la pendiente de la placa a lo largo de $x_2 = a/2$, debe ser igual a la pendiente a lo largo de la misma línea de la deformada de la placa en el vano adyacente. Considerando esta última como una placa rectangular simplemente apoyada, flexada por los momen-

Librodot

tos (b) repartidos a lo largo del borde x_3 $a/2$, se encuentra la flecha correspondiente a w_2 de la placa utilizando (176) (v. pág. 208) de donde se deduce

$$w_2 = \frac{b^2}{4\pi^2 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m \cos\frac{m\pi y}{b} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^2}$$

$$\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\beta_m}\left(\beta_m \operatorname{th}\beta_m \operatorname{ch}\frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b}\operatorname{sh}\frac{m\pi x_3}{b}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_m}\left(\beta_m \operatorname{cth}\beta_m \operatorname{sh}\frac{m\pi x_3}{b} - \frac{m\pi x_3}{b}\operatorname{ch}\frac{m\pi x_3}{b}\right)\right] \qquad (d)$$

La pendiente correspondiente en el borde $x_3 = a/2$ es

$$\left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)_{x_3=-a/2} = \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{E_m}{m}(-1)^{(m-1)/2}$$

$$\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{b}\left(\operatorname{th}\beta_m + \operatorname{cth}\beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right) \qquad (e)$$

La ecuación para el cálculo de los coeficientes E_m es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = \left(\frac{\partial w_2}{\partial x_3}\right)_{x_3=-a/2}$$

Puesto que la ecuación es válida para cualquier valor de y, se obtiene para cada valor de m la ecuación siguiente:

$$\frac{2qb^3}{\pi^4 D}\frac{1}{m^4}\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m} - \operatorname{th}\beta_m\right) - \frac{b}{2\pi D}\frac{E_m}{m}\left(\operatorname{th}\beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m}\right)$$

$$= \frac{b}{4\pi D}\frac{E_m}{m}\left(\operatorname{th}\beta_m + \operatorname{cth}\beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right) \qquad (f)$$

de donde:

$$E_m = \frac{8qb^2}{\pi^3 m^3}\frac{\beta_m - \operatorname{th}\beta_m \operatorname{ch}^2\beta_m}{3\operatorname{th}\beta_m \operatorname{ch}^2\beta_m + \operatorname{cth}\beta_m \operatorname{ch}^2\beta_m + 3\beta_m - \beta_m \operatorname{cth}^2\beta_m} \qquad (g)$$

Se ve que E_m decrece rápidamente y tiende hacia $-2qb^2/\pi^3 m^3$ cuando m crece. Conociendo los coeficientes E_m calculados mediante (g) se obtienen los valores de los momentos flectores M_x a lo largo de tt mediante la ecuación (b). El valor de este momento en $y = 0$, es decir, en el centro del ancho de la placa, es

$$(M_x)_{x_3=\pm a/2, y=0} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} E_m(-1)^{(m-1)/2}$$

Librodot

Tomemos por ejemplo b a, tendremos β_m $m\pi/2$ y (g) da

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3}0{,}1555 \qquad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3}0{,}0092 \qquad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3}0{,}0020$$

$$(M_x)_{x_2=\pm a/2,y=0} = -0{,}0381qa^2$$

Los momentos flectores en el centro del vano medio se obtienen fácilmente combinando los momentos flectores de una placa simplemente apoyada sometida a una carga uniforme, con los momentos correspondientes a las flechas w_1. Sea $a = b$ y $\nu = 0{,}2$ valor oportuno en el caso del hormigón, se obtiene para los primeros de estos momentos, los valores

$$(M_x)_0 = (M_y)_0 = 0{,}0479 \times \frac{1{,}2}{1{,}3}\,qa^2 = 0{,}0442qa^2$$

(v. tabla 8, pág. 141) y para los segundos momentos

$$(M_x)_1 = -0{,}0067qa^2 \qquad \text{y} \qquad (M_y)_1 = -0{,}0125qa^2$$

Además

$$(M_x)_{x_2=0,y=0} = 0{,}0375qa^2 \qquad (M_y)_{x_2=0,y=0} = 0{,}0317qa^2$$

Si un vano lateral está uniformemente cargado [v. fig. 110 c)] la deformada no es simétrica respecto al eje vertical de simetría de la placa, y las distribuciones de momentos flectores a lo largo de las fibras ss y tt son diferentes. Sean

$$(M_x)_{x_1=a_1/2} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2}E_m \cos\frac{m\pi y}{b}$$

$$(M_x)_{x_2=a_2/2} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2}F_m \cos\frac{m\pi y}{b} \qquad (h)$$

Para obtener los coeficientes E_m y F_m, se obtienen dos sistemas de ecuaciones a partir de las condiciones de continuidad de la deformada a lo largo de ss y tt. Considerando el vano cargado y utilizando (a) y (e) hallamos que la pendiente de la deformada en los puntos de apoyo ss para $a_1 = a_2 = a_3 = a$ es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)_{x_1=a/2} = \frac{2qb^3}{\pi^4 D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4}\cos\frac{m\pi y}{b}\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m} - \operatorname{th}\beta_m\right)$$

$$-\frac{b}{4\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}E_m\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{b}\left(\operatorname{th}\beta_m + \operatorname{cth}\beta_m + \frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m} - \frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right) \qquad (i)$$

Librodot

Considerando ahora el vano central como una placa rectangular flexada por los momentos M_x repartidos a lo largo de *ss* y *tt* y dados por las series (*h*) se encuentra, utilizando la ecuación (175) (v. pág. 207)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=-a/2} = \frac{b}{4\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\cos\frac{m\pi y}{b}\left[(E_m+F_m)\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m}+\operatorname{th}\beta_m\right)+(E_m-F_m)\left(\operatorname{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)\right] \qquad (j)$$

De las expresiones (*i*) y (*j*) se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente, que permite calcular los coeficientes E_m y F_m.

$$A_m\frac{8qb^2}{\pi^3m^3}+E_m(B_m+C_m)=-B_m(E_m+F_m)-C_m(E_m-F_m) \qquad (k)$$

donde se utiliza la notación siguiente:

$$A_m=\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m}-\operatorname{th}\beta_m \qquad B_m=-\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m}+\operatorname{th}\beta_m\right)$$
$$C_m=\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}-\operatorname{cth}\beta_m \qquad (l)$$

La pendiente de la deformada del vano central en el lado derecho se obtiene utilizando (*j*)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}\right)_{x_2=a/2} = -\frac{b}{4\pi D}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m}\cos\frac{m\pi y}{b}\left[(E_m+F_m)\left(\frac{\beta_m}{\operatorname{ch}^2\beta_m}+\operatorname{th}\beta_m\right)+(F_m-E_m)\left(\operatorname{cth}\beta_m-\frac{\beta_m}{\operatorname{sh}^2\beta_m}\right)\right]$$

Esta pendiente debe ser igual a la de la parte adyacente, no cargada, obtenida mediante la expresión (*c*) sustituyendo E_m por F_m. En este caso, se encuentra el pequeño sistema de ecuaciones que, utilizando las notaciones (*l*) se escribe

$$B_m(E_m+F_m)+C_m(F_m-E_m)=-(B_m+C_m)F_m \qquad (m)$$

Para esta ecuación se obtiene

$$F_m=E_m\frac{C_m-B_m}{2(B_m+C_m)} \qquad (n)$$

Remplazando en (*k*) tendremos

$$E_m=A_m\frac{8qa^2}{\pi^3m^3}\frac{2(B_m+C_m)}{(C_m-B_m)^2-4(B_m+C_m)^2} \qquad (o)$$

Sustituyendo en cada caso particular A_m, B_m, C_m, por sus valores numéricos obtenidos en (*l*) se encuentran E_m y F_m y entonces mediante (*h*) se

Librodot

obtienen los momentos flectores a lo largo de ss y tt. Tomemos, por ejemplo, b a. Entonces β_m $m\pi/2$ y se encuentra a partir de (l)

$$A_1 = -0{,}6677 \qquad B_1 = -1{,}1667 \qquad C_1 = -0{,}7936$$
$$A_3 = -0{,}9983 \qquad B_3 = -1{,}0013 \qquad C_3 = -0{,}9987$$

Para m mayor que 3, se puede tomar con suficiente aproximación

$$A_m = B_m = C_m = -1$$

Sustituyendo estos valores en (o) se obtienen

$$E_1 = -\frac{8qa^2}{\pi^3}\,0{,}1720 \qquad E_3 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 3^3}\,0{,}2496 \qquad E_5 = -\frac{8qa^2}{\pi^3 5^3}\,0{,}2500$$

El momento en el centro del apoyo ss es

$$(M_x)_{x_1=a/2,y=0} = E_1 - E_3 + E_5 - \cdots = -0{,}0424qa^2$$

y para el centro del apoyo tt

$$(M_x)_{x_2=a/2,y=0} = F_1 - F_3 + F_5 - \cdots = 0{,}0042qa^2$$

Conociendo los momentos flectores a lo largo de las líneas de apoyo, se obtienen las flechas de la placa en cada parte superponiendo las flechas debidas a la carga transversal a las flechas debidas a los momentos en los apoyos.

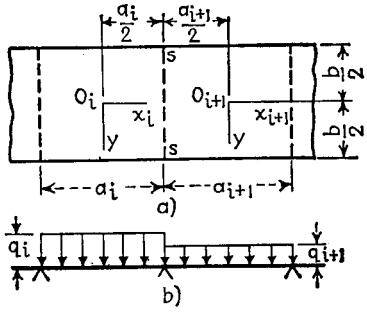


FIG. 111

Los momentos flectores en los vanos de la placa continua se obtienen de la misma manera. Calculando, por ejemplo, los momentos en el centro del vano medio y para $\nu = 0{,}2$ se llega a los valores

$$(M_x)_{x_2=0,y=0} = -0{,}0039qa^2$$
$$(M_y)_{x_2=0,y=0} = -0{,}0051qa^2$$

Se pueden generalizar fácilmente las ecuaciones obtenidas para tres vanos al caso de varios vanos. De este modo se obtiene[1] una ecuación semejante a la ecuación de los tres momentos de las vigas continuas. Consideremos dos vanos adyacentes i e $i + 1$ de longitudes a_i y a_{i+1} (fig. 111). Repre-

[1] B. G. Galerkin ha estudiado este problema de un modo algo diferente, véase su *Collected Papers*, vol. 2, pág. 410, Moscú, 1953.

Librodot

sentando los valores correspondientes de las funciones (*l*) por A_m^i, B_m^i, C_m^i y A_m^{i+1}, B_m^{i+1}, C_m^{i+1}. Los momentos flectores a lo largo de tres líneas consecutivas de apoyo, se expresan por

$$M_x^{i-1} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^{i-1} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$M_x^{i} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^{i} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

$$M_x^{i+1} = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} (-1)^{(m-1)/2} E_m^{i+1} \cos \frac{m\pi y}{b}$$

Considerando el vano $i + 1$ y utilizando (a) y (j) se encuentra

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_{i+1}}\right)_{x_{i+1}=-(a_{i+1})/2} = -\frac{2q_{i+1}b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^{i+1}$$
$$- \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} [(E_m^i + E_m^{i+1}) B_m^{i+1}$$
$$- (E_m^{i+1} + E_m^i) C_m^{i+1}] \quad (p)$$

De la misma manera para el vano se obtiene

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_{x_i=a_i/2} = \frac{2q_i b^3}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m^4} \cos \frac{m\pi y}{b} A_m^i$$
$$+ \frac{b}{4\pi D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(m-1)/2}}{m} \cos \frac{m\pi y}{b} [(E_m^{i-1} + E_m^i) B_m^i$$
$$+ (E_m^i - E_m^{i-1}) C_m^i] \quad (q)$$

Y por la condición de continuidad se llega a que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x_{i+1}}\right)_{x_{i+1}=-(a_{i+1})/2} = \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_{x_i=a_i/2}$$

Sustituyendo (p) y (q) en esta ecuación y observando que se debe cumplir para todo valor de y, se obtiene, para calcular E_m^{i-1}, E_m^i y E_m^{i+1} la ecuación

$$E_m^{i-1}(B_m^i - C_m^i) + E_m^i(B_m^i + C_m^i + B_m^{i+1} + C_m^{i+1})$$
$$+ E_m^{i+1}(B_m^{i+1} - C_m^{i+1}) = -\frac{8b^2}{\pi^3 m^3} (q_{i+1} A_m^{i+1} + q_i A_m^i) \quad (177)$$

Librodot

Las ecuaciones (*k*) y (*m*) obtenidas anteriormente, son casos particulares de esta ecuación. Podemos escribir tantas ecuaciones (177) como soportes intermedios se tengan, y no tiene ninguna dificultad calcular los momentos en estos apoyos intermedios si los extremos de la placa están simplemente apoyados.

El primer miembro de (177) es válido no sólo para cargas uniformes sino también para cualquier clase de carga simétrica respecto a los ejes x e y en cada vano. De todas formas, el segundo miembro de (177) tiene un valor diferente para cada clase de carga, como en la ecuación de los tres momentos de las vigas.

El problema de las placas continuas, que soportan cargas concentradas, puede tratarse de modo parecido. En el caso particular de un número infinito de vanos iguales con una carga única aplicada en un punto cualquiera de un solo vano, se obtiene la flecha de la placa resolviendo una ecuación en diferencias finitas para los coeficientes incógnitas E_m^i como funciones del índice i[1].

Si los apoyos intermedios son elásticos, el valor de los coeficientes E_m viene dado por ecuaciones de cinco términos, semejantes a las ecuaciones de cinco momentos de la teoría de vigas continuas[2]. Se puede tener en consideración en la flexión de las placas continuas, la rigidez a la torsión de las vigas de apoyo que tienden a reducir los giros de la placa a lo largo del apoyo[3].

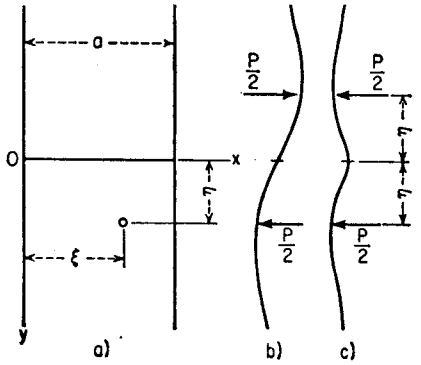


FIG. 112

Consideremos, como ejemplo más sencillo de una placa continua bajo carga concentrada, una placa de longitud infinita simplemente apoyada a lo largo de los bordes $x = 0$, $x = a$, continua sobre el apoyo $y = 0$ y sometida a una carga concentrada P en un punto cualquiera $x = \xi$, $y = \eta$ [fig. 112 *a*)]. La carga y las condiciones de contorno se cumplen superponiendo los casos de las figuras 112 *b*) y *c*). En el caso de la figura 112 *b*) cada vano de la placa está simplemente apoyado a lo largo de $y = 0$

[1] Véase S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 9, 1938, pág. 396.

[2] V. P. Jensen, ha estudiado el caso de las placas continuas apoyadas sobre las vigas elásticas, véase *Univ. Illinois Bull.*, 81, 1938; igualmente N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, 84, 1938.

[3] Véase K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 4.ª ed., Viena, 1956, pág. 274.

Librodot

y se encuentra la superficie elástica por la expresión $\pm w_1/2$ donde el signo está escogido según que y sea mayor o menor que cero; w_1 representa las flechas (a) del apartado 5 y $|y < \eta|$. En el caso de la figura 112 c) cada vano está empotrado a lo largo del borde $y = 0$ y las flechas correspondientes son $w/2$ siendo dado w por (h) en el apartado 51. Tenemos, por lo tanto

$$w = w_1 + \frac{w_2}{2} \quad \text{para} \quad \eta \geq y > 0$$

$$= \frac{w_2}{2} \quad \text{para} \quad y < 0$$

y los momentos a lo largo de $y = 0$ serán la mitad de los momentos de empotramiento de una placa semiinfinita que tiene un lado empotrado, estos últimos momentos están dados por (j) del apartado 51.

53. *Estudio aproximado de las placas continuas con vanos iguales*[1]

La disposición de una losa de entramado implica una continuidad no solamente en una dirección, como se supone en el apartado 52, sino en dos direcciones perpendiculares. La figura 113 muestra una losa continua de este género. Los vanos y el espesor de la placa son iguales para todos los vanos rectangulares. Cada vano soporta un peso muerto q_0 y eventualmente

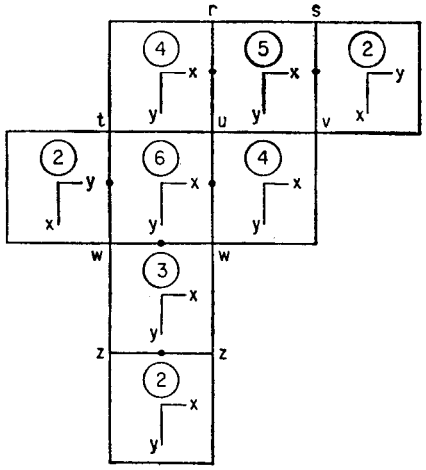


FIG. 113

una sobrecarga p, estas dos cargas están repartidas uniformemente sobre el área del tablero el mayor valor de la carga será $q = q_0 + p$.

Comencemos por calcular los momentos flectores en los apoyos intermedios de la placa del entramado. Los cálculos prueban que estos momen-

[1] El método que sigue se debe esencialmente a A. Marcus, véase su obra *Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten*, Berlín, 1929. De todas formas, los coeficientes de las tablas 51 a 56 están basados en las soluciones consideradas en el capítulo 6 y sobre el valor del coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}2$ mientras que Marcus utiliza en el mismo caso, una teoría simplificada de las placas rectangulares y supone $\nu = 0$.

Librodot

tos dependen principalmente de la carga de los dos tableros adyacentes y la influencia de la carga de los tableros alejados, es despreciable. Es posible entonces calcular los momentos en los apoyos suponiendo la carga q uni-

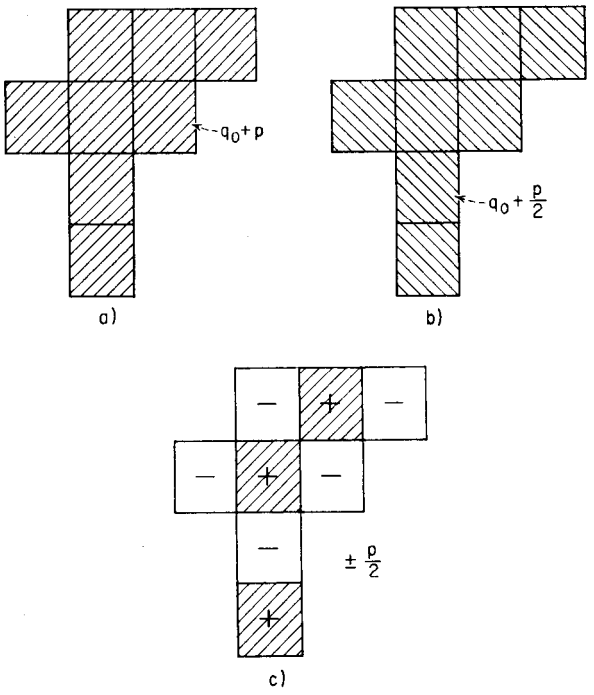


FIG. 114

formemente repartida sobre toda la losa [fig. 114 *a*)]. Despreciaremos primeramente los giros de la placa a lo largo de los soportes intermedios, cada vano de la figura 114 *a*) estará en las mismas condiciones que una placa rectangular empotradá en los apoyos intermedios y simplemente apoyada en el contorno exterior de la losa.

Los máximos momentos flectores de placas en tales condiciones de contorno han sido tabulados (v. tablas 51 a 56). En los encabezamientos de estas tablas se han indicado las seis combinaciones posibles de bordes apoyados y empotrados de una placa rectangular.

Se deben situar los ejes x e y de cada tablero de la losa (fig. 113) de acuerdo con las figuras 116 a 121; la luz a se medirá en la dirección del eje x y b en la direcciñ del eje y. Los seis casos de las figuras 116 a 121 están numerados de 1 a 6 y los índices correspondientes están ligados a los coeficientes de las tablas 51 a 56.

Para aclarar la utilización de las tablas, calcularemos el momento flector en el centro del apoyo *tw* (fig. 113). Para ello calculamos el momento de

Librodot

empotramiento de los dos vanos adyacentes al apoyo. Para el tablero 2 se utilizará la fórmula

$$\bar{M}_{2y} = \delta_2 q l^2 \qquad (a)$$

y la tabla 52, siendo l la menor de las luces a y b del vano. De la misma manera se obtiene el momento de empotramiento del vano 6 por la expresión

$$\bar{M}_{6x} = \gamma_6 q l^2 \qquad (b)$$

utilizando la tabla 56. El momento buscado está dado entonces con una exactitud suficiente por

$$M_{tw} = \tfrac{1}{2}(\bar{M}_{2y} + \bar{M}_{6x}) \qquad (c)$$

y se obtienen de la misma manera los momentos en los otros apoyos intermedios.

Debe notarse que la ecuación (*c*) no expresa sino un procedimiento del modo más sencillo de distribución de momentos, es decir, un cálculo en el que se desprecian los momentos transmitidos de los otros apoyos, así como la diferencia en los valores de la rigidez de los dos tableros adyacentes. Tal método simplificado está mucho más justificado en el caso de una placa continua que en el de una viga continua.

Consideremos ahora los momentos flectores en el centro del vano 6 (fig. 113) por ejemplo. Se obtiene el reparto de carga más desfavorable para estos momentos superponiendo las cargas de las figuras 114 *b* y *c*.

Utilizando la tabla 56, se obtiene la contribución de la carga uniformemente repartida $q_0 + p/2$, a los valores de los momentos, lo que da

$$M'_{6x} = \alpha_6 \left(q_0 + \frac{p}{2}\right) l^2 \qquad M'_{6y} = \beta_6 \left(q_0 + \frac{p}{2}\right) l^2 \qquad (d)$$

siendo l la menor de las dos dimensiones del vano 6.

Consideremos la influencia de las cargas alternadas [v. fig. 114 *c*)]. Las condiciones en los bordes de cada vano son las mismas que para una placa simplemente apoyada y los momentos en el centro se calculan fácilmente por medio de la tabla 51 para el caso 1. La carga $+ p/2$ actuando sobre el tablero 6, da

$$M''_{6x} = \frac{\alpha_1 p}{2} l^2 \qquad M''_{6y} = \frac{\beta_1 p}{2} l^2 \qquad (e)$$

y los momentos máximos en el centro del vano 6 son

$$\begin{aligned} M_{6x} &= M'_{6x} + M''_{6x} \\ M_{6y} &= M'_{6y} + M''_{6y} \end{aligned} \qquad (f)$$

Para calcular los máximos momentos negativos es suficiente cambiar el signo de la carga en la figura 114 *c*). Utilizando (*d*) y (*e*) tenemos entonces

$$\begin{aligned} M_{6x} &= M'_{6x} - M''_{6x} \\ M_{6y} &= M'_{6y} - M''_{6y} \end{aligned} \qquad (g)$$

Librodot

Como segundo ejemplo de aplicación del método aproximado, calcularemos los momentos flectores de la placa continua de la figura 115, que en el apartado 52 hemos estudiado por un método exacto.

Primeramente se escoge la dirección de los ejes x, y, de acuerdo con las figuras 117 y 118. Supongamos entonces una carga $q = q_0 + p$ uniformemente repartida en toda la placa [fig. 115 *b*)] y tuilizando los coeficientes de las tablas 52 y 53 en los casos 2 y 3, con $b/a = 1$, se obtiene en el centro del apoyo *ss* el momento

$$M_{ss} = -\frac{0{,}0840 + 0{,}0697}{2}(q_0 + p)a^2 = -0{,}0769(q_0 + p)a^2 \qquad (h)$$

por el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior [ec. (*c*)]. Utilizando la solución rigurosa, el momento máximo en valor absoluto en *ss* lo produce la distribución de carga indicada en la figura 115 *c*). Superponiendo el momento flector obtenido en la página 256, a los calculados en la página 259, el valor máximo exacto del momento M_{ss} resulta ser:

$$M_{ss} = -[0{,}0381(q_0 + p) + 0{,}0424(q_0 + p) - 0{,}0042q_0]a^2$$

o bien

$$M_{ss} = -(0{,}0805q_0 + 0{,}0763p)a^2 \qquad (i)$$

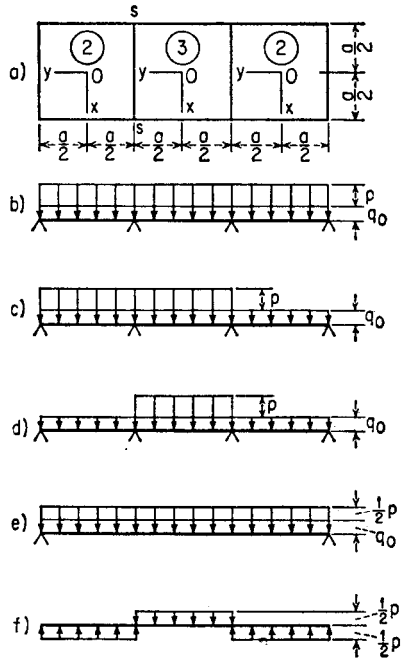


FIG. 115

Pongamos, por ejemplo, $q_0 = q/3$, $p = 2q/3$, (*i*) da $-0{,}077qa^2$ comparable al valor $0{,}0769qa^2$ dado por el método aproximado.

Finalmente, calculamos el máximo momento flector en el centro del vano central, la distribución más desfavorable es la de la figura 115 *d*).

Librodot

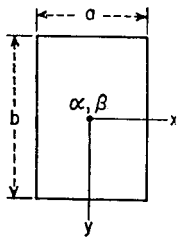


FIG. 116

TABLA 51

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 1
$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Factor
	$M_x = \alpha_1 q l^2$ α_1	$M_y = \beta_1 q l^2$ β_1	
0,0	0,0250*	0,1250	qb^2
0,5	0,0367	0,0999	
0,6	0,0406	0,0868	
0,7	0,0436	0,0742	
0,8	0,0446	0,0627	
0,9	0,0449	0,0526	
1,0	0,0442	0,0442	
1,1	0,0517	0,0449	qa^2
1,2	0,0592	0,0449	
1,3	0,0660	0,0444	
1,4	0,0723	0,0439	
1,5	0,0784	0,0426	
1,6	0,0836	0,0414	
1,7	0,0885	0,0402	
1,8	0,0927	0,0391	
1,9	0,0966	0,0378	
2,0	0,0999	0,0367	
∞	0,1250	0,0250**	

* $M_{máx} = 0{,}0364 q b^2$ a $0{,}48b$ del borde corto.
** $M_{máx} = 0{,}0364 q a^2$ a $0{,}48a$ del borde corto.

Combinando la carga de acuerdo con las figuras 115 *e*) y *f*) y utilizando los coeficientes α y β de las tablas 53 y 51, llegamos para estos momentos a las expresiones siguientes

$$M_x = \left[0{,}0216\left(q_0 + \frac{p}{2}\right) + 0{,}0442\,\frac{p}{2}\right]a^2 = (0{,}0216 q_0 + 0{,}0329 p)a^2$$
$$M_y = \left[0{,}0316\left(q_0 + \frac{p}{2}\right) + 0{,}0442\,\frac{p}{2}\right]a^2 = (0{,}0316 q_0 + 0{,}0379 p)a^2 \qquad (j)$$

Librodot

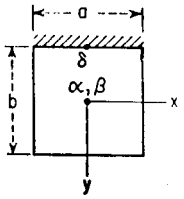


FIG. 117

TABLA 52

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 2

$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo	Factor
	$M_x = \alpha_2 q l^2$ α_2	$M_y = \beta_2 q l^2$ β_2	$\bar{M}_y = \delta_2 q l^2$ δ_2	
0	0,0125	0,0625	−0,1250	
0,5	0,0177	0,0595	−0,1210	
0,6	0,0214	0,0562	−0,1156	
0,7	0,0249	0,0514	−0,1086	qb^2
0,8	0,0272	0,0465	−0,1009	
0,9	0,0294	0,0415	−0,0922	
1,0	0,0307	0,0367	−0,0840	
1,1	0,0378	0,0391	−0,0916	
1,2	0,0451	0,0404	−0,0983	
1,3	0,0525	0,0415	−0,1040	
1,4	0,0594	0,0418	−0,1084	
1,5	0,0661	0,0418	−0,1121	qa^2
1,6	0,0722	0,0414	−0,1148	
1,7	0,0780	0,0408	−0,1172	
1,8	0,0831	0,0399	−0,1189	
1,9	0,0879	0,0390	−0,1204	
2,0	0,0921	0,0382	−0,1216	
∞	0,1250	0,0250*	−0,1250	

* $M_{máx}$ $0{,}0387qa^2$ a $0{,}80a$ del borde empotrado.

Es interesante comprobar estos valores aproximados utilizando los resultados de las páginas 257 y 259. Repartiendo de nuevo la carga como indica la figura 115 *d*) y permutando los índices x e y en los resultados mencionados, tenemos

$$\begin{aligned} M_x &= 0{,}0317(q_0 + p)a^2 - (0{,}0051 + 0{,}0051)q_0a^2 \\ &= (0{,}0215q_0 + 0{,}0317p)a^2 \\ M_y &= 0{,}0375(q_0 + p)a^2 - (0{,}0039 + 0{,}0039)q_0a^2 \\ &= (0{,}0297q_0 + 0{,}0375p)a^2 \end{aligned} \qquad (k)$$

Tomemos de nuevo $q_0 = q/3$ y $p = 2q/3$, obtenemos para los momentos los valores exactos $0{,}0283q^2$ y $0{,}0349qa^2$. Las ecuaciones (*j*) darán para los mismos momentos, los valores aproximados $0{,}0291a^2$ y $0{,}0358qa^2$.

Librodot

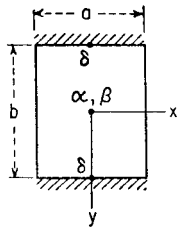


FIG. 118

TABLA 53

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 3

$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo	Factor
	$M_x = \alpha_3 q l^2$	$M_y = \beta_3 q l^2$	$\bar{M}_y = \delta_3 q l^2$	
	α_3	β_3	δ_3	
0,0	0,0083*	0,0417	−0,0833	
0,5	0,0100	0,0418	−0,0842	
0,6	0,0121	0,0410	−0,0834	
0,7	0,0152	0,0393	−0,0814	qb^2
0,8	0,0173	0,0371	−0,0783	
0,9	0,0196	0,0344	−0,0743	
1,0	0,0216	0,0316	−0,0697	
1,1	0,0276	0,0349	−0,0787	
1,2	0,0344	0,0372	−0,0868	
1,3	0,0414	0,0391	−0,0938	
1,4	0,0482	0,0405	−0,0998	
1,5	0,0554	0,0411	−0,1049	
1,6	0,0620	0,0413	−0,1090	qa^2
1,7	0,0683	0,0412	−0,1122	
1,8	0,0741	0,0408	−0,1152	
1,9	0,0795	0,0401	−0,1174	
2,0	0,0846	0,0394	−0,1191	
∞	0,1250	0,0250**	−0,1250	

* $M_{máx} = 0{,}0174 q b^2$ a $0{,}30b$ del borde apoyado.

** $M_{máx} = 0{,}0387 q a^2$ a $0{,}80a$ del borde empotrado.

El mayor error del método aproximado proviene del hecho de que los máximos momentos positivos no se producen siempre en el centro del vano. Esto está lejos de ser verdad especialmente en el caso de vanos rectangulares claramente alargados. Si b es mucho mayor que a por ejemplo, el momento máximo M_y se produce en el borde menor de la placa rectangular.

Se han indicado en notas al pie de las tablas algunos valores de estos momentos máximos y deben considerarse como los valores menores posibles de las columnas correspondientes, sin tener en cuenta la relación real b/a.

Finalmente se señalará que ni M_x ni M_y son el momento flector máximo en el

Librodot

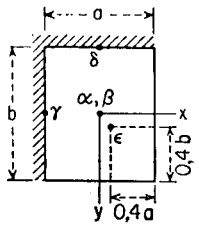


FIG. 119

TABLA 54

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 4*

$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		En $x = 0{,}1a$ $y = 0{,}1b$	Factor
	$M_x = \alpha_1 ql^2$ α_4	$M_y = \beta_4 ql^2$ β_4	$M_x = \gamma_4 ql^2$ γ_4	$M_y = \delta_4 ql^2$ δ_4	$M_{máx} = \varepsilon_4 ql^2$ ε_4	
0,5	0,0191	0,0574	−0,0787	−0,1180	0,0662	
0,6	0,0228	0,0522	−0,0781	−0,1093	0,0570	
0,7	0,0257	0,0460	−0,0767	−0,0991	0,0501	qb^2
0,8	0,0275	0,0396	−0,0746	−0,0882	0,0430	
0,9	0,0282	0,0336	−0,0715	−0,0775	0,0363	
1,0	0,0281	0,0281	−0,0678	−0,0678	0,0305	
1,1	0,0330	0,0283	−0,0766	−0,0709	0,0358	
1,2	0,0376	0,0279	−0,0845	−0,0736	0,0407	
1,3	0,0416	0,0270	−0,0915	−0,0754	0,0452	
1,4	0,0451	0,0260	−0,0975	−0,0765	0,0491	
1,5	0,0481	0,0248	−0,1028	−0,0772	0,0524	qa^2
1,6	0,0507	0,0236	−0,1068	−0,0778	0,0553	
1,7	0,0529	0,0224	−0,1104	−0,0782	0,0586	
1,8	0,0546	0,0213	−0,1134	−0,0785	0,0608	
1,9	0,0561	0,0202	−0,1159	−0,0786	0,0636	
2,0	0,0574	0,0191	−0,1180	−0,0787	0,0662	

* Los autores agradecen al National Research Council de Canadá las facilidades que se les han dado para el cálculo de esta tabla.

centro de la placa en el caso no simétrico 4. De todas formas la tabla 54 muestra que la diferencia entre $M_{máx}$ y los mayores valores de M_x y M_y, no sobrepasa el 10 % de los últimos valores y que el método general de la página 263 y 264 está plenamente justificado en el cuarto caso.

La tabla 54 contiene los valores de los momentos máximos $M_{máx}$ que actúan en $x = 0{,}1a$, $y = 0{,}1b$ y permiten el dimensionamiento de vanos aislados sin continuidad (fig. 119); para placas rectangulares la dirección e $\sigma_{máx}$ es prácticamente la de la dimensión menor y para placas cuadradas la de la diagonal $x = -y$. Cuando se quiera obtener una seguridad mayor se podrán utilizar estos valores de $M_{máx}$ para calcular vanos continuos de forma alargada.

Librodot

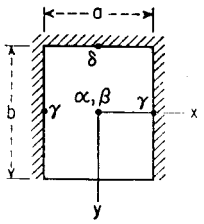


FIG. 120

TABLA 55

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 5*

$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		Factor
	$M_x = \alpha_5 ql^2$ α_5	$M_y = \beta_5 ql^2$ β_5	$M_x \gamma_5 ql^2$ γ_5	$M_y = \delta_5 ql^2$ δ_5	
0,5	0,0206	0,0554	−0,0783	−0,114	
0,6	0,0245	0,0481	−0,0773	−0,102	
0,7	0,0268	0,0409	−0,0749	−0,0907	
0,8	0,0277	0,0335	−0,0708	−0,0778	qb^2
0,9	0,0274	0,0271	−0,0657	−0,0658	
1,0	0,0261	0,0213	−0,0600	−0,0547	
1,1	0,0294	0,0204	−0,0659	−0,0566	
1,2	0,0323	0,0192	−0,0705	−0,0573	
1,3	0,0346	0,0179	−0,0743	−0,0574	
1,4	0,0364	0,0166	−0,0770	−0,0576	
1,5	0,0378	0,0154	−0,0788	−0,0569	
1,6	0,0390	0,0143	−0,0803	−0,0568	
1,7	0,0398	0,0133	−0,0815	−0,0567	qa^2
1,8	0,0405	0,0125	−0,0825	−0,0567	
1,9	0,0410	0,0118	−0,0831	−0,0566	
2,0	0,0414	0,0110	−0,0833	−0,0566	
∞	0,0417	0,0083	−0,0833	−0,0566	

*Los datos de esta tabla se deben principalmente a F. Czerny, *Bautech.-Arch.*, vol. 11, pág. 33, W. Ernest & Sohn, Berlín, 1955.

El método descrito en este apartado es también aplicable si las luces, las rigideces a flexión o las intensidades de carga de un tablero a otro de la placa continua difieren sólo ligeramente. En otros casos se utilizarán métodos más exactos.

De todas formas, debe tenerse en cuenta que la aplicación rigurosa de la teoría al estudio de las losas de piso, continuas, conduce a menudo a cálculos difíciles y la exactitud obtenida es ilusoria teniendo en cuenta varios factores más o menos indeterminados, que afectan al valor de los momentos de la placa. Estos factores son, por ejemplo, la flexibilidad y la rigidez a la torsión de las vigas de apoyo, la influencia de

Librodot

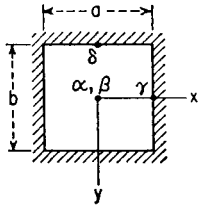


FIG. 121

TABLA 56

Momentos flectores en placas uniformemente cargadas, caso 6

$\nu = 0{,}2$, l = el menor de los valores a y b

b/a	Centro de la placa		Punto medio del borde fijo		Factor
	$M_x = \alpha_6 q l^2$	$M_y = \beta_6 q l^2$	$\bar{M}_x = \gamma_6 q l^2$	$\bar{M}_y = \delta_6 q l^2$	
	α_6	β_6	γ_6	δ_6	
0,0	0,0083	0,0417	−0,0571	−0,0833	
0,5	0,0118	0,0408	−0,0571	−0,0829	
0,6	0,0150	0,0381	−0,0571	−0,0793	
0,7	0,0178	0,0344	−0,0569	−0,0736	qb^2
0,8	0,0198	0,0299	−0,0559	−0,0664	
0,9	0,0209	0,0252	−0,0540	−0,0588	
1,0	0,0213	0,0213	−0,0513	−0,0513	
1,1	0,0248	0,0210	−0,0581	−0,0538	
1,2	0,0284	0,0203	−0,0639	−0,0554	
1,3	0,0313	0,0193	−0,0687	−0,0563	
1,4	0,0337	0,0181	−0,0726	−0,0568	
1,5	0,0358	0,0169	−0,0757	−0,0570	
1,6	0,0372	0,0157	−0,0780	−0,0571	qa^2
1,7	0,0385	0,0146	−0,0799	−0,0571	
1,8	0,0395	0,0136	−0,0812	−0,0571	
1,9	0,0402	0,0126	−0,0822	−0,0571	
2,0	0,0408	0,0118	−0,0829	−0,0571	
	0,0417	0,0083	−0,0833	−0,0571	

la coacción de los muros próximos, la anisotropía de la placa misma y la inexactitud en la estimación del valor de constantes, tales como el coeficiente de Poisson ν.

De todas formas se puede simplificar el método de cálculo limitando la serie de Fourier, que representa un momento flector en la placa, a su primer término o sustituyendo los valores reales de los momentos o las pendientes a lo largo de un apoyo cualquiera de la placa por sus valores medios o, finalmente, utilizando el método de distribución de momentos[1].

[1] Para estos métodos, véase C. P. Siess y N. M. Newmark, *Univ. Illinois Bull.*, 43, 1950, donde se ha dado otra bibliografía sobre este asunto. Véase también la memoria de H. M. Westergaard, *Proc. Am. Concrete Inst.*, vol. 22, 1926, que contiene valiosas conclusiones respecto a proyectos de losas continuas.

Librodot

54. *Flexión de placas apoyadas sobre filas de columnas equidistantes (losas fungiformes)*

Si las dimensiones de la placa son grandes en comparación con las distancias a y b de las columnas (fig. 122) y la carga transversal está uniformemente repartida, se llega a que la flexión en los vanos interiores de la placa se puede suponer idéntica de modo que se pueda limitar el problema a la flexión de un solo vano. Tomemos los ejes de coordenadas paralelos a las filas de columnas y el origen en el centro del vano, se considera éste como una placa rectangular uniformemente cargada de lados a y b. Por simetría se llega a que la deformada de la placa tiene la forma que indican las líneas de trazos de la figura 122 *b*). La flecha máxima está en el centro de la placa y la flecha en los vértices es nula. Para simplificar el problema, se supone que las dimensiones de las secciones rectas de las columnas son pequeñas y pueden despreciarse en lo que se refiere a la flecha y los momentos producidos en el centro de la placa[1]. Tenemos entonces una placa rectangular uniformemente cargada, apoyada en los

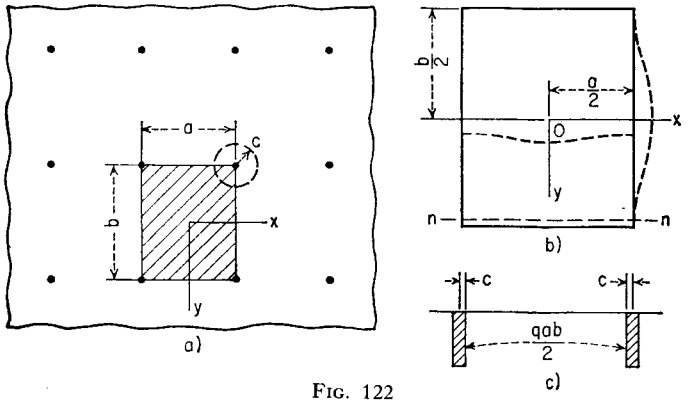


FIG. 122

vértices y se deduce de la simetría que la pendiente de la deformada, en la dirección de la normal al contorno y el esfuerzo cortante son nulos en todos los puntos de los bordes de la placa, salvo en los vértices[2].

Operando como en el caso de una placa simplemente apoyada (ap. 30) se escribe la flecha total w de la forma

$$w = w_1 + w_2 \tag{a}$$

donde

$$w_1 = \frac{qb^4}{384D}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 \tag{b}$$

[1] Varios autores han estudiado el problema en esta forma simplificada; véase, por ejemplo, A. Nádai, «Uber die Biegund durchlaufender Platten», *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, 1922, página 1, y B. G. Galerkin, *Collected Papers*, vol. 2, Moscú, 1953, pág. 29.

[2] La anulación del momento torsor M_{xy} a lo largo del contorno se sigue del hecho de que la pendiente es nula en la dirección de la normal al contorno.

Librodot

representa la flecha de una franja uniformemente cargada empotrada en los extremos y $\pm b/2$ y satisface la ecuación (103) de la placa así como las condiciones en los bordes

$$\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \qquad (Q_x)_{x=\pm a/2} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right)_{x=\pm a/2} = 0 \quad (c)$$

Tomamos la flecha w_2 en forma de una serie

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} Y_m \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (d)$$

cada uno de cuyos términos cumple las condiciones (c). Las funciones Y_m deben tomarse de tal manera que cumplan la ecuación homogénea

$$\Delta\Delta w_2 = 0 \qquad (e)$$

y de tal manera que w cumpla las condiciones de contorno en los bordes $y = \pm b/2$. La ecuación (e) y las condiciones de simetría se cumplen escribiendo (d) de la forma

$$w_2 = A_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (f)$$

donde las constantes A_0, A_m y B_m se determinan por las condiciones de borde a lo largo de $y = b/2$. A partir de la condición relativa a la pendiente, es decir

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b/2} = \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y}\right)_{y=b/2} = 0$$

se encuentra fácilmente que

$$B_m = -A_m \frac{\operatorname{th}\alpha_m}{\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m} \qquad (g)$$

donde, como anteriormente

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \qquad (h)$$

Consideremos ahora las condiciones de contorno relativas al esfuerzo cortante, se ve que sobre una sección normal mn [fig. 122 b)] de la placa, muy próxima al contorno $y = b/2$ el esfuerzo Q_y es igual a cero en todos los puntos, salvo en los próximos a la columna y en estos puntos Q_y es infinitamente grande de modo que transmite a la columna la carga finita $\frac{1}{2}qab$ [fig. 122 c)] a lo largo de una distancia infinitamente pequeña entre $x = a/2 - c$ y $x = a/2 + c$. Representando Q_y por una serie trigonométrica que por simetría tiene la forma

$$Q_y = C_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} C_m \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (i)$$

Librodot

recordando que

$$Q_y = 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < \frac{a}{2} - c$$

y

$$\int_{a/2-c}^{a/2} Q_y \, dx = -\frac{qab}{4}$$

se encuentra por el método ordinario de cálculo que

$$C_0 = -\frac{qab}{2a} = -\frac{P}{2a}$$

y

$$C_m = \frac{4}{a}\int_0^{a/2} Q_y \cos\frac{m\pi x}{a}\, dx = -\frac{P}{a}(-1)^{m/2}$$

donde $P = qab$ es la carga total sobre un vano de la placa. Sustituyendo C_0 y C_m por su valor en la serie (i) la requerida condición de contorno se escribe:

$$(Q_y)_{y=b/2} = -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2\, \partial y}\right)_{y=b/2}$$

$$= -\frac{P}{a}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}(-1)^{m/2}\cos\frac{m\pi x}{a} - \frac{P}{2a}$$

Sustituyendo w por su valor en (a) y recordando que el segundo término entre paréntesis se anula al tener en cuenta la condición de contorno $\partial w/\partial y$ se obtiene

$$-D\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial y^3}\right)_{y=b/2} = -\frac{P}{a}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}(-1)^{m/2}\cos\frac{m\pi x}{a}.$$

donde utilizando (f) se encuentra que

$$D\frac{m^3\pi^3}{a^3}\left[(A_m + 3B_m)\operatorname{sh}\alpha_m + B_m\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m\right] = \frac{P}{a}(-1)^{m/2} \qquad (j)$$

Resolviendo las ecuaciones (g) y (j) obtenemos para A_m y B_m

$$A_m = -\frac{Pa^2}{2m^3\pi^3 D}(-1)^{m/2}\frac{\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m}$$

$$B_m = \frac{Pa^2}{2m^3\pi^3 D}(-1)^{m/2}\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_m} \qquad (k)$$

La flecha de la placa toma la forma

$$w = \frac{qb^4}{384D}\left(1 - \frac{4y^2}{b^2}\right)^2 + A_0 + \frac{qa^3b}{2\pi^3 D}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}\cos\dfrac{m\pi x}{a}}{m^3 \operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m}$$

$$\left[\operatorname{th}\alpha_m \frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} - (\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m)\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\right] \qquad (l)$$

Librodot

La constante A_0 puede ahora determinarse a partir de la condición de que la flecha se anule en los vértices de la placa. Por consiguiente

$$(w)_{x=a/2,\ y=b/2} = 0$$

y

$$A_0 = -\frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3}\left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{th}^2 \alpha_m}\right) \qquad (m)$$

La flecha en cualquier punto de la placa, se calcula mediante las expresiones (l) y (m). La flecha máxima se produce evidentemente en el centro de la placa, donde se tiene

$$(w)_{x=0,y=0} = \frac{qb^4}{384D} - \frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2}}{m^3} \frac{\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m}$$

$$- \frac{qa^3b}{2\pi^3 D} \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^3}\left(\alpha_m - \frac{\alpha_m + \operatorname{th}\alpha_m}{\operatorname{th}^2 \alpha_m}\right) \qquad (n)$$

La tabla 57 da los valores de esta flecha calculados para varios valores de la relación b/a. En ella se encuentran también los momentos flectores $(M_x)_{x=0,\ y=0}$ y $(M_y)_{x=0,\ y=0}$ calculados mediante las fórmulas (101) y (l) de la flecha. Se ve que para $b > a$ el máximo momento flector en el centro de la placa difiere poco del momento en el centro de una franja uniformemente cargada de longitud b empotrada en los extremos.

TABLA 57

Flechas y momentos en el centro de un vano (fig. 122)

$\nu = 0{,}2$

b/a	$w = \alpha\frac{qb^4}{D}$ α	$M_x = \beta qb^2$ β	$M_y = \beta_1 qb^2$ β_1
1,0	0,00581	0,0331	0,0331
1,1	0,00487	0,0261	0,0352
1,2	0,00428	0,0210	0,0363
1,3	0,00387	0,0175	0,0375
1,4	0,00358	0,0149	0,0384
1,5	0,00337	0,0131	0,0387
2,0	0,00292	0,0092	0,0411
∞	0,00260	0,0083	0,0417

Las reacciones concentradas que actúan en los puntos de apoyo de la placa y los momentos calculados a partir de (l) resultan infinitos. Podemos sin embargo suponer que las reacciones están repartidas uniformemente sobre el área de un círculo que representa la sección recta de la columna. En este caso, los momentos flectores que aparecen en el centro del área de apoyo son finitos y se calculan por un método

Librodot

similar al utilizado en el caso de placas rectangulares (v. pág. 169). Llevándolo a la figura 122, el resultado viene dado por las fórmulas[1]:

$$(M_x)_{x=a/2,y=b/2} = M_0 - \frac{qb^2}{4}\left[\frac{\nu}{3} + (1-\nu)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{m\pi b}{a}}\right]$$

$$(M_y)_{x=a/2,y=b/2} = M_0 + \frac{qb^2}{4}\left[-\frac{1}{3} + (1-\nu)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{n\pi b}{a}} + (1-\nu)\frac{a}{\pi b}\right] \qquad (o)$$

En estas expresiones

$$M_0 = -\frac{qab}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{2\pi c(1-q^2)^2(1-q^4)^2\cdots} + 1\right]$$

$q = e^{-\pi b/a}$ y c representa el radio del círculo que se supone pequeño en comparación a las luces a y b de los vanos. Realizando los cálculos se pueden reducir las ecuaciones (o) a la forma

$$(M_x)_{x=a/2,y=b/2} = -\frac{qab}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{c} - (\alpha+\beta\nu)\right]$$

$$(M_y)_{x=a/2,y=b/2} = -\frac{qab}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{c} - (\beta+\alpha\nu)\right] \qquad (p)$$

donde α y β son coeficientes dados por la tabla 58 para varios valores de la relación b/a.

TABLA 58

Valores de los coeficientes α y β de las ecuaciones (p) que dan los momentos sobre los apoyos

b/a	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2,0
α	0,811	0,822	0,829	0,833	0,835	0,836	0,838
β	0,811	0,698	0,588	0,481	0,374	0,268	−0,256

Los momentos flectores correspondientes al centro de las columnas cuyas secciones transversales son rectangulares se calculan también suponiendo que las reacciones están uniformemente repartidas sobre los rectángulos rayados de la figura 123 que representa las secciones rectas de las columnas[2]. En el caso de vanos y columnas cuadradas tenemos $u/a =$

[1] Dadas por A. Nádai en su libro *Elastische Platten*, Berlín, 1925, pág. 154.

[2] Este caso ha sido estudiado por S. Woinowsky-Krieger, véase *Z. angew. Math. Mech.*, volumen 14, pág. 13, 1934. Véase también los estudios de V. Lewe, *Bauingenieur*, vol. 1, página 631, 1920, y K. Frey, *Bauingenieur*, vol. 7, pág. 21, 1926.

Librodot

v/b k, y los momentos en el centro de las columnas y en el centro de los vanos se obtienen por las siguientes fórmulas:

$$(M_x)_{x=y=a/2} = (M_y)_{x=y=a/2} = -\frac{(1+\nu)qa^2}{4}\left[\frac{(1-k)(2-k)}{12}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^3 k^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m^3 \operatorname{sh} m\pi}\operatorname{sh}\frac{m\pi k}{2}\operatorname{ch}\frac{m\pi(2-k)}{2}\operatorname{sen} m\pi k\right] \qquad (q)$$

$$(M_x)_{x=y=0} = (M_y)_{x=y=0}$$

$$= \frac{(1+\nu)qa^2}{4}\left[\frac{1-k^2}{12} + \frac{1}{\pi^3 k^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\operatorname{sh} m\pi k \operatorname{sen} m\pi k}{m^3 \operatorname{sh} m\pi}\right] \qquad (r)$$

La tabla 59 da para diferentes valores de k y para $\nu = 0{,}2$ los valores de estos momentos así como los de los momentos en los puntos medios de las distancias entre las columnas, obtenidos por las mismas ecuaciones.

TABLA 59

Momentos flectores y esfuerzo cortante máximo en un vano cuadrado de una placa uniformemente cargada (fig. 123)

$\nu = 0{,}2$

u/a	k	$(M)_{x=y=a/2} = \beta qa^2$	$(M)_{x=y=0} = \beta_1 qa^2$	$(M_x)_{x=a/2,\,y=0} = \beta qa^2$	$(M_y)_{x=a/2,\,y=0} = \beta_3 qa^2$	$Q_{\max} = \gamma qa$
		β	β_1	β_2	β_3	γ
0		$-\infty$	0,0331	−0,0185	0,0512	∞
0,1		−0,196	0,0329	−0,0182	0,0508	2,73
0,2		−0,131	0,0321	−0,0178	0,0489	
0,3		−0,0933	0,0308	−0,0170	0,0458	0,842
0,4		−0,0678	0,0289	−0,0158	0,0415	
0,5		−0,0487	0,0265	−0,0140	0,0361	0,419

Se ve que los momentos en las columnas son mucho mayores que los del centro del vano y su valor depende enormemente de las dimensiones de la sección recta de las columnas. Los momentos en el centro del tablero permanecen prácticamente constantes para valores de k inferiores a 0,2. Por consiguiente, la solución anterior, obtenida suponiendo que las reacciones están concentradas en los vértices de los tableros, es suficientemente aproximada para la parte central de los vanos.

Se puede también hacer mediante las expresiones (p) el cálculo aproximado de los momentos dados por la ecuación (q) en forma de serie. Para ello se utiliza la ecuación (c) (ap. 37) y se sustituye

$$c = \frac{u}{\sqrt{2}}e^{\pi/4-1} = 0{,}57u$$

es decir, el radio de un círculo equivalente al área del cuadrado dado de lado u en las ecuaciones (p). En el caso particular de vanos cuadrados, los resultados numéricos obtenidos difieren muy poco de los dados en la segunda columna de la table 59.

Librodot

Los esfuerzos cortantes son máximos en el centro de los lados de las columnas en los puntos m de la figura 123. Este máximo en el caso de vanos cuadrados, depende de la relación k y se puede escribir en la forma $Q = \gamma q a^2$.

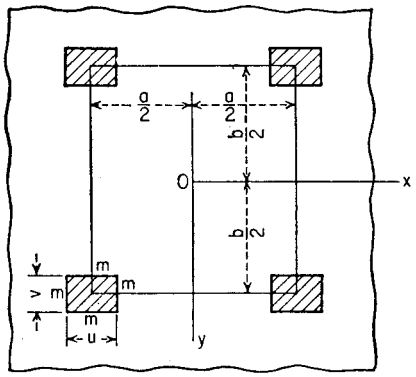


FIG. 123

La tabla 59 da varios valores numéricos del factor γ. Es interesante señalar que hay una diferencia de sólo alrededor del 10 % entre estos valores y los valores medios, obtenidos dividiendo la carga total $qa^2(1 - k^2)$ de la columna por el perímetro $4ka$ de su sección recta.

La carga uniforme en toda placa da la condición más desfavorable para las columnas. Para obtener el momento flector máximo en el centro de un vano, la carga deberá estar distribuida como indican las partes rayadas de la figura 124 *a*).

La solución se obtiene entonces fácilmente combinando el reparto de carga uniforme de intensidad $q/2$ de la figura 124 *b*) con la carga $q/2$ de signo combinado, en los vanos consecutivos indicada en la figura 124 *c*).

La deformada en este último caso es evidentemente la misma que la de una franja uniformemente cargada de longitud a, simplemente apoyada en los extremos. Tomemos, por ejemplo, el caso de vanos cuadrados y utilicemos los valores de la tabla 57, se encuentra para el centro de un vano (fig. 124 *a*)

$$(w)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0{,}00581 \frac{a^4}{D} + \frac{5}{384} \frac{q}{2} \frac{a^4}{D} = 0{,}00942 \frac{qa^4}{D}$$

$$(M_x)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0{,}0331 a^2 + \frac{1}{16} qa^2 = 0{,}0791 qa^2$$

$$(M_y)_{x=y=0} = \frac{1}{2} q \cdot 0{,}0331 a^2 + \frac{0{,}2}{16} qa^2 = 0{,}0291 qa^2$$

Además, a partir de la tabla 59 se llega a que

$$(M_x)_{x=0,y=b/2} = \tfrac{1}{2} q \cdot 0{,}0512 a^2 + \tfrac{1}{16} qa^2 = 0{,}0881 qa^2$$

Librodot

Los resultados anteriores se obtienen suponiendo que la placa está libre para girar en los puntos de apoyo. Ordinariamente las columnas están rígidamente unidas con la placa y, en el caso de un reparto de carga (v. fig. 124) producen, no sólo reacciones verticales sino también momentos que disminuyen la flexión de los vanos. Para determinar valores más exactos de los momentos flectores bajo carga alternada, es preciso un estudio conjunto de las losas y las columnas como estructura única[1].

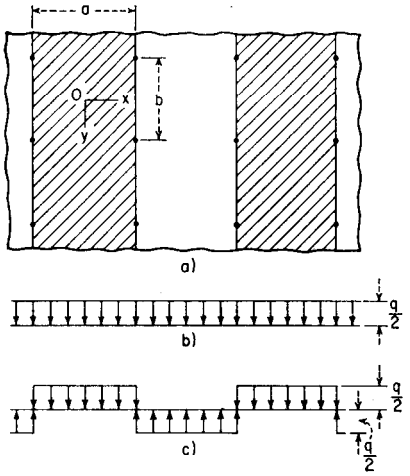


FIG. 124

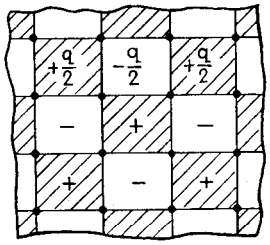


FIG. 125

El caso en el que un vano está uniformemente cargado mientras que los cuatro vanos adyacentes no están cargados, se obtiene superponiendo a una carga $q/2$ otra carga $q/2$ de signo alternado como indica la figura 125. En este caso cada vano se encuentra en las mismas condiciones que una placa simplemente apoyada y la tabla 8 nos dará entonces todos los datos necesarios relativos a la flexión. Para un vano cuadrado, se encuentra en su centro

$$(w)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0{,}00581\,\frac{a^4}{D} + \frac{1}{2}q \cdot 0{,}00406\,\frac{a^4}{D} = 0{,}00494\,\frac{qa^4}{D}$$

$$(M_x)_{x=y=0} = (M_y)_{x=y=0} = \frac{1}{2}q \cdot 0{,}0331a^2 + \frac{1}{2}q \cdot 0{,}0479 \cdot \frac{1{,}2}{1{,}3}\,a^2 = 0{,}0387qa^2$$

El caso de una losa infinitamente grande, sometida a cargas concentradas iguales, aplicadas en el centro de cada vano, se trata prácticamente de la misma manera que el caso anterior, es decir, utilizando la doble periodicidad de las flechas de la placa[2].

[1] El método a utilizar ha sido expuesto en varias publicaciones; véase, por ejemplo, H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, pág. 310, Berlín, 1932.

[2] V. Lewe ha estudiado este problema en su obra *Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatte*, Berlín, 1926, y también P. Pozzati, *Rev. Math. Univ. Parma*, vol. 2, pág. 123, 1951.

Librodot

Se ha estudiado también el problema de la flexión de las losas fungiformes uniformemente cargadas, de tableros oblicuos[1].

55. *Losa fungiforme con nueve vanos y losa con dos bordes libres*

Hasta aquí se ha supuesto siempre una extensión infinita de losa. Ahora consideraremos una placa simplemente apoyada sobre los muros exteriores, que forman el contorno cuadrado de la placa y sobre cuatro columnas intermedias (fig. 126). Por simetría se llega a que una carga de intensidad q, uniformemente repartida produce iguales reacciones k en las columnas que

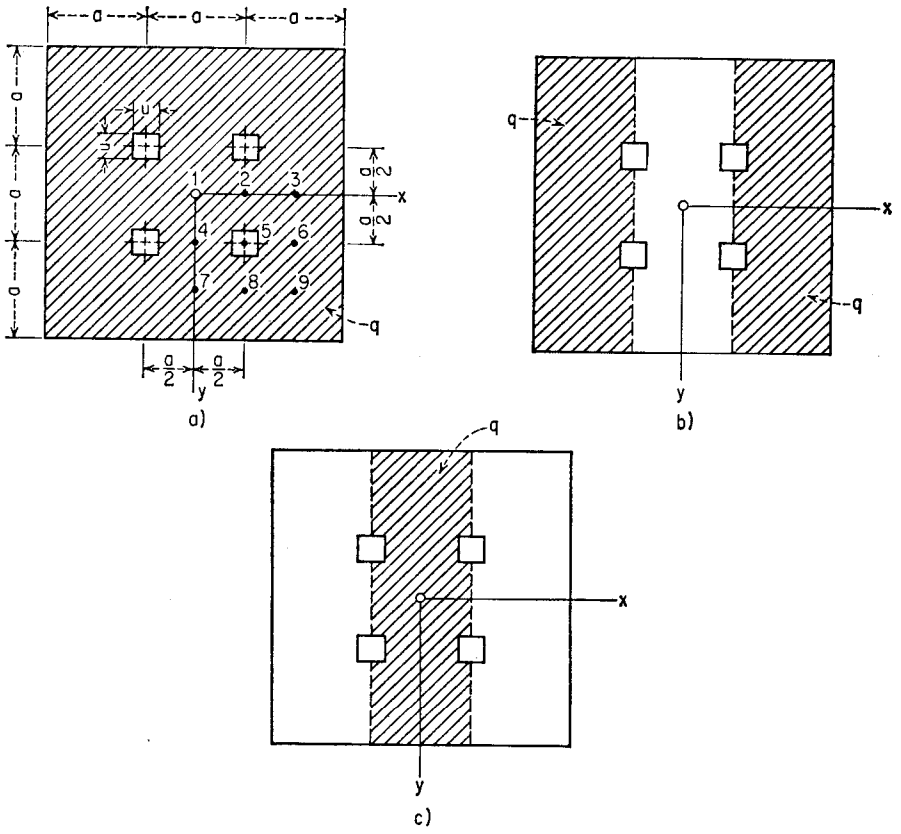


FIG. 126

podemos considerar como accesorias en la construcción dada, estáticamente indeterminada. Si retiramos todas las columnas, se obtiene una placa cuadrada simplemente apoyada que soporta una carga dada q. Las flechas w_0 debidas a esta carga en el centro de las columnas se calculan fácilmente

[1] Véase V. I. Blokh, *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, núm. 5, vol. 73, pág. 45, 1950.

Librodot

mediante la teoría del capítulo 5. Retiremos ahora la carga q y repartamos una carga R = 1 (que actúa hacia abajo) uniformemente sobre cada área cuadrada de lado u, se obtienen nuevas flechas w_1 en los mismos puntos $x = \pm a/2$, $y = \pm a/2$ que anteriormente. Puesto que en el caso real estos puntos no descienden, se llega a que $w_0 - Rw_1 = 0$ que da $R = w_0/w_1$. Basta ahora combinar el efecto de la carga uniforme q con el efecto de cuatro reacciones conocidas sobre los momentos flectores de la placa cuadrada de lado $3a$.

En el caso de una carga parcial como las indicadas en las figuras 126 *b*) y *c*), se superpone la mitad de los momentos obtenidos antes a los momentos de una placa, simplemente apoyada de dimensiones a por $3a$, bajo una carga uniformemente repartida $\pm q/2$. La tabla 60 nos da los valores de los momentos flectores calculados por Marcus[1] para esta clase de problemas. La reacción de una columna es, en este caso, $R = 1196qa^2$. Se ha estudiado de la misma forma la flexión de una placa infinita que está apoyada no sólo sobre los bordes paralelos sino también sobre una o varias filas de columnas equidistantes[2].

TABLA 60

Coeficientes β para el cálculo de momentos flectores $M = \beta qa^2$ en una placa cuadrada simplemente apoyada con cuatro columnas interiores (fig. 126)

$u/a = 0{,}25$, $\nu = 0{,}2$

Punto	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{a}$	Carga *a*		Carga *b*		Carga *c*	
			M_x	M_y	M_x	M_y	M_x	M_y
1	0,0	0,0	0,021	0,021	−0,048	−0,004	0,069	0,025
2	0,5	0,0	−0,040	0,038	−0,020	0,019	−0,020	0,019
3	1,0	0,0	0,069	0,025	0,093	0,027	−0,024	−0,002
4	0,0	0,5	0,038	−0,040	−0,036	−0,036	0,074	−0,004
5	0,5	0,5	−0,140	−0,140	−0,070	−0,070	−0,070	−0,070
6	1,0	0,5	0,074	−0,004	0,092	0,014	−0,018	−0,018
7	0,0	1,0	0,025	0,069	−0,028	0,017	0,052	0,052
8	0,5	1,0	−0,004	0,074	−0,002	0,037	−0,002	0,037
9	1,0	1,0	0,053	0,053	0,066	0,044	−0,013	0,009

Se puede resolver también, sin ninguna dificultad el caso de flexión, de una placa larga rectangular apoyada únicamente sobre dos líneas de columnas equidistantes (fig. 127) para varios tipos de cargas. Comencemos por el caso de una placa flexada por momentos M_y representados por la serie

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = M_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} E_m \cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (a)$$

[1] *Die Theorie elastischer Gewebe*; véase también Lewe, *op. cit.* N. J. Nielsen ha estudiado el caso de una placa cuadrada con un apoyo intermedio, *Bestemmelse of Spaendinger I Plader*, página 217, Copenhague, 1920.

[2] Véase a este respecto K. Grein, *Pilzdecken*, Berlín, 1948.

Librodot

Puesto que no hay carga transversal, la deformada de la placa puede tomarse en forma de la serie

$$w = A_0 + A_1\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}\left(A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\right)\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (b)$$

cuyos coeficientes deben determinarse por las siguientes condiciones de contorno

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{y=\pm b/2} = M_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} E_m \cos\frac{m\pi x}{a}$$
$$D\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial x^2}\right]_{y=\pm b/2} = 0 \qquad (c)$$

y también por el hecho de que la flecha se anula en las columnas. Sustituyendo (b) en las ecuaciones (c) se encuentra

$$A_1 = -\frac{M_0}{2D}$$
$$A_m = -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{sh}\alpha_m - (1-\nu)\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m}{(3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m - \alpha_m(1-\nu)^2} \qquad (d)$$
$$B_m = -\frac{a^2 E_m}{\pi^2 m^2 D}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha_m}{(3+\nu)\operatorname{sh}\alpha_m \operatorname{ch}\alpha_m - \alpha_m(1-\nu)}$$

Combinando estos resultados con la solución (l), apartado 54, se puede estudiar la flexión de una placa [v. fig. 127 a)] sometida a la acción de una carga uniformemente repartida. Para ello se calculan los momentos flectores M_y por las expresiones (l) y utilizando (101) se encuentra

$$(M_y)_{y=\pm b/2} = -\frac{qb^2}{12} - \frac{qab}{2\pi}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{m/2}}{m}\left[\frac{1+\nu}{\operatorname{th}\alpha_m} - \frac{\alpha_m(1-\nu)}{\operatorname{sh}^2\alpha_m}\right]\cos\frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

Igualando este momento al momento (a) cambiado de signo, se obtienen los valores de M_0 y E_m que llevados a las ecuaciones (d) dan las constantes A, A_m y B_m. Sumando la expresión (b) con estos valores de las constantes, a la expresión (l) del apartado 54, se obtiene la solución buscada para una placa uniformemente cargada [fig. 127 a)].

Combinando esta solución con la de una franja de longitud b uniformemente cargada, simplemente apoyada, que está dada por la ecuación

$$w = -\frac{q}{24D}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)\left(\frac{5}{4}b^2 - y^2\right)$$

Librodot

Se obtiene la solución del caso de la placa flexada por una carga uniformemente repartida a lo largo de los bordes como indica la figura 127 *b*).

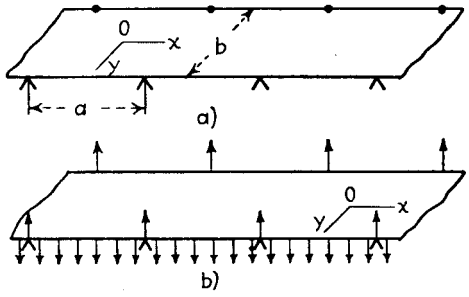


FIG. 127

56. Influencia de la unión rígida con el soporte sobre los momentos de una losa fungiforme.

En el estudio de la flexión de losas fungiformes se ha supuesto siempre que las reacciones de las columnas están concentradas en ciertos puntos o repartidas uniformemente sobre ciertas áreas que representan la sección transversal de las columnas o de sus capiteles. Por regla general, las losas de hormigón están rígidamente fijas a las columnas como indica la figura 128.

Para estudiar los momentos en estas uniones rígidas, comenzaremos por el caso de una columna circular, siendo c el radio de su sección transversal. El cálculo de los momentos flectores mediante (*l*) (ap. 54) muestra[1] que en el caso de un vano cuadrado (a b) y para pequeños valores de c/a, los momentos flectores en la dirección radial, se anulan prácticamente a lo largo de un círculo de radio $e = 0{,}22a$ [fig. 122 *a*)]. Así, pues, la parte de la placa en torno a la columna y en el interior de este círculo, está

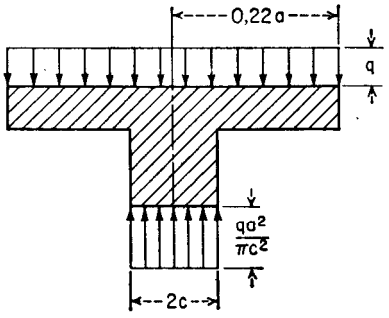


FIG. 128

en las condiciones de una placa anular simplemente apoyada a lo largo de un círculo r $0{,}22a$ y empotrada a lo largo del círculo $r = c$ con desplazamiento transversal de un círculo con respecto al otro. Por consiguiente la tensión de flexión máxima alrededor de la columna puede obtenerse utilizando las fórmulas (75) obtenidas anteriormente para las placas circulares (v. pág. 80) y combinando los casos 3 y 8 de la figura 36.

[1] A. Nádai realizó estos cálculos; véase su libro *Elastische Platten*, pág. 156, Berlín, 1925.

Librodot

Se debe a F. Tölke[1] un estudio más minucioso del mismo problema. La tabla 61 da los resultados numéricos obtenidos por Tölke para un vano cuadrado y para $c/a = 0{,}1$ (fig. 129); esta misma tabla da los valores de los momentos flectores para el mismo caso, calculados a partir de la teoría ordinaria.

TABLA 61

Coeficientes β para el cálculo de momentos flectores $M = \beta q a^2$ de un vano cuadrado uniformemente cargado en una losa fungiforme

$\nu = 0{,}2$

Momento flector	Situación	Columna circular (fig. 129)		Columna cuadrada (fig. 130)	
		Unión rígida con la columna	Teoría ordinaria	Unión rígida con la columna	Teoría ordinaria
$M_x = M_y$	$x = a/2,\ y = a/2$	0,0292	0,0323	0,0264	0,0321
M_x	$x = a/2,\ y = 0$	0,0399	0,0494	0,0348	0,0487
M_y	$x = a/2,\ y = 0$	−0,0161	−0,0179	−0,0146	−0,0178
$M_x = M_y$	$x = 0,\ y = 0$	.....	−0,143	.....	−0,131
M_x	$x = u/2,\ y = 0$	.....	.....	−0,0626	−0,0803
M_r	$x = u/2,\ y = u/2$	.....	.....	−∞	−0,0480
M_r	$r = c$	−0,1682	−0,0629		

Se ve que una unión rígida entre losa y columna tiende a aumentar en valor absoluto los momentos de apoyo y a reducir los momentos positivos de la losa.

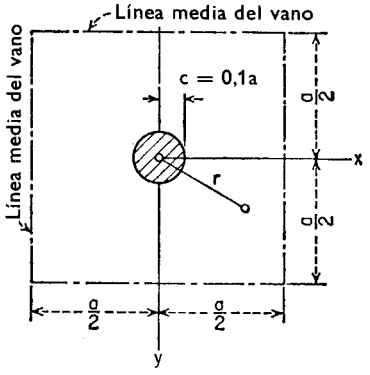


FIG. 129

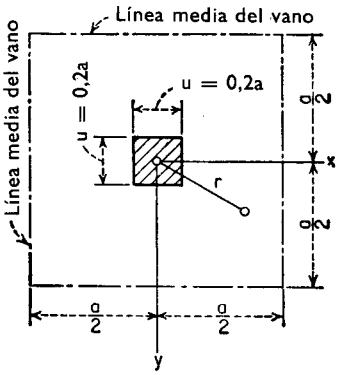


FIG. 130

La misma tabla da también los momentos para una losa fungiforme, fija rígidamente a una columna de sección transversal cuadrada[2] (fig. 130). En este caso, las tensiones infinitamente grandes que se producen en los ángulos de las columnas, tienen un carácter altamente localizado. Prácticamente, se limitan a una fisuración del hormigón bajo tracción y a un alargamiento local de la armadura de acero.

[1] F. Tölke, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 187, 1934.
[2] Véase S. Woinowsky-Krieger, *J. Appl. Mechanics*, vol. 21, pág. 263, 1954.

Se puede llegar por este estudio a que: 1) los valores reales de los momentos flectores de una losa fungiforme junto a las columnas están generalmente comprendidas entre los valores dados por la tabla 61 para unión rígida y las dadas por la teoría ordinaria y 2) las columnas circulares aseguran una distribución más uniforme de los momentos de empotramiento que las columnas con sección de apoyo cuadrada[1].

[1] Véase T. Haas, «Conception et calcul des planchets a dalles champignon», París, 1950. La distribución de tensiones en losas fungiformes ha sido estudiada experimentalmente por M. Roš y A. Eichinger, *Proc. Congr. Concrete and Reinforced Concrete*, Lieja, 1930; por R. Caminade y R. L'Hermite, *Ann. Inst. tech. bâtiment et trav. publ.*, febrero 1936, y más recientemente por J. G. Hageman, *Ingenieur*, vol. 65, junio 1953.

Librodot