# TEORIA DE LÁMINAS Y PLACAS CAPÍTULO 8 S. TIMOSHENKO & S. WOINOWSKY KRIEGER

*Digitalizado por* LIBROdot.com
*http://www.librodot.com*

# 8

# Placas sobre cimentación elástica

### *57. Flexión simétrica respecto al centro*

Una placa cargada transversalmente puede descansar sobre una cimentación elástica, como en el caso de una carretera de hormigón o una pista de aterrizaje. Comenzaremos el estudio de estos problemas, por la hipótesis más sencilla de que la intensidad de la reacción del terreno de apoyo es proporcional a las flechas $w$ de la placa. La expresión $kw$ da esta intensidad. La constante $k$ expresada en kilogramos por centímetro cúbico, se llama *módulo de cimentación*. El valor numérico del módulo depende en gran parte de las propiedades del terreno de apoyo; en el caso de una losa de pavimento de gran extensión, este valor se puede estimar por medio del diagrama de la tabla 62[1].

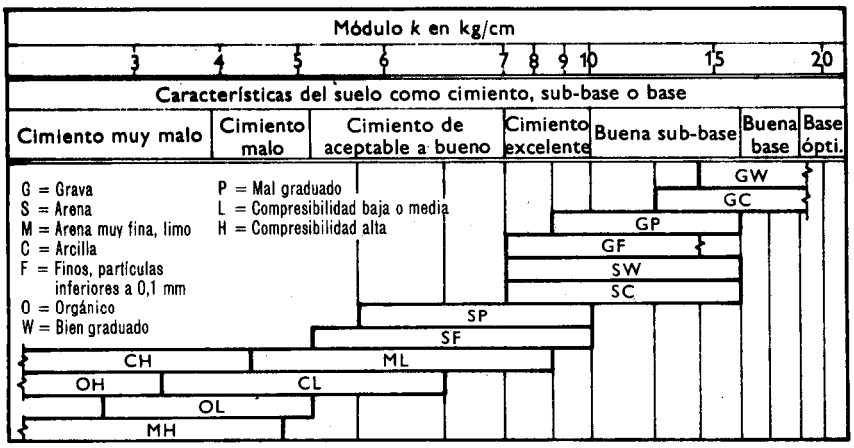
Comenzaremos por el caso de una placa circular sobre la cual la carga está repartida simétricamente respecto al centro. Utilizando la ecuación (58), sumaremos $-kw$, reacción del terreno, a la carga transversal $q$. Así se llega a la ecuación diferencial de la placa flexada

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=\frac{q-kw}{D} \tag{178}$$

[1] Fundada en la clasificación de suelos de Casagrande. Esta tabla no puede sustituir los ensayos de placa de carga. Para más información, véase *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, volumen 113, pág. 901, 1948. Véase también K. Terzaghi, *Geotechnique*, vol. 5, pág. 297, 1955. (Harvard Soil Mechanics Series, núm. 51).

TABLA 62

Valores de cimentación




En el caso particular en que la placa soporta una carga $P$ en su centro[1], $q$ es nulo en toda la superficie de la placa salvo en el centro. Introduciendo la notación

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4} \tag{a}$$

la ecuación (178) deberá ser

$$l^4\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) + w = 0 \tag{b}$$

Puesto que $k$ se expresa en kilogramos por centímetro cúbico y $D$ en kilogramos por centímetro, la cantidad $l$ tiene la dimensión de una longitud. Para simplificar el estudio posterior, es conveniente introducir variables adimensionales utilizando las notaciones

$$\frac{w}{l} = z \qquad \frac{r}{l} = x \tag{c}$$

Entonces ($b$) deberá ser

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right) + z = 0 \tag{d}$$

Utilizando el símbolo $\Delta$ para

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}$$

se escribe

$$\Delta\Delta z + z = 0 \tag{e}$$

[1] Este problema fue estudiado por H. Hertz, *Wiedeymann's Ann. Phys. u. Chem.*, vol. 22, página 449, 1884; véase también *Gesammelte Werke*, vol. 1, pág. 288, 1895, y A. Föppl, *Vorlesungen über technische Mechanik*, vol. 5, pág. 103, 1928. Es justo señalar que las investigaciones de Hertz corresponden en su mayor parte al problema de una placa flotante más que al de una placa sobre cimentación elástica. Entonces, en este caso, la hipótesis relativa a la constante $k$ se sustituye, siendo $k$ entonces el peso específico del líquido.

Esta es una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en la que la solución general se escribe en la forma siguiente

$$z = A_1X_1(x) + A_2X_2(x) + A_3X_3(x) + A_4X_4(x) \qquad (f)$$

donde $A_1$, ..., $A_4$ son las constantes de integración y las funciones $X_1$, ..., $X_4$ son cuatro soluciones independientes de la ecuación ($e$).

Tratemos ahora de encontrar para ($e$) una solución en forma de serie de potencias. Sea $a_nx^n$ un término de esta serie. De donde, derivando,

$$\Delta(a_nx^n) = n(n-1)a_nx^{n-2} + na_nx^{n-2} = n^2a_nx^{n-2}$$

y

$$\Delta\Delta(a_nx^n) = n^2(n-2)^2a_nx^{n-4}$$

Para cumplir ($e$), es preciso que cada término $a_nx^n$ de la serie tenga un término correspondiente $a_{n-4}x^{n-4}$ de tal manera que

$$n^2(n-2)^2a_nx^{n-4} + a_{n-4}x^{n-4} = 0 \qquad (g)$$

Teniendo en cuenta esta notación, todos los términos de la serie se anulan cuando la serie se sustituye en ($e$); por consiguiente la serie, si es convergente, representa una solución particular de la ecuación. De la ecuación ($g$) se deduce,

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2} \qquad (h)$$

Recordando que

$$\Delta\Delta(a_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \Delta\Delta(a_2x^2) = 0 \qquad (i)$$

se puede llegar a que hay dos series que cumplen ($e$), a saber

$$X_1(x) = 1 - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2} + \cdots$$

y

$$X_2(x) = x^2 - \frac{x^6}{4^2\cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2\cdot 14^2} + \cdots \qquad (j)$$

Observando las notaciones ($c$) se puede ver que para pequeños valores de la distancia $r$, es decir para puntos próximos al punto de aplicación de la carga $P$, la cantidad $x$ es pequeña y las series ($j$) convergen rápidamente. Se puede ver también que las derivadas sucesivas de las series ($j$) permanecen finitas en el punto de aplicación de la carga ($x = 0$). Esto indica que las series solas no son suficientes para representar las condiciones tensionales en el punto de aplicación de la carga donde, como se ha visto en los casos estudiados anteriormente, los momentos flectores se hacen infinitos.

Por esta razón la solución particular $X_3$ de la ecuación $(e)$, se tomará en la forma

$$X_3 = X_1 \ln x + F_3(x) \qquad (k)$$

donde $F_3(x)$ es una función de $x$ que puede escribirse también en forma de serie de potencias. Por derivación, se encuentra

$$\Delta\Delta X_3 = \frac{4}{x}\frac{d^3X_1}{dx^3} + \ln x \, \Delta\Delta X_1 + \Delta\Delta F_3(x)$$

y sustituyendo $z$ por $X_3$ en $(e)$, se obtiene

$$\frac{4}{x}\frac{d^3X_1}{dx^3} + \ln x(\Delta\Delta X_1 + X_1) + \Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) = 0$$

Puesto que $X_1$ satisface $(e)$ y está representado por la primera de las series $(j)$, se obtiene, para determinar $F_3(x)$ la ecuación siguiente:

$$\Delta\Delta F_3(x) + F_3(x) = -\frac{4}{x}\frac{d^3X_1}{dx^3} = -4\left(-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot x^4}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2} - \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot x^8}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^2} + \cdots\right) \qquad (l)$$

Tomando $F_3(x)$ en forma de la serie:

$$F_3(x) = b_4x^4 + b_8x^8 + b_{12}x^{12} + \cdots \qquad (m)$$

y sustituyendo esta serie en $(l)$, se obtienen los coeficientes $b_4$, $b_8$, $b_{12}$, de tal manera que se cumpla la ecuación resultante. Recordando que

$$\Delta\Delta(b_4x^4) = 4^2\cdot 2^2\cdot b_4$$

se encuentra, igualando a cero la suma de los términos que no contengan $x$, que

$$4^2\cdot 2^2\cdot b_4 = 4\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2^2\cdot 4^2}$$

donde

$$b_4 = \frac{2\cdot 3\cdot 4^2}{2^4\cdot 4^4} = \frac{3}{128}$$

Igualando a cero la suma de los términos que contienen $x^4$, se obtiene,

$$b_8 = -\frac{25}{1\,769\,472}$$

En general, se encuentra

$$b_n = (-1)^{n/4-1}\frac{1}{n^2(n-2)^2}\left[b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots n^2}\right]$$

Así, la tercera solución particular de $(e)$, es

$$X_3 = X_1 \ln x + \frac{3}{128}x^4 - \frac{25}{1\,769\,472}x^8 + \cdots \qquad (n)$$

La cuarta integral particular $X_4$ de la ecuación $(e)$, se obtiene de la misma manera tomando

$$X_4 = X_2 \ln x + F_4(x) = X_2 \ln x + 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} x^6 - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2}\left(4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} + 4 \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4^2 \cdot 6^2 \cdot \cdots \cdot 10^2}\right) x^{10} + \cdots \quad (o)$$

Sustituyendo las soluciones particulares $(j)$, $(n)$ y $(o)$ en $(f)$, se obtiene la solución general de $(e)$ en la forma siguiente

$$\begin{aligned} z = {} & A_1\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \cdots\right) \\ & + A_2\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \cdots\right) \\ & + A_3\left[\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \cdots\right) \ln x + \frac{3}{128} x^4 \right. \\ & \left. - \frac{25}{1\,769\,472} x^8 + \cdots\right] + A_4\left[\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2}\right.\right. \\ & \left.\left. - \cdots\right) \ln x + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1540 \cdot 10^{-4}}{442\,368} x^{10} + \cdots\right] \quad (p) \end{aligned}$$

Quedan por determinar entonces, en cada caso particular, las constantes de integración $A_1$, ..., $A_4$ de manera que satisfagan las condiciones de contorno.

Consideremos el caso en el que el borde de una placa circular de radio $a$ está enteramente libre. Utilizando la expresión (52) para los momentos radiales y la expresión (55) para los esfuerzos cortantes radiales $Q_r$, se escriben las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \nu \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} &= 0 \\ \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} &= 0 \end{aligned} \quad (q)$$

Además de estas dos condiciones, tenemos otras dos condiciones válidas en el centro de la placa, a saber, la flecha en el centro debe ser finita y la suma de los esfuerzos cortantes repartidos sobre la superficie lateral de un cilindro circular, infinitamente pequeño, situado en el centro de la placa, debe ser igual a la fuerza concentrada $P$. De la primera de estas condiciones, resulta que la constante $A_3$ de la solución general $(p)$, se anula. La segunda condición da

$$\left(\int_0^{2\pi} Q_r r \, d\theta\right)_{r=\epsilon} + P = 0 \quad (r)$$

o bien, utilizando, la notación $(a)$

$$-kl^4 \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)_{r=\epsilon} 2\pi\epsilon + P = 0 \quad (s)$$

donde $r$ es el radio del cilindro infinitamente pequeño. Sustituyendo $w$ por $lz$ en esta ecuación y utilizando la expresión $(p)$ de $z$, se encuentra que para un valor infinitamente pequeño de $x$, igual a $\varepsilon/1$, la ecuación se reduce a

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l\epsilon} 2\pi\epsilon + P = 0$$

de donde se deduce

$$A_4 = \frac{P}{8\pi k l^3} \qquad (t)$$

Conociendo los valores de las constantes $A_3$ y $A_4$, las otras dos constantes $A_1$ y $A_2$ se obtienen a partir de las ecuaciones $(q)$. Para las dimensiones dadas de la placa y para módulos dados de la placa y de la cimentación, estas dos ecuaciones se transforman en dos ecuaciones lineales en $A_1$ y $A_2$.

Tenemos, por ejemplo, una placa de radio $a = 13$ cm y en la que la rigidez es tal que

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} = 13 \text{ cm}$$

Se aplica en el centro, una carga $P$ de forma que

$$A_4 = \frac{P}{8\pi k l^3} = 102 \cdot 10^{-5}$$

Utilizando el valor de $A_4$ y sustituyendo $w$ por $lz$, se encuentra mediante $(p)$ y tomando $x = a/l = 1$, que las ecuaciones $(q)$ dan

$$0{,}500A_1 + 0{,}250A_2 = 4{,}062A_4 = 4{,}062 \cdot 102 \cdot 10^{-5}$$
$$0{,}687A_1 - 8{,}483A_2 = 11{,}09A_4 = 11{,}09 \cdot 102 \cdot 10^{-5}$$

De donde

$$A_1 = 86 \cdot 10^{-4} \qquad A_2 = -64 \cdot 10^{-5}$$

Sustituyendo estos valores en $(p)$ y no conservando más que los términos que contengan $x$ con una potencia de cuarto orden como máximo, se obtiene la expresión siguiente de la flecha:

$$w = lz = 13\left[86 \cdot 10^{-4}\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\right) - 64 \cdot 10^{-5}x^2 + 102 \cdot 10^{-5}x^2 \ln x\right]$$

La flecha en el centro ($x = 0$) es entonces

$$w_{\text{máx}} = 111{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

y la flecha en el contorno ($x = 1$) es,

$$w_{\text{mín}} = 101{,}7 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

La diferencia entre estas dos flechas es comparativamente pequeña y la distribución de presión sobre la cimentación difiere muy poco de una distribución uniforme.

Si se toma el radio de la placa doble ($a = 26$ cm) con los mismos valores de rigidez $D$ y $k$, $x$ deberá ser igual a 2 en el contorno y las ecuaciones $(q)$ se reducirán

$$0{,}826A_1 + 1{,}980A_2 = 1{,}208A_4$$
$$2{,}665A_1 - 5{,}745A_2 = 16{,}37A_4$$

Estas ecuaciones dan

$$A_1 = 3{,}93A_4 = 400 \cdot 10^{-5} \qquad A_2 = -1{,}03A_4 = -105 \cdot 10^{-5} \tag{u}$$

La flecha calculada según (*p*) es

$$w = lz = 13\left\{400 \cdot 10^{-5}\left(1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\right) - 105 \cdot 10^{-5}\left(x^2 - \frac{x^6}{576}\right) + 102 \cdot 10^{-5}\left[\ln x\left(x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2}\right) + \frac{5}{3{,}456}x^6\right]\right\}$$

Las flechas en el centro y en el contorno de la placa son respectivamente

$$w_{\text{máx}} = 5{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \qquad \text{y} \qquad w_{\text{mín}} = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$$

Se ve entonces que si el radio de la placa es doble que *l* la distribución de presión sobre la cimentación está lejos de ser uniforme. Se indicará en el apartado 80 la aplicación del método de la energía de deformación, al problema de la flexión de una placa sobre cimentación elástica.

### *58. Aplicación de las funciones de Bessel al problema de la placa circular*

La solución general (*f*) de la ecuación (*e*) del apartado anterior se puede también expresar mediante las funciones de Bessel. Para ello, introducimos en la ecuación (*e*), una nueva variable $\xi = x\sqrt{i}$, se llega así a la ecuación

$$\Delta'\Delta' z - z = 0 \tag{a}$$

en la que $\Delta'$ sustituye a

$$\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}$$

La ecuación (*a*) es entonces equivalente a

$$\Delta'(\Delta' z + z) - (\Delta' z + z) = 0 \tag{b}$$

y también a

$$\Delta'(\Delta' z - z) + (\Delta' z - z) = 0 \tag{c}$$

Por consiguiente, la ecuación (*a*) se cumple para las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel

$$\Delta' z + z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi} + z = 0 \tag{d}$$

así como para las soluciones de la ecuación

$$\Delta' z - z = \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi} - z = 0 \tag{e}$$

que se transforma en (*d*) cuando se sustituye $\xi$ por $i\xi$. Por consiguiente combinando (*d*) y (*e*), la solución puede escribirse en la forma

$$z = B_1 I_0(x\sqrt{i}) + B_2 I_0(xi\sqrt{i}) + B_3 K_0(x\sqrt{i}) + B_4 K_0(xi\sqrt{i}) \tag{f}$$

siendo $I_0$ y $K_0$ respectivamente las funciones de Bessel de primera y segunda especie y de argumento imaginario, mientras que $B_1$, $B_2$, ... son constantes arbitrarias. Siendo el argumento $x$ real, todas las funciones de (*f*) son complejas. Para separar la parte

real de la solución, introduciremos otras cuatro funciones utilizadas por primera vez por lord Kelvin y definidas por las relaciones[1].

$$I_0(x\sqrt{\pm i}) = \text{ber } x \pm i\,\text{bei } x$$
$$K_0(x\sqrt{\pm i}) = \text{ker } x \pm i\,\text{kei } x \qquad (g)$$

Poniendo además

$$B_1 + B_2 = C_1/l \qquad B_1 - B_2 = -C_2 i/l$$
$$B_3 + B_4 = C_4/l \qquad B_3 - B_4 = -C_3 i/l$$

donde las nuevas constantes $C_1$, $C_2$... son reales, se obtiene la expresión siguiente para las flechas de la placa

$$w = C_1\,\text{ber } x + C_2\,\text{bei } x + C_3\,\text{kei } x + C_4\,\text{ker } x \qquad (h)$$

Todas estas funciones están tabuladas[2] siendo reales para los valores reales del argumento.

Para pequeños valores del argumento tenemos:

$$\begin{aligned}
&\text{ber } x = 1 - x^4/64 + \cdots \\
&\text{bei } x = x^2/4 - x^6/2{,}304 + \cdots \\
&\text{ker } x = -\ln x + \ln 2 - \gamma + \pi x^2/16 + \cdots \\
&\text{kei } x = -(x^2/4)\ln x - \pi/4 + (1 + \ln 2 - \gamma)x^2/4 + \cdots
\end{aligned} \qquad (i)$$

donde $\gamma = 0{,}5772157...$ es la constante de Euler y $\ln 2 - \gamma = 0{,}11593...$ Para valores grandes del argumento tenemos las expresiones asintóticas

$$\begin{aligned}
&\text{ber } x \sim \frac{e^{\sigma}}{\sqrt{2\pi x}}\cos\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\
&\text{bei } x \sim \frac{e^{\sigma}}{\sqrt{2\pi x}}\,\text{sen}\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right) \\
&\text{ker } x \sim \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x/\pi}}\cos\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right) \\
&\text{kei } x \sim -\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{2x/\pi}}\,\text{sen}\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right)
\end{aligned} \qquad (j)$$

donde $\sigma = x/\sqrt{2}$.

La solución general ($h$) se utiliza para el estudio de cualquier flexión simétrica de placa circular con o sin orificio, apoyada sobre cimentación elástica. Las cuatro constantes $C$, que corresponden generalmente a cuatro condiciones de contorno, deberán determinarse en cada caso particular[3].

[1] Véase, por ejemplo, G. N. Watson, *Theory of Bessel Functions*, pág. 81, Cambridge, 1948.

[2] Véase «Tables of Bessel Functions $J_0(z)$ y $J_1(z)$ for Complex Arguments», Columbia University Press, Nueva York, 1943, y «Tables of Bessel Functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for Complex Arguments», Columbia University Press, Nueva York, 1950. Tenemos:

$$\text{ber } x = \text{Re}\,[J_0(xe^{i\pi/4})] \qquad \text{bei } x = -\,\text{Im}\,[J_0(xe^{i\pi/4})]$$
$$\text{ker } x = -\frac{\pi}{2}\,\text{Re}\,[Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2}\,\text{Im}\,[J_0(xe^{i\pi/4})]$$
$$\text{kei } x = \frac{\pi}{2}\,\text{Im}\,[Y_0(xe^{i\pi/4})] - \frac{\pi}{2}\,\text{Re}\,[J_0(xe^{i\pi/4})]$$

[3] F. Schleicher da varias soluciones particulares de este problema en su libro *Kreisplatten auf elastischer Unterlage*, Berlín, 1926, que contiene también las tablas de las funciones $Z_1(x) = \text{ber } x$, $Z_2(x) = -\,\text{bei } x$, $Z_3(x) = -(2/\pi)\,\text{kei } x$ y $Z_4(x) = -(2/\pi)\,\text{ker } x$ así como las derivadas primeras de éstas. En el apartado 118, se da una tabla abreviada de las funciones $Z$ y de sus derivadas primeras que están representadas por el símbolo $\psi$.

Nos limitaremos al caso de una placa infinitamente grande que soporta una carga única $P$ en el punto $x = 0$. Consideremos entonces las cuatro funciones que forman la solución $(h)$, las dos primeras aumentan infinitamente con el argumento, de acuerdo con las ecuaciones $(j)$; y la función ker $x$ se hace infinitamente grande en el origen, como se puede deducir de las ecuaciones $(i)$. Por consiguiente, poniendo $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, la solución $(h)$ se reduce a

$$w = C_3 \operatorname{kei} x \tag{k}$$

Para determinar $C_3$ calculamos el esfuerzo cortante [v. ec. (193)] mediante las ecuaciones $(i)$:

$$Q_r = -\frac{D}{l^3}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx}\right) = \frac{C_3 D}{l^3}\left(\frac{1}{x} - \frac{\pi x}{8} + \cdots\right)$$

Cuando $x$ decrece, $Q_r$ tiende a $C_3D/l^3x = C_3D/l^2r$. Por otra parte, al repartir la carga $P$ uniformemente sobre la circunferencia de radio $r$, tenemos $Q_r = -P/2\pi r$. Igualando estas dos expresiones obtenidas para $Q_r$, tendremos

$$C_3 = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \tag{l}$$

Sustituyendo $C_3$ en $(k)$, se encuentra finalmente la solución completa del problema de Hertz:

$$w = -\frac{Pl^2}{2\pi D}\operatorname{kei} x \tag{179}$$

y la reacción correspondiente del terreno de apoyo está dada por $p = kw = wD/l^4$. La figura 131 muestra la variación de estas magnitudes a lo largo de una sección meridiana de la superficie elástica de la placa, junto con curvas similares obtenidas a partir de la teoría que se estudiará en el apartado 61.

En el origen, tenemos kei $x = -\pi/4$ y la flecha bajo la carga será

$$w_{\text{máx}} = \frac{Pl^2}{8D} \tag{180}$$

Para la reacción del suelo en el mismo punto, obtenemos

$$p_{\text{máx}} = \frac{P}{8l^2} \tag{181}$$

Si tomamos una placa infinitamente grande con las condiciones de rigidez y de carga supuestas en la página 291, la flecha bajo la carga será

$$w_{\text{máx}} = \frac{Pl^2}{8D} = \frac{P}{8kl^2} = \pi l A_4 = (3{,}14)(13)(102 \cdot 10^{-5}) = 0{,}042 \text{ cm}$$

comparable a 0,052 cm, obtenida para una placa circular finita de radio $a = 2l$.

El reparto de momentos flectores debido a la carga concentrada, está indicada en la figura 131 *c*). Se ve que los momentos radiales pasan a ser negativos a una cierta distancia de la carga, siendo su máximo valor absoluto, del orden de $-0{,}02P$. Los momentos positivos son infinitamente grandes en el origen pero a una distancia pequeña[1] del punto de aplicación de la carga, se puede calcularlos fácilmente escribiendo la función kei $x$ en la forma $(i)$. Aplicando las expresiones (52) y (53) a la fórmula (179) se encuentra

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{2l}{r} - \gamma\right) - \frac{1}{2}(1-\nu)\right] \\ M_t &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\left(\ln\frac{2l}{r} - \gamma\right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\right] \end{aligned} \tag{182}$$

[1] Comparable a la longitud característica $l = \sqrt[4]{D/k}$.

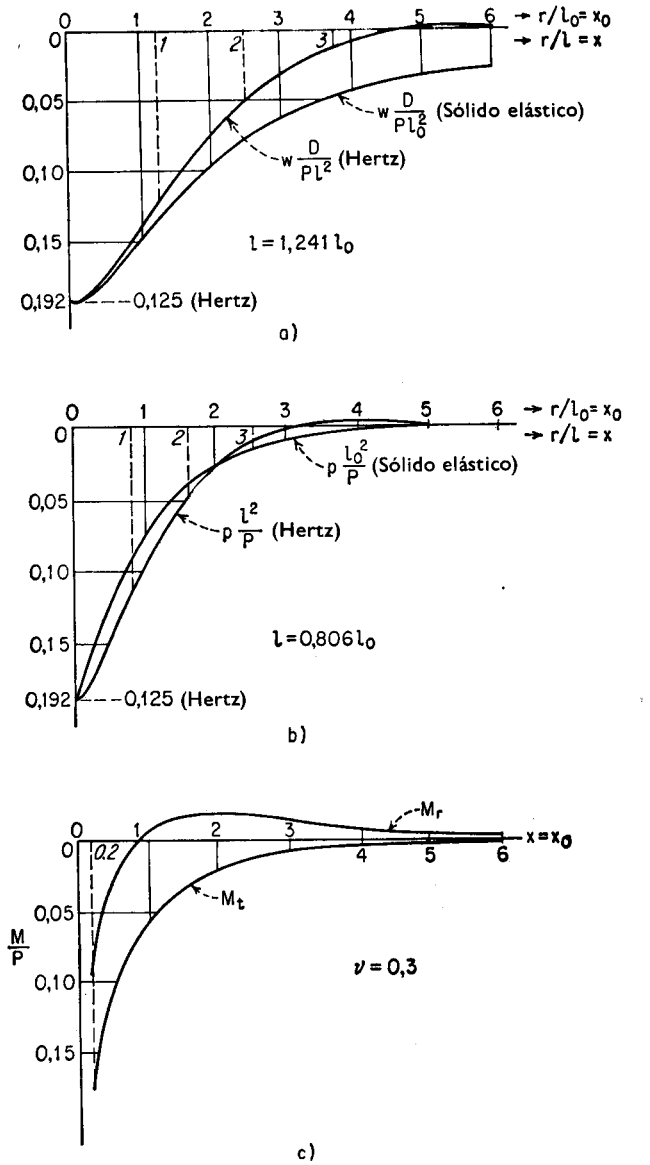



FIG. 131

Comparando estas expresiones con (90) y (91) vemos que el estado tensional de una placa, en las proximidades de la carga en el caso de Hertz, es idéntico al de una placa circular simplemente apoyada de radio $a = 2le^{-\gamma} = 1{,}123l$, salvo por el momento $M_r' = M_t' = -P/8\pi(1-\nu)$ que está superpuesto a los momentos de la placa circular.

Consideremos ahora el caso en el que la carga $P$ está repartida sobre el área de

un círculo de radio $c$, pequeño con respecto a $l$. Los momentos flectores en el centro de una placa circular sometida a esta carga, son:

$$M_r = M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\ln\frac{a}{c}+1\right] \qquad (m)$$

Esto resulta de la ecuación (83), si despreciamos el término $c^2/a^2$ con respecto a la unidad. Sustituyendo $a = 2le^{-\gamma}$ en $(m)$ y añadiendo $-P/8\pi(1-\nu)$, obtenemos el centro del círculo cargado de la placa infinitamente grande, los momentos:

$$M_{máx} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(\ln\frac{2l}{c}-\gamma+\frac{1}{2}\right) \qquad (n)$$

o bien

$$M_{máx} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi}\left(\ln\frac{l}{c}+0{,}616\right) \qquad (183)$$

En el caso de una carga muy concentrada, las tensiones que resultan de (183) deben corregirse mediante la teoría de las placas gruesas. La fórmula para esta tensión corregida se da en la página 302.

En el caso de una carga uniformemente repartida sobre el área de un pequeño rectángulo, se puede operar como se indicó en el apartado 37. En particular, el equivalente de un área cuadrada es un círculo de radio $c = 0{,}57u$, siendo $u$ la longitud del lado del cuadrado (v. pág. 185). Sustituyendo $c$ por su valor en (183), se encuentra:

$$M_{máx} = \frac{1+\nu}{4\pi}P\left(\ln\frac{l}{u}+1{,}177\right) \qquad (o)$$

Se puede calcular la influencia de cualquier sistema de cargas concentradas, sobre las flechas de las placas infinitas, sumando separadamente las flechas debidas a cada carga.

### 59. *Placas rectangulares y placas continuas sobre cimentación elástica*

Un ejemplo de placa apoyada sobre un suelo elástico y al mismo tiempo, sobre un contorno rectangular se indica en la figura 132 que representa una viga de sección transversal rectangular vacía, comprimida sobre una cimen-

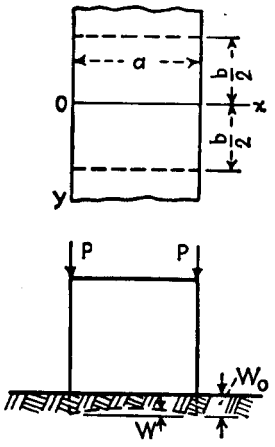



FIG. 132

tación elástica por las cargas $P$. La placa inferior de la viga, cargada por las reacciones elásticas del suelo, está soportada por los lados verticales de la viga vacía y por los diafragmas transversales representados por las líneas de trazos de la figura. Se supone de nuevo que la intensidad de la reacción $p$, en un punto cualquiera de esta placa inferior es proporcional a la flecha $w$ en este mismo punto y así $p = kw$, siendo $k$ el módulo de cimentación.

Debido a esta hipótesis, la ecuación en derivadas parciales de la flecha en coordenadas rectangulares, se escribe:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} - \frac{kw}{D} \qquad (a)$$

donde $q$, es la carga transversal.

Comencemos por el caso de la figura 132. Si $w_0$ representa la flecha en los bordes de la placa inferior y $w$ la flecha de esta placa con respecto al plano de su contorno, la intensidad de la reacción de la cimentación, en un punto cualquiera, es $k(w_0 - w)$ y la ecuación $(a)$ deberá ser,

$$\Delta\Delta w = \frac{k}{D}(w_0 - w) \qquad (b)$$

Dispongamos los ejes de coordenadas como indica la figura y supongamos que los bordes de la placa, paralelos al eje $y$, están simplemente apoyados, y los otros dos empotrados, las condiciones de contorno son

$$(w)_{x=0,x=a} = 0 \qquad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0,x=a} = 0 \qquad (c)$$

$$(w)_{y=\pm b/2} = 0 \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=\pm b/2} = 0 \qquad (d)$$

La flecha $w$ se puede escribir en forma de una serie:

$$w = \frac{4kw_0}{D\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\dfrac{m\pi x}{a}}{m\left(\dfrac{m^4\pi^4}{a^4} + \dfrac{k}{D}\right)} + \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} Y_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \qquad (e)$$

La primera serie del segundo miembro es una solución particular de la ecuación $(b)$, que representa la flecha de una franja, simplemente apoyada, descansando sobre una cimentación elástica. La segunda serie es solución de la ecuación homogénea

$$\Delta\Delta w + \frac{k}{D} w = 0 \qquad (f)$$

Por consiguiente, las funciones $Y_m$ deberán satisfacer la ecuación diferencial ordinaria:

$$Y_m^{IV} - 2\frac{m^2\pi^2}{a^2} Y_m'' + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{k}{D}\right) Y_m = 0 \qquad (g)$$

Utilizando las notaciones

$$\frac{m\pi}{a} = \mu_m \qquad \frac{k}{D} = \lambda^4 \tag{h}$$

$$2\beta_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} + \mu_m^2 \qquad 2\gamma_m^2 = \sqrt{\mu_m^4 + \lambda^4} - \mu_m^2 \tag{i}$$

y tomando el resultado de ($g$) de la forma $e^{ry}$, se obtiene para $r$ las cuatro raíces siguientes:

$$\beta + i\gamma \qquad -\beta + i\gamma \qquad \beta - i\gamma \qquad -\beta - i\gamma$$

Las cuatro soluciones independientes, particulares de la ecuación ($g$) son:

$$e^{\beta_m y}\cos\gamma_m y \qquad e^{-\beta_m y}\cos\gamma_m y \qquad e^{\beta_m y}\operatorname{sen}\gamma_m y \qquad e^{-\beta_m y}\operatorname{sen}\gamma_m y \tag{j}$$

que pueden también escribirse

$$\begin{matrix} \operatorname{ch}\beta_m y\cos\gamma_m y & \operatorname{sh}\beta_m y\cos\gamma_m y \\ \operatorname{ch}\beta_m y\operatorname{sen}\gamma_m y & \operatorname{sh}\beta_m y\operatorname{sen}\gamma_m y \end{matrix} \tag{k}$$

Se llega, por simetría, a que en nuestro caso, $Y_m$ es una función par de $y$. Por consiguiente, utilizando las integrales ($k$) se obtiene

$$Y_m = A_m \operatorname{ch}\beta_m y\cos\gamma_m y + B_m \operatorname{sh}\beta_m y\operatorname{sen}\gamma_m y$$

y la flecha de la placa es

$$w = \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\left[\frac{4kw_0}{D\pi}\frac{1}{m\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4}+\frac{k}{D}\right)} + A_m \operatorname{ch}\beta_m y\cos\gamma_m y + B_m \operatorname{sh}\beta_m y\operatorname{sen}\gamma_m y\right] \tag{l}$$

Esta expresión satisface las condiciones de contorno ($c$). Para cumplir las condiciones ($d$), deben escogerse las constantes $A_m$ y $B_m$ de forma que satisfagan las ecuaciones

$$\frac{4kw_0}{D\pi}\frac{1}{m\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4}+\frac{k}{D}\right)} + A_m \operatorname{ch}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2} + B_m \operatorname{sh}\frac{\beta_m b}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma_m b}{2} = 0 \tag{m}$$

$$(A_m\beta_m + B_m\gamma_m)\operatorname{sh}\frac{\beta_m b}{2}\cos\frac{\gamma_m b}{2} - (A_m\gamma_m - B_m\beta_m)\operatorname{ch}\frac{\beta_m b}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma_m b}{2} = 0$$

Sustituyendo estos valores de $A_m$ y $B_m$ en ($l$), se obtiene la flecha buscada de la placa.

El problema de la placa con los bordes simplemente apoyados se resuelve utilizando la ecuación ($a$). Tomemos los ejes de coordenadas como en la

figura 59 (pág. 126) y utilicemos las soluciones de Navier, la flecha de la placa será

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (n)$$

De la misma manera, la serie

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (o)$$

representa la distribución de la carga dada, y la serie

$$p = kw = \sum \sum k A_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (p)$$

representa la reacción del terreno de asiento. Sustituyendo la serie $(n)$ en el primer miembro y las series $(o)$ y $(p)$ en el segundo miembro de $(a)$, se obtiene

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + k} \qquad (q)$$

Consideremos, por ejemplo, la flexión de una placa solicitada por una fuerza $P$ concentrada en un punto cualquiera $(\xi,\eta)$. En este caso

$$a_{mn} = \frac{4P}{ab} \operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b} \qquad (r)$$

según la ecuación $(b)$ de la página 133. Sustituyendo $(q)$ y $(r)$ en $(n)$, se obtiene finalmente

$$w = \frac{4P}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi\xi}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + k} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (s)$$

Conociendo la flecha de la placa debida a una fuerza concentrada, la flecha producida por una carga transversal cualquiera se obtiene por el método de superposición. Tomemos, por ejemplo, el caso de una carga uniformemente repartida de intensidad $q$. Sustituyendo $P$ por $q\,d\xi\,d\eta$ en $(s)$ e integrando entre 0 y $a$, 0 y $b$, tendremos

$$w = \frac{16q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}}{mn \left[\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 + k\right]} \qquad (t)$$

Cuando $k$ es igual a cero, esta flecha se reduce a la dada por la solución de Navier (131) para una placa uniformemente cargada[1].

Consideremos el caso de la figura 133. Una placa grande apoyada sobre una cimentación elástica está sometida a cargas $P$ en puntos equidistantes a lo largo del eje[2] $x$.

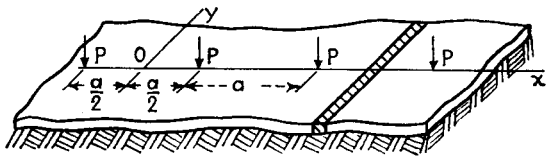



FIG. 133.

Se dispondrán los ejes de coordenadas como indica la figura y se utilizará la ecuación (*f*) puesto que no hay carga repartida. Tomemos una solución de esta ecuación de la forma

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} \qquad (u)$$

en la que el primer término

$$w_0 = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}\,ak} e^{-\lambda y/\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen} \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \right)$$

representa la flecha de una franja de longitud infinita, de ancho unidad, paralela al eje $y$, cargada en $y = 0$ por la carga $P/a$ [v. ec. (283), pág. 510]. Los otros términos de la serie han de cumplir la condición de simetría, de que la tangente a la deformada en la dirección de las $x$ tenga una pendiente nula en los puntos de aplicación de las cargas y en los puntos equidistantes de los mismos. Se toma para las funciones $Y_m$ las de las integrales particulares (*j*) que se anulan para valores infinitos de $y$. Por consiguiente

$$Y_m = A_m e^{-\beta_m y} \cos \gamma_m y + B_m e^{-\beta_m y} \operatorname{sen} \gamma_m y$$

Para cumplir la condición de simetría $(\partial w/\partial y)_{y=0} = 0$ se debe tomar en esta expresión

$$B_m = \frac{\beta_m A_m}{\gamma_m}$$

[1] H. J. Fletcher y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, vol. 19, pág. 361, 1952, han estudiado el caso de una placa rectangular con flechas y momentos aplicados sobre dos bordes opuestos y diversas condiciones en el contorno en los otros dos. En este estudio se dan numerosas curvas.

[2] H. M. Westergaard ha estudiado este problema; véase *Ingeniøren*, vol. 32, pág. 513, 1923. Westergaard ha estudiado también las aplicaciones prácticas de la solución de este problema para la construcción de losas de pavimento de hormigón, véase *Public Roads*, vol. 7, pág. 25, 1926; vol. 10, pág. 65, 1929, y vol. 14, pág. 185, 1933.

Por consiguiente, introduciendo las nuevas constantes $A_m \quad A_m/\gamma_m$, se representan las flechas ($u$) de la forma siguiente:

$$w = w_0 + \sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} A'_m \cos\frac{m\pi x}{a}\, e^{-\beta_m y}(\gamma_m \cos\gamma_m y + \beta_m \operatorname{sen}\gamma_m y) \qquad (v)$$

Para calcular las constantes $A'_m$ en función del valor de las cargas $P$, consideremos el esfuerzo cortante $Q_y$ que actúa a lo largo de la sección normal de la placa según el eje $x$. Se llega, por simetría, a que $Q_y$ se anula en todos los puntos salvo en los de aplicación de $P$, donde los esfuerzos cortantes dan una resultante igual a $-P/2$. Se ha demostrado, en el estudio de una distribución semejante de esfuerzos cortantes (ap. 54, pág. 272) que estos esfuerzos pueden ponerse en la forma

$$Q_y = -\frac{P}{2a} - \frac{P}{a}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} (-1)^{m/2}\cos\frac{m\pi x}{a}$$

El esfuerzo cortante, calculado a partir de ($v$), es

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}$$

$$= -\frac{P}{2a} - 2D\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} A'_m\beta_m\gamma_m(\beta_m^2 + \gamma_m^2)\cos\frac{m\pi x}{a}$$

Identificando las dos expresiones de esfuerzos cortantes, tendremos

$$A'_m = \frac{P(-1)^{m/2}}{2aD\beta_m\gamma_m(\beta_m^2 + \gamma_m^2)}$$

donde, utilizando las notaciones ($i$)

$$A'_m = \frac{P(-1)^{m/2}}{aD\lambda\sqrt{\lambda_m^4 + \mu_m^4}}$$

Sustituyendo en ($v$), se obtiene finalmente

$$w = w_0 + \frac{P\lambda^2}{ak}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{m/2}}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}}\cos\frac{m\pi x}{a}\, e^{-\beta_m y}(\gamma_m \cos\gamma_m y + \beta_m \operatorname{sen}\gamma_m y) \qquad (w)$$

La flecha máxima se sitúa evidentemente bajo las cargas $P$ y se obtiene sustituyendo $x = a/2$, $y = 0$ en ($w$), de donde

$$w_{\text{máx}} = \frac{P\lambda}{2\sqrt{2}\,ak} + \frac{P\lambda^2}{ak}\sum_{m=2,4,6,\ldots}^{\infty} \frac{\gamma_m}{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4}} \qquad \textbf{(184)}$$

En el caso particular de una carga $P$ aislada, que actúa sobre una placa infinita, la flecha se obtiene poniendo $a = \infty$ en (184). En este caso, el primer término de la fórmula se anula y utilizando ($i$), tendremos

$$w_{\text{máx}} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\,\pi k} \sum_{m=2,4,6,\ldots} \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu_m^4} - \mu_m^2}{\lambda^4 + \mu_m^4}}$$

$$= \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\,\pi k} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda^4 + \mu^4} - \mu^2}{\lambda^4 + \mu^4}}\, d\mu$$

Utilizando la relación

$$\frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2u\sqrt{u^2 + 1}}$$

se encuentra

$$w_{\text{máx}} = \frac{P\lambda^2}{2\sqrt{2}\,\pi k} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{P\lambda^2}{8k} \tag{185}$$

de acuerdo con la ecuación (180). Con ayuda de este valor de la flecha, la presión máxima sobre la cimentación elástica, es

$$(p)_{\text{máx}} = k w_{\text{máx}} = \frac{P\lambda^2}{8} = \frac{P}{8}\sqrt{\frac{k}{D}} \tag{186}$$

La tensión de tracción máxima se produce en la cara inferior de la placa debajo de la carga. La teoría anterior da un valor infinito al momento flector en este punto y se debe recurrir a la teoría de las placas gruesas (v. ap. 26). En el estudio mencionado de Westergaard, se da la expresión siguiente para el cálculo de la tensión de tracción máxima, en la cara inferior de la placa, establecida mediante la teoría de las placas gruesas:

$$(\sigma_r)_{\text{máx}} = 0{,}275(1 + \nu)\frac{P}{h^2} \log \frac{Eh^3}{kb^4} \tag{$x$}$$

En esta ecuación $h$ representa el espesor de la placa y

$$b = \sqrt{1{,}6c^2 + h^2} - 0{,}675h \quad \text{cuando} \quad c < 1{,}724h$$
$$= c \quad \text{cuando} \quad c > 1{,}724h$$

donde $c$ es el radio del círculo sobre el que la carga $P$ se supone uniformemente repartida. Para $c = 0$, estaremos en el caso de una fuerza concentrada.

Para un área cuadrada cargada, de lado $u$, se sustituye $c$ por $0{,}57\,u$ (v. pág. 185).

El caso de cargas equidistantes $P$, aplicadas a lo largo del borde de una placa semiinfinita puede tratarse de forma parecida (v. fig. 134). La fórmula definitiva para la tensión de tracción máxima, en la cara inferior de la placa, bajo la carga, para $a$ muy grande, es

$$(\sigma_x)_{\text{máx}} = 0{,}529(1 + 0{,}54\nu)\frac{P}{h^2}\left[\log\left(\frac{Eh^3}{kb^4}\right) - 0{,}71\right] \tag{$y$}$$

donde $b$ se calcula como en el caso anterior y $c$ es el radio del área semicircular sobre la que $P$ se supone que está uniformemente repartida. Las fórmulas $(x)$ e $(y)$ son muy útiles para proyectar carreteras de hormigón, en este caso, el círculo de radio $c$ representa la superficie de contacto del neumático con la carretera[1].

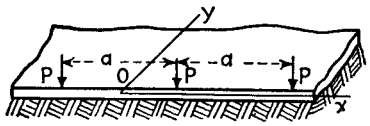



FIG. 134

### *60. Placa cargada con filas de columnas equidistantes*

Como último ejemplo consideremos una placa infinita apoyada sobre cimentación elástica que soporta cargas iguales y equidistantes $P$, uniformemente repartida cada una de ellas sobre una superficie rectangular $u$ por $v$, como indica la figura 135. La flexión de tal «forjado-invertido» puede tratarse mediante la solución de Westergaard ya estudiada utilizando una serie sencilla[2].

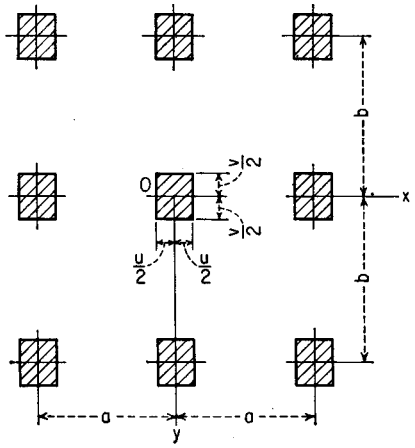



FIG. 135

Mucho más sencilla y también más adecuada, salvo para el caso de cargas fuertemente concentradas, es sin embargo la solución en serie doble por el método de Navier.

[1] El problema de distribución de tensiones en las proximidades de una carga aplicada en la esquina de una placa aún no ha sido resuelto con el mismo grado de seguridad que los problemas vistos. Varias fórmulas empíricas y semiempíricas respecto a este caso pueden encontrarse en *Concrete Pavement Design*, pág. 79, Portland Cement Association, Chicago, 1951. Importantes resultados experimentales sobre este problema han sido obtenidos por M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, vol. 122, pág. 337, 1952. Véase también L. D. Black, *Trans. Eng. Inst. Canada*, vol. 2, pág. 129, 1958, y D. E. Nevel, *ibíd.*, pág. 132.

[2] Véase W. Müller, *Ingr.-Arch.*, vol. 20, pág. 278, 1952, y *Osterr. Ingr.-Arch.*, vol. 6, página 404, 1952.

Las condiciones de simetría nos llevan a representar la carga transversal debida a las columnas mediante una serie de cosenos

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \qquad (a)$$

La intensidad de la carga dada es igual a $P/uv$ dentro de los rectángulos rayados en la figura 135 y cero en el resto. Así procediendo de la forma ordinaria, es decir, multiplicando la ecuación ($a$) por $\cos 2m\pi x/a \cos 2n\pi y/b \, dx \, dy$ e integrando entre los límites $-a/2$, $+a/2$ respecto a $x$ y $-b/2$, $+b/2$ respecto a $y$, tenemos

$$a_{mn} = \frac{4P\epsilon_{mn}}{\pi^2 mnuv} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{b} \qquad (b)$$

donde

$\epsilon_{mn} = 1$ para $m \neq 0, n \neq 0$
$\epsilon_{mn} = \frac{1}{2}$ para $m = 0, n \neq 0$ o $m \neq 0, n = 0$
$\epsilon_{mn} = \frac{1}{4}$ para $m = n = 0$

En el caso particular de $m = 0$ o $n = 0$ el coeficiente se obtiene fácilmente como límite de la expresión ($b$).

Ahora según la ecuación ($a$) tomamos para las flechas la serie

$$w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{2m\pi x}{a} \cos \frac{2n\pi y}{b} \qquad (c)$$

y la relación entre los coeficientes $a_{mn}$ y $A_{mn}$ se establece fácilmente por el mismo razonamiento que antes (v. pág. 299). Así, utilizando la notación

$$\alpha_m = \frac{2m\pi}{a} \qquad \beta_n = \frac{2n\pi}{b} \qquad \gamma_{mn}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2 \qquad (d)$$

obtenemos

$$A_{mn} = \frac{a_{mn}}{D\gamma_{mn}^4 + k} \qquad (e)$$

Sustituyéndola en la serie ($c$) y teniendo en cuenta la ecuación ($b$) tenemos el resultado final[1].

$$w = \frac{4P}{\pi^2 uv} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi u}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi v}{b} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y}{mn(D\gamma_{mn}^4 + k)} \qquad (f)$$

Ahora los momentos flectores de la placa se obtienen por derivación como ordinariamente y la distribución de presiones de la placa sobre el terreno se halla multiplicando la expresión ($f$) por el módulo $k$.

El caso particular $k = 0$ corresponde a una reacción del cimiento uniformemente repartida, es decir el caso de «forjado invertido» con una carga uniforme $q = P/ab$. Se ve en la ecuación ($f$) que la introducción del módulo tiende a reducir las flechas y también los momentos flectores de la placa.

El caso de una placa rectangular de dimensiones finitas apoyada sobre cimentación elástica y sometida a la acción de carga concentrada ha sido estudiado por H. Happel[2]. El método de Ritz (v. pág. 375) se ha utilizado para determinar las

[1] Debida a V. Lewe, *Bauingenieur*, vol. 3, pág. 453, 1923.
[2] *Math. Z.*, vol. 6, pág. 203, 1920. Véase también, *Bautechnik*, vol. 26, pág. 181, 1949.

flechas de esta placa, y se ha demostrado, en el ejemplo particular de placa cuadrada cargada en el centro, que la serie que da la flecha converge rápidamente y la flecha puede calcularse con aproximación suficiente tomando únicamente unos pocos primeros términos de la serie[1].

### *61. Flexión de placas apoyadas sobre un sólido elástico semiinfinito*

Hasta aquí, se ha supuesto que el asiento del cimiento en cualquier punto es proporcional a la presión entre la placa y el cimiento en ese mismo punto y en consecuencia independiente de la presión en cualquier otro punto. Esto es correcto en el caso de placa flotante considerada por Hertz (v. pág. 287), pero en el caso de cimiento cohesivo tal hipótesis se aproxima sólo groseramente al comportamiento real del cimiento; puede obtenerse algunas veces una mejor aproximación a partir de las siguientes hipótesis:

1. El cimiento tiene las propiedades de un cuerpo elástico semiinfinito.
2. La placa se apoya en el terreno sin rozamiento.
3. Existe contacto perfecto entre la placa y el terreno incluso para presiones negativas.

Esta última hipótesis parece arbitraria, sin embargo una presión negativa entre placa y terreno queda realmente más o menos compensada por el peso propio de la placa.

Las propiedades elásticas de la cimentación elástica pueden caracterizarse, si se admite la isotropía, por un módulo de Young $E_0$ y un coeficiente de Poisson $\nu_0$. En la tabla 63 pueden verse los valores numéricos aproximados[2] de estas constantes que dependen de la naturaleza del cimiento y hallados por ensayos dinámicos; junto a ellos se dan los valores de la constante

$$k_0 = \frac{E_0}{2(1 - \nu_0^2)} \qquad (a)$$

usada en lo siguiente.

TABLA 63

Valores de las constantes elásticas según la naturaleza de la cimentación

| Terreno | $E_0$, kgf/cm² | $\nu_0$ | $k_0$, kgf/cm² |
|---|---|---|---|
| Arcilla | 800 | 0,17 | 410 |
| Loes y arcilla | 900 | 0,42 | 550 |
| Arena media | 1000-1300 | 0,33-0,23 | 550-690 |
| Arena y grava | 2800 | 0,31 | 1540 |
| Arcilla plástica liásica | 2700 | 0,44 | 1650 |
| Cal (apagada al aire) | 11 500-13 300 | 0,32-0,38 | 6440-7700 |
| Roca caliza | 112 000 | 0,26 | 60 000 |

Nos limitaremos a considerar el caso de placa infinitamente grande, en estado de simetría axial. Utilizando coordenadas polares $r$, $\theta$, podemos escribir la ecuación de la placa en la forma

$$D\Delta\Delta w(r) = q(r) - p(r) \qquad (b)$$

en la que $p(r)$ representa la carga dada y $p(r)$ la reacción del cimiento.

[1] El problema de una placa cuadrada sobre cimentación elástica ha sido estudiado también experimentalmente; véase la memoria de J. Vint y W. N. Elgood, *Phil. Mag.*, serie 7, vol. 19, página 1, 1935; y la de G. Murphy, *Iowa State Coll. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 135, 1937.

[2] Debidos a E. Schultze y H. Muhs, «Bodenuntersuchungen für Ingenieur bauten», Berlín, 1950. Véase también *Veröffentl. Degebo*, Fascículo 4, pág. 37, 1936.

Sea $K_0(r,\varrho,\varphi)$ la flecha en el punto $(r,0)$ del cimiento debida a la carga normal unidad aplicada en el punto $(\varrho,\varphi)$. La forma de la «función de influencia» depende exclusivamente de la naturaleza del cimiento. Utilizando las propiedades de las funciones de Bessel puede demostrarse[1] que la ecuación $(b)$ se satisface siendo

$$w(r) = \int_0^\infty \frac{Q(\alpha)K(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)} \qquad (c)$$

En la ecuación $(c)$ $J_0$ representa la función de Bessel de orden cero; el término dependiente de la naturaleza del terreno es

$$K(\alpha) = \int_0^\infty 2\pi s K_0(s) J_0(\alpha s)\, ds \qquad (d)$$

en el que la forma de $K_0$ está definida por

$$K_0(s) = K_0[(r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}]$$

siendo $s$ la distancia entre los puntos $(r,0)$ y $(\varrho,\varphi)$. Finalmente

$$Q(\alpha) = \int_0^\infty q(\rho) J_0(\alpha\rho)\rho\, d\rho \qquad (e)$$

es el término que depende de la intensidad $q(\varrho)$ de la carga simétrica para $r = \varrho$.

En el caso particular de una carga $P$ uniformemente repartida en una circunferencia de radio $c$, tenemos

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi} J_0(\alpha c) \qquad (f)$$

En el caso de la carga $P$ uniformemente repartida en el círculo interior a esa circunferencia la ecuación $(e)$ da

$$Q(\alpha) = \frac{P}{\pi c\alpha} J_1(\alpha c) \qquad (g)$$

donde la función de Bessel es de primer orden. Finalmente, cuando la carga está concentrada en el origen ($\varrho = 0$), de la ecuación $(f)$ obtenemos

$$Q(\alpha) = \frac{P}{2\pi} \qquad (h)$$

En cuanto a la distribución de las reacciones, la correspondiente función $p(r)$ se obtiene de la ecuación $(b)$, sustituyendo previamente el término

$$q(r) = \int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha \qquad (i)$$

en función de su transformada de Fourier-Bessel $(e)$. Así obtenemos

$$p(r) = \int_0^\infty \frac{Q(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha}{1 + D\alpha^4 K(\alpha)} \qquad (j)$$

Consideremos ahora dos casos particulares respecto a la naturaleza física del terreno. Para una ***placa flotante*** (ap. 57) la función de influencia $K_0(s)$ se anula en todo punto excepto en $s = 0$, donde se aplica la fuerza unidad. En cuanto a la ecuación $(d)$ la función $K_0(a)$ debe ser entonces constante. Para obtener de la ecua-

[1] La solución del problema en su forma más general se debe a D. L. Holl, *Proc. Fifth Intern. Congr. Appl. Mech.*, Cambridge, Mass., 1938.

ción (*c*) la expresión $w(r) = p(r)/k$, de acuerdo con la definición del módulo, debemos tomar $K_0(a) = 1/k$. Empleando la notación anterior $l^4 = D/k$ (pág. 287), obtenemos de la ecuación (*c*) la expresión

$$w(r) = \frac{1}{k}\int_0^\infty \frac{Q(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha}{1 + \alpha^4 l^4} \tag{k}$$

que satisface la ecuación diferencial (178) de la placa flotante.

En el caso de un medio isótropo semiinfinito, tenemos según Boussinesq[1] $K_0(s) = (1 - \nu^2)/\pi E_0 s$ y por la ecuación (*d*), $K(\alpha) = 2(1 - \nu_0)^2/E_0\alpha$, o bien

$$K(\alpha) = \frac{1}{(k_0\alpha)}$$

donde $k_0$ es la constante elástica definida por la ecuación (*a*). Escribiendo para abreviar

$$\frac{k_0}{D} = \frac{E_0}{2D(1 - \nu_0^2)} = \frac{1}{l_0^3} \tag{l}$$

obtenemos finalmente la solución (*c*) en la forma más específica[2].

$$w(r) = \frac{1}{k_0}\int_0^\infty \frac{Q(\alpha)J_0(\alpha r)\, d\alpha}{1 + \alpha^3 l_0^3} \tag{m}$$

En el caso particular de una carga concentrada en el origen, las expresiones (*X*) y (*h*) dan

$$w = \frac{Pl_0^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right) d\lambda}{1 + \lambda^3} \tag{187}$$

donde $\lambda = al_0$. Además la flecha en el punto de aplicación de la carga es

$$w_{\text{máx}} = \frac{Pl_0^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{Pl_0^2\sqrt{3}}{9D} = 0{,}192\frac{Pl_0^2}{D} \tag{188}$$

frente al resultado $0{,}125Pl^2/D$ de Hertz. El reparto de presiones se obtiene fácilmente de la expresión general (*j*). Tenemos para un punto cualquiera

$$p = \frac{P}{2\pi l_0^2}\int_0^\infty \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{l_0}\right)\lambda\, d\lambda}{1 + \lambda^3} \tag{189}$$

y en especial en el punto de aplicación de la carga

$$p_{\text{máx}} = \frac{P}{2\pi l_0^2}\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{1 + \lambda^3} = \frac{P\sqrt{3}}{9l_0^2} = 0{,}192\frac{P}{l_0^2} \tag{190}$$

frente al valor $0{,}125P/l^2$ obtenido por Hertz. Si suponemos los mismos valores de $w_{\text{máx}}$ en ambos casos la fórmula (190) da un valor de $p_{\text{máx}}$ que es 2,37 veces mayor que el de la fórmula de Hertz (181). En tal caso debe ser $l = 1{,}241l_0$ y en la figura 131 *a*) se dan las curvas de las flechas correspondientes calculadas según las ecuaciones (179) y (187). La figura 131 *b*) muestra en forma análoga la variación de la presión; en este caso, para obtener valores iguales de $p_{\text{máx}}$ según las dos fórmulas, debe tomarse $l = 0{,}806l_0$.

[1] Véase, por ejemplo, S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., página 365, Nueva York, 1951.

[2] Respecto a este resultado, véase también S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 3, página 250, 1932, y vol. 17, pág. 142, 1949; K. Marguerre, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 17, página 229, 1937; A. H. A. Hogg, *Phil. Mag.*, vol. 25, pág. 576, 1938.

Puede demostrarse finalmente, que el valor de los momentos flectores en la proximidad de la carga concentrada tiene la misma expresión para ambos tipos de cimentación si se utiliza la variable adimensional $x = r/l$ y $x = r/l_0$ respectivamente. Deducimos de ello que la expresión (183) de los momentos flectores puede utilizarse también para una placa apoyada sobre un medio elástico isótropo si sustituimos $l$ por $l_0$. Procediendo de esta forma con la fórmula de la tensión máxima de Westergaard ($x$) (pág. 302), llegamos a la fórmula

$$\sigma_{\text{máx}} = 0{,}366(1 + \nu)\frac{P}{h^2}\left[\log\left(\frac{Eh^3}{k_0 b^3}\right) - 0{,}266\right] \qquad (n)$$

en la que $k_0$ está dada por la ecuación ($a$) y $b$ tiene el mismo valor que en la página 302.

El problema de la flexión de una placa finita circular, lleva a un sistema infinito de ecuaciones lineales para determinar los coeficientes de la serie que da las flechas de la placa[1].

Podría considerarse también el uso del método de diferencias finitas para tratar el problema de placas circulares finitas[2].

Se han estudiado también la flexión de una placa infinita apoyada sobre una capa elástica, que queda a su vez sobre una base perfectamente rígida[3] y el problema de una losa de pavimento semiinfinita[4].

Las tensiones debidas a cargas superficiales fuertemente concentradas han de corregirse de acuerdo con la teoría de placas gruesas. Independientemente se ha desarrollado una teoría especial de placas gruesas soportadas elásticamente[5].

[1] Véase H. Borowicka, *Ingr.-Arch.*, vol. 10, pág. 113, 1939; A. G. Ishkova, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, vol. 56, pág. 129, 1947; G. Pickett y F. J. McCormick, *Proc. First U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.*, pág. 331, Chicago, 1951. El efecto de la elevación de la parte exterior de la placa sometida a carga central ha sido estudiado por H. Jung, *Ingr.-Arch.*, volumen 20, pág. 8, 1952. Respecto a flexión de placas rectangulares, véase M. I. Gorbounov-Posadov, *Priklad. Math. Mekhan.*, vol. 4, pág. 68, 1940.

[2] A. Habel, *Bauingenieur*, vol. 18, pág. 188, 1937; para la aplicación a placas rectangulares, véase G. Pickett, W. C. Janes, M. E. Raville y F. J. McCormick, *Kansas State Coll. Eng. Expt. Sta. Bull.*, 65, 1951.

[3] A. H. A. Hogg, *Phil. Mag.*, vol. 35, pág. 265, 1944.

[4] G. Pickett y S. Badaruddin, *Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech.*, vol. 6, pág. 396, Bruselas, 1957.

[5] El primer estudio del comportamiento estático y dinámico de estas placas se debe a K. Marguerre, *Ingr.-Arch.*, vol. 4, pág. 332, 1933. Véase también I. Szabó, *Ingr.-Arch.*, volumen 19, págs. 128 y 342, 1951; *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, pág. 145, 1952. Respecto a la aplicación de la teoría de E. Reissner, véase P. M. Naghdi y J. C. Rowley, *Proc. First Midwest Conf. Solid. Mech. (Univ. Illinois)*, pág. 119, 1953, y D. Frederick, *J. Appl. Mechanics*, volumen 23, pág. 195, 1956.