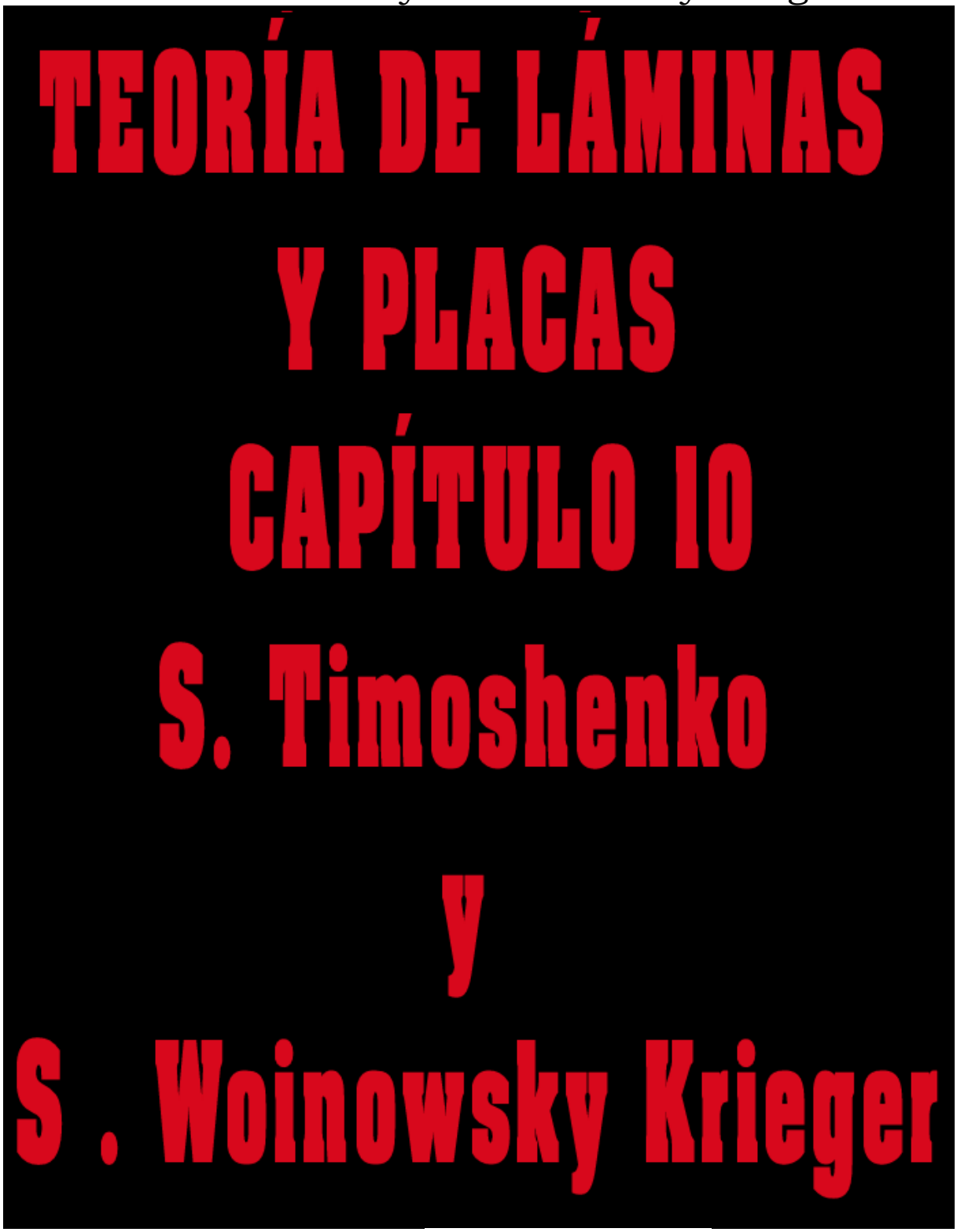


Digitalizado por LIBROdot.com
http://www.librodot.com

10

Métodos especiales y aproximados en la teoría de placas

75. *Singularidades en la flexión de placas*

Se dice que el estado tensional de una placa presenta una singularidad en un punto[1] (x_0,y_0) si alguna de las tensiones en ese punto se hace infinitamente grande. De las expresiones (101), (102) y (108) de los momentos y esfuerzos cortantes se deduce que no se producen singularidades mientras la flecha $w(x,y)$ y sus derivadas hasta la de cuarto orden sean funciones continuas de x e y.

Se producen ordinariamente singularidades en los puntos de aplicación de fuerzas o momentos concentrados. En algunos casos se pueden presentar singularidades en las esquinas de la placa, debidas a las reacciones, independientemente de la forma de reparto de las cargas.

Para lo que sigué tomemos como origen de coordenadas el punto de la placa en que se presenta la singularidad. Las expresiones dadas antes por la flecha dan (después de las derivaciones oportunas) tensiones que son grandes en comparación con las tensiones producidas por cargas aplicadas en otros puntos o por los esfuerzos de borde, siempre que x e y sean pequeñas.

Fuerza aislada en un punto interior de una placa

Si la distancia del punto considerado al contorno y a otras cargas concentradas es bastante grande, tenemos aproximadamente un estado de

[1] Más exactamente, en un punto (x_0, y_0, z).

Librodot

simetría axial en torno a la carga concentrada P. En consecuencia, el esfuerzo cortante radial a una distancia r de la carga P es

$$Q_r = -\frac{P}{2\pi r}$$

Observando la expresión (193) de Q_r podemos verificar fácilmente que la flecha correspondiente está dada por

$$w_0 = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln \frac{r}{a} \tag{206}$$

en la que a es una longitud arbitraria. El término correspondiente $r^2 \ln a$ da tensiones despreciables cuando la relación r/a permanece pequeña.

Momento aislado en un punto interior de una placa

Apliquemos una fuerza aislada $-M_1/\Delta x$ en el origen y una fuerza aislada $+M_1/\Delta x$ en el punto $(-\Delta x, 0)$, suponiendo que M_1 es un momento conocido. Según los resultados anteriores [ec. (206)] la flecha debida a la acción combinada de ambas fuerzas es

$$w = \frac{M_1}{8\pi D} \frac{(x+\Delta x)^2 + y^2}{\Delta x} \ln \frac{[(x+\Delta x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}}{a} - \frac{M_1}{8\pi D} \frac{x^2+y^2}{\Delta x} \log \frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \tag{a}$$

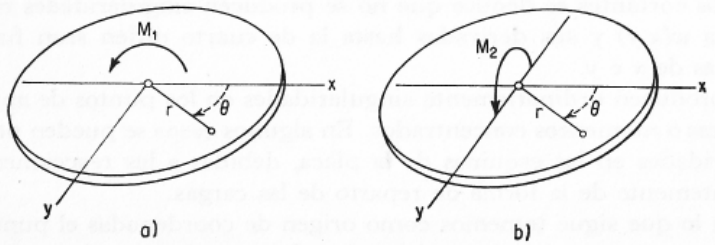


FIG. 168

Cuando Δx tiende a cero, obtenemos el caso de un momento M_1 concentrado en el origen [fig. 168 *a*)] y la flecha es

$$w_1 = \lim [w]_{\Delta x \to 0} = \frac{M_1}{P} \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

donde w_0 es la flecha dada por la expresión (206). Verificando la derivación, obtenemos

$$w_1 = \frac{M_1 x}{8\pi D} \left(\ln \frac{x^2+y^2}{a^2} + 1 \right) \tag{b}$$

Librodot

la acción de una fuerza transversal o de un momento en un punto del borde libre[1].

Fuerza aislada que actúa en un punto próximo a un borde empotrado (fig. 170)

La flecha de una placa cantilever semiinfinita cargada con una carga concentrada P en un punto (ξ,η) está dada por la expresión

$$w = \frac{P}{16\pi D}\left[4x\xi - r^2 \ln \frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{r_1^2}\right] \qquad (d)$$

donde $r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$. Nos limitaremos a considerar el momento de empotramiento en el origen. Derivando la expresión (d) se obtiene

$$M_x = -\frac{P}{\pi}\cos^2\varphi \qquad (209)$$

en $x = y = 0$, siempre que ξ y η no se anulen simultáneamente. Se ve que en general el momento de empotramiento M_x depende únicamente de la relación η/ξ. Sin embargo, si $\xi = \eta = 0$, el momento M_x se anula, y así queda probado que la función $M_x(\xi,\eta)$ es discontinua en el origen.

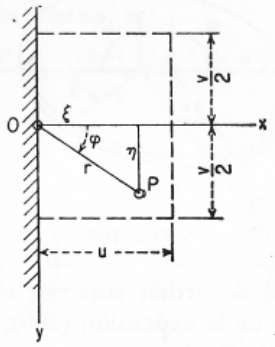


FIG. 170

Carácter parecido tiene la acción de una carga cerca de un borde rígido o elásticamente empotrado, independientemente de la forma de apoyo de la placa en otros puntos. Esto lleva también a la forma característica de las superficies de influencia dibujadas para momentos en el contorno de placas empotradas o continuas sobre este contorno (figs. 171 y 173).

Para esfuerzos cortantes o reacciones, que actúen en $x = y = 0$ obtenemos de forma similar en la figura 170

$$Q_x = \frac{2P}{\pi r}\cos^3\varphi \qquad (210)$$

donde $r^2 = \xi^2 + \eta^2$.

[1] Véase A. Nádai, «Elastische Platten», pág. 203, Berlín, 1925.

Librodot

Superficie de influencia del momento de borde de una placa circular empotrada[1] (fig. 171)

Representando la flecha (197), página 321, en la forma $w = PK(x,0,\xi,\theta)$, podemos considerar K como función de influencia de la flecha en un punto $(x,0)$ siendo (ξ,θ) la posición instantánea de la carga unidad. Para calcular el momento de borde M_r en $x = r/a = 1$, $y = 0$ debemos notar que en la expresión correspondiente de las (192) a lo largo del borde empotrado $x = 1$ se anulan todos los términos excepto el siguiente, que da

$$M_r = -\frac{D}{a^2}\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right)_{x=1} = -\frac{1}{4\pi}\frac{(1-\xi^2)^2}{\xi^2 - 2\xi\cos\theta + 1} \qquad (e)$$

Utilicemos la notación abreviada $\xi^2 - 2\xi\cos\theta + 1 = \eta^2$ e introduzcamos el ángulo φ [fig. 171 *a*)]. Tenemos $\xi^2 = 1 - 2\eta\cos\varphi + \eta^2$ y

$$M_r = -\frac{1}{4\pi}(2\cos\varphi - \eta)^2$$

que para valores despreciables de η coincide con la expresión (209). La superficie de influencia del momento M_r está representada en la figura 171 *b*) por curvas de nivel con las cotas multiplicadas por 4π.

Superficie de influencia del momento flector M_x *en el centro de una placa cuadrada simplemente apoyada*[2]

Es conveniente emplear las superficies de influencia de los valores $M_{x0} = -D\partial^2 w/\partial x^2$ y $M_{y0} = -D\partial^2 w/\partial y^2$ con el fin de llegar a los resultados finales mediante las ecuaciones (101).

La superficie de influencia de M_{x0} puede construirse basándose en la figura 76. El efecto de la carga aislada $P = 1$ actuando en el origen está dado por la primera de las ecuaciones (151) y la ecuación (152). Esta última expresión incluye también la singularidad del tipo dado por la ecuación (206), necesaria en el origen. El efecto de otras cargas puede calcularse mediante la primera de las ecuaciones (149), siendo la serie rápidamente convergente. La superficie de influencia aparece en la figura 172 con sus cotas multiplicadas por 8π.

Calculemos el momento flector M_x para dos cargas P_1 y $P_2 < P_1$ situadas a una distancia fija igual a $0{,}25a$, estando cada carga uniformemente repartida sobre una superficie $0{,}1a \times 0{,}1a$. Fuera de estas superficies la placa puede soportar una carga viva uniformemente repartida de una intensidad $q < P_2/0{,}01a^2$.

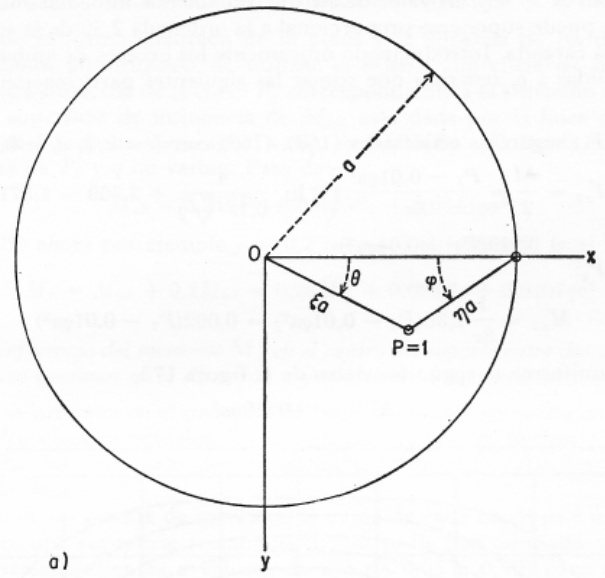
La superficie de influencia (fig. 172) para M_{x0} y la distribución de carga que da el máximo valor de M_{x0} están dadas en esa figura con líneas continuas. A causa de la singularidad, las ordenadas de la superficie son infinitamente grandes en el centro de la placa; por otra parte es más sencillo calcular el efecto de la carga P_1, separadamente, mediante las ecuaciones (163) y (165) junto con las tablas 26 y 27[3].

[1] M. El-Hashimy en «Angsgewählte Plattenprobleme», Zürich, 1956, dio diversas superficies de influencia para placas circulares empotradas.

[2] El conjunto más extenso de superficies de influencia de placas rectangulares con distintas condiciones de borde se debe a A. Pucher, «Einflussfelder elastischer Platten», 2.ª ed., Viena, 1958. Véase también su memoria en «Federhofer-Girkmann-Festschrift», pág. 303, Viena, 1950. Respecto a superficies de influencia de placas continuas, véase G. Hocland, *Ingr.-Arch.*, vol. 24, pág. 124, 1956.

[3] El efecto de la carga central puede calcularse también mediante las líneas de influencia similares a las usadas en el próximo ejemplo o mediante la tabla 20.

Librodot


a
O
x
θ
φ
ξa
ηa
P=1
a)
y

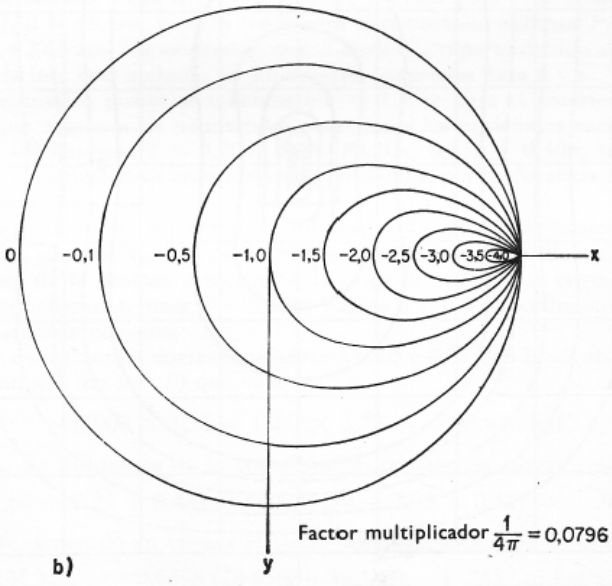

0
-0,1
-0,5
-1,0
-1,5
-2,0
-2,5
-3,0
-3,5
x
Factor multiplicador $\frac{1}{4\pi} = 0{,}0796$
b)
y

FIG. 171

Para este caso tenemos $\nu = 0$, $v/u = k = 1$, $\varphi = 1{,}5708$, $\psi = 0$, $\lambda = 2{,}669$ y $\mu = 0$, que dan $N = 0$ y un valor de M que calculamos inmediatamente. El efecto de la carga P_2 puede suponerse proporcional a la ordenada 2,30 de la superficie en el centro del área cargada. Introduciendo únicamente los excesos de ambas cargas sobre las cargas debidas a q, tenemos que sumar las siguientes participaciones en el valor final de M_{x0}:

1. Carga P_1: según las ecuaciones (163), (165) con $\xi = a/2$, $d = 0{,}1\sqrt{2}a$,

$$M'_{x0} = \frac{M}{2} = \frac{P_1 - 0{,}01qa^2}{8\pi}\left(2 \ln \frac{4}{0{,}1\pi\sqrt{2}} + 2{,}669 - 1{,}571\right)$$
$$= 0{,}219(P_1 - 0{,}01qa^2)$$

2. Carga P_2:

$$M''_{x0} = \frac{1}{8\pi} 2{,}30(P_2 - 0{,}01qa^2) = 0{,}092(P_2 - 0{,}01qa^2)$$

3. Carga uniforme q: según los datos de la figura 172,

$$M''' = 0{,}0369qa^2$$

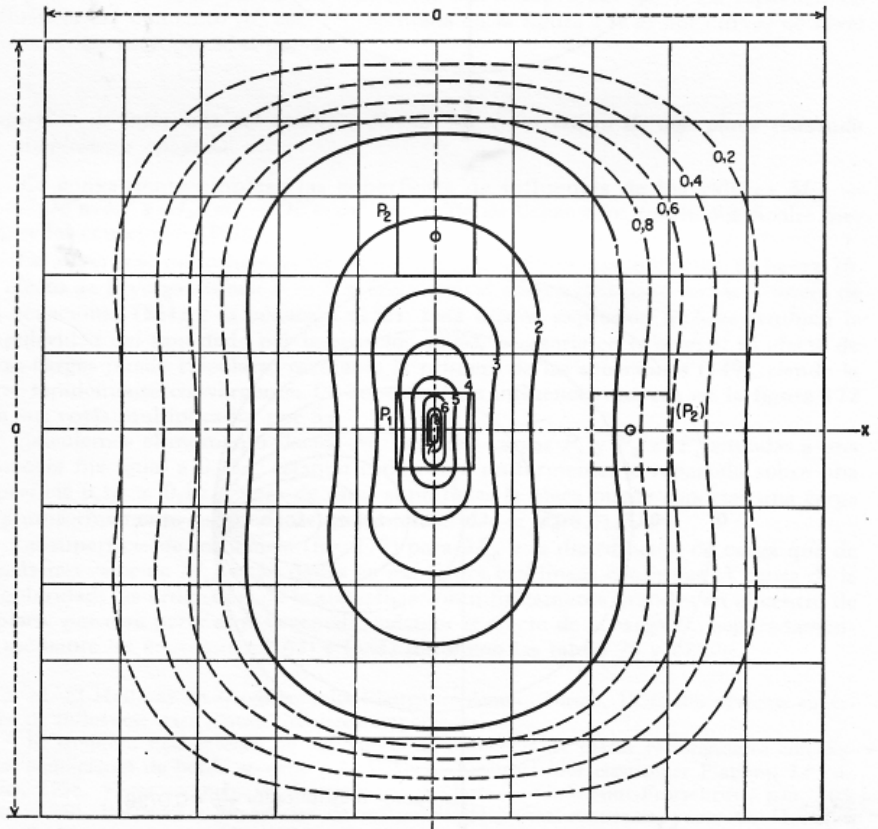


FIG. 172

Librodot

Por lo tanto

$$M_{x0} = 0{,}219P_1 + 0{,}092P_2 + 0{,}0338qa^2$$

A causa de la forma cuadrada de la placa y la simetría de las condiciones de contorno, estamos en situación de utilizar la misma superficie de influencia para calcular M_{y0}. La situación de la carga P_2 correspondiente a la situación antes supuesta respecto a la superficie de influencia de M_{x0}, está dada por la línea de trazos, y la contribución de P_2 resulta ahora igual a $M_{y0} = 0{,}035(P_2 - 0{,}01qa^2)$ en tanto que las participaciones de P_1 y q no varían. Esto da

$$M_{y0} = 0{,}219P_1 + 0{,}035P_2 + 0{,}0344qa^2$$

Suponiendo ahora por ejemplo $\nu = 0{,}2$ tenemos el resultado final

$$M_x = M_{x0} + 0{,}2M_{y0} = 0{,}263P_1 + 0{,}099P_2 + 0{,}0407qa^2$$

Superficie de influencia del momento M_x *en el centro del soporte entre dos vanos interiores de una placa continua en la dirección* x *y simplemente apoyada en* $y = \pm b/2$

Este caso se presenta en el proyecto de losas de puente apoyadas en muchas vigas de forjado y dos vigas principales. En el supuesto de que las flechas y las rigideces a torsión de todas las vigas sean despreciables, obtenemos la superficie de influencia indicada[1] en la figura 173.

En el caso de un puente de carretera, la carga de cada rueda está uniformemente repartida sobre una superficie rectangular u por v. Se han dibujado cinco líneas de influencia (correspondientes a valores de v/b de 0,05 a 0,40) para cargas que se mueven según la línea central de la losa $y = 0$ y se dan las ordenadas máximas que nos permiten determinar sin dificultad la posición de la carga preponderante en el proyecto. Tanto la superficie como las líneas se han dado con sus ordenadas multiplicadas por 8π.

Ejemplo de cálculo. Sea $a = b = 7{,}20$ m; además para el neumático posterior $P_r = 7000$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 75$ cm y para el neumático anterior $P_f = 1800$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 37{,}5$ cm. Supondremos que el efecto de reparto debido al pavimento y al espesor de la losa está incluido en los valores adoptados para u y v.

Para el neumático posterior tenemos $v/b \approx 0{,}10$ y para el anterior $v/b \approx 0{,}05$. Suponiendo que damos a los neumáticos posteriores las posiciones sucesivas correspondientes a las abscisas $\xi = 0{,}20a$, $0{,}25a$, $0{,}30a$, $0{,}35a$ y $0{,}40a$, las posiciones respectivas de los neumáticos anteriores quedan fijadas por la distancia entre ejes, sea 4,20 m $= 0{,}583a$.

El cálculo mediante la superficie de influencia da, para cada posición particular de la carga, una serie de valores del momento que se han dibujado en la figura 173 como funciones de la abscisa ξ mediante la línea de trazos. La curva presenta un máximo aproximadamente para $\xi = 0{,}30a$. Vamos a ver el procedimiento de cálculo únicamente para esta posición.

Las líneas de influencia correspondientes a 0,10 y 0,05 dan la contribución de las dos cargas centrales (en $y = 0$) que vale

$$-(7000 \times 3{,}24 + 1800 \times 3{,}32 = -28\,656 \text{ kgf}$$

y la superficie de influencia de la contribución de las seis cargas restantes que es

$$-7000\,(1{,}66 + 2{,}25 + 0{,}44) - 1800\,(1{,}59 + 2{,}25 + 0{,}41) = -38\,100 \text{ kgf}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el factor multiplicador $1/8\pi = 0{,}0398$, tenemos

$$(M_x)_{\min} = -0{,}0398\,(28\,656 + 38\,100) = -2657 \text{ m kgf/m}$$

[1] Respecto a métodos para su construcción, véanse las referencias dadas en el apartado 52.

Librodot

Por lo tanto

$$M_{x0} = 0{,}219P_1 + 0{,}092P_2 + 0{,}0338qa^2$$

A causa de la forma cuadrada de la placa y la simetría de las condiciones de contorno, estamos en situación de utilizar la misma superficie de influencia para calcular M_{y0}. La situación de la carga P_2 correspondiente a la situación antes supuesta respecto a la superficie de influencia de M_{x0}, está dada por la línea de trazos, y la contribución de P_2 resulta ahora igual a $M_{y0} = 0{,}035(P_2 - 0{,}01qa^2)$ en tanto que las participaciones de P_1 y q no varían. Esto da

$$M_{y0} = 0{,}219P_1 + 0{,}035P_2 + 0{,}0344qa^2$$

Suponiendo ahora por ejemplo $\nu = 0{,}2$ tenemos el resultado final

$$M_x = M_{x0} + 0{,}2M_{y0} = 0{,}263P_1 + 0{,}099P_2 + 0{,}0407qa^2$$

Superficie de influencia del momento M_x *en el centro del soporte entre dos vanos interiores de una placa continua en la dirección* x *y simplemente apoyada en* $y = \pm b/2$

Este caso se presenta en el proyecto de losas de puente apoyadas en muchas vigas de forjado y dos vigas principales. En el supuesto de que las flechas y las rigideces a torsión de todas las vigas sean despreciables, obtenemos la superficie de influencia indicada[1] en la figura 173.

En el caso de un puente de carretera, la carga de cada rueda está uniformemente repartida sobre una superficie rectangular u por v. Se han dibujado cinco líneas de influencia (correspondientes a valores de v/b de 0,05 a 0,40) para cargas que se mueven según la línea central de la losa $y = 0$ y se dan las ordenadas máximas que nos permiten determinar sin dificultad la posición de la carga preponderante en el proyecto. Tanto la superficie como las líneas se han dado con sus ordenadas multiplicadas por 8π.

Ejemplo de cálculo. Sea $a = b = 7{,}20$ m; además para el neumático posterior $P_r = 7000$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 75$ cm y para el neumático anterior $P_f = 1800$ kgf, $u = 45$ cm, $v = 37{,}5$ cm. Supondremos que el efecto de reparto debido al pavimento y al espesor de la losa está incluido en los valores adoptados para u y v.

Para el neumático posterior tenemos $v/b \approx 0{,}10$ y para el anterior $v/b \approx 0{,}05$. Suponiendo que damos a los neumáticos posteriores las posiciones sucesivas correspondientes a las abscisas $\xi = 0{,}20a$, $0{,}25a$, $0{,}30a$, $0{,}35a$ y $0{,}40a$, las posiciones respectivas de los neumáticos anteriores quedan fijadas por la distancia entre ejes, sea 4,20 m $= 0{,}583a$.

El cálculo mediante la superficie de influencia da, para cada posición particular de la carga, una serie de valores del momento que se han dibujado en la figura 173 como funciones de la abscisa ξ mediante la línea de trazos. La curva presenta un máximo aproximadamente para $\xi = 0{,}30a$. Vamos a ver el procedimiento de cálculo únicamente para esta posición.

Las líneas de influencia correspondientes a 0,10 y 0,05 dan la contribución de las dos cargas centrales (en $y = 0$) que vale

$$-(7000 \times 3{,}24 + 1800 \times 3{,}32 = -28\,656 \text{ kgf}$$

y la superficie de influencia de la contribución de las seis cargas restantes que es

$$-7000\,(1{,}66 + 2{,}25 + 0{,}44) - 1800\,(1{,}59 + 2{,}25 + 0{,}41) = -38\,100 \text{ kgf}$$

Finalmente, teniendo en cuenta el factor multiplicador $1/8\pi = 0{,}0398$, tenemos

$$(M_x)_{\min} = -0{,}0398\,(28\,656 + 38\,100) = -2657 \text{ m kgf/m}$$

[1] Respecto a métodos para su construcción, véanse las referencias dadas en el apartado 52.

Librodot

Esfuerzo cortante máximo debido a una carga uniformemente repartida en la superficie de un rectángulo

En la figura 170 se indica con líneas de trazos una carga de este tipo adyacente al borde empotrado de una placa cantilever indefinida. Este problema se presenta también en el proyecto de forjados de puente. Mediante el resultado (210) y el principio de superposición obtenemos el siguiente esfuerzo cortante en $x = y = 0$.

$$(Q_x)_{\text{máx}} = \frac{2P}{\pi u v} \int_0^u d\xi \int_{-v/2}^{v/2} \frac{\xi^3}{(\xi^2 + \eta^2)^2}\, d\eta$$

que da

$$(Q_x)_{\text{máx}} = \alpha \frac{P}{v} \qquad (f)$$

con

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\left[\frac{v}{u} \ln\left(\frac{4u^2}{v^2} + 1\right) + 2 \operatorname{arctg} \frac{v}{2u}\right] \qquad (g)$$

En la tabla 78 se dan los valores numéricos del factor α. Como la influencia de las cargas de otras ruedas sobre Q_x ordinariamente es despreciable, no es necesaria la superficie de influencia de Q_x. El resultado (f) puede utilizarse con suficiente aproximación para losas de dimensiones finitas y también como valor máximo posible para borde elásticamente empotrado.

TABLA 78

Valores del flector α de la ecuación (f)

v/u	α	v/u	α
0,1	0,223	1,2	0,852
0,2	0,357	1,4	0,884
0,3	0,459	1,6	0,909
0,4	0,541	1,8	0,927
0,5	0,607	2,0	0,941
0,6	0,662	2,5	0,964
0,7	0,708	3	0,977
0,8	0,747	4	0,989
0,9	0,780	5	0,994
1,0	0,807	10	0,999

77. *Funciones de influencia y funciones características*

Es interesante hacer notar la estrecha relación existente entre la función de influencia (o función de Green) de la placa flexada y el problema de las vibraciones transversales libres. Estas últimas obedecen a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 W = -\frac{\mu}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \qquad (a)$$

en la que $W(x,y,t)$ es la flecha, μ la masa por unidad de área y t el tiempo. Con la hipótesis $W = w(x,y) \cos pt$ obtenemos para la función w la ecuación diferencial

$$D\Delta\Delta w - \lambda w = 0 \qquad (b)$$

Librodot

en la que $\lambda = p^2\mu$. Para determinadas condiciones de contorno la ecuación (*b*) sólo admite solución para una serie definida de valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ del parámetro λ, valores llamados *números característicos* (o *valores propios*) del problema. Las soluciones correspondientes forman una serie de funciones características $w_1(x,y), w_2(x,y), \ldots, w_k(x,y), \ldots$ Estas funciones son otorgonales entre sí, es decir

$$\iint_A w_i(x,y)w_k(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (c)$$

para $i \neq k$, estando extendida la integral a toda la superficie de la placa. Como las funciones $w_k(x,y)$ están definidas salvo un factor constante, pueden «normalizarse» eligiendo este factor de modo que se satisfaga la condición

$$\iint_A w_k^2(x,y)\,dx\,dy = a^2b^2 \qquad (d)$$

La forma elegida para el segundo miembro de (*d*) es la apropiada para el caso de placa rectangular de lados *a* y *b*, pero cualquiera que sea el contorno de la placa, w_k debe tener la dimensión de una longitud. Establecida la serie de valores λ_k y la correspondiente serie de funciones normalizadas $w_k(x,y)$ puede demostrarse[1] que el desarrollo

$$K(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a^2b^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_k(x,y)w_k(\xi,\eta)}{\lambda_k} \qquad (e)$$

es válido para la función de influencia de una placa con condiciones de contorno que se satisfacen por las funciones características.

Aplicando el resultado (*e*) a las ecuaciones (*a*) y (*b*) del apartado anterior concluimos que, independientemente de cuál sea la distribución de las cargas, la flecha de la placa puede siempre representarse mediante una combinación lineal de funciones características.

Consideremos, como ejemplo, una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59). Las funciones propias que satisface la ecuación (*b*) junto con las condiciones de contorno $w = \Delta w = 0$ y la condición (*d*) son

$$w_k = 2\sqrt{ab}\,\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad (f)$$

siendo *m* y *n* dos números enteros arbitrarios.

El valor propio correspondiente de la ecuación (*b*) es

$$\lambda_k = \pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \qquad (g)$$

La sustitución de estas expresiones en el desarrollo (*e*) conduce inmediatamente al resultado (134). Pueden obtenerse de modo parecido funciones de influencia para placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, con condiciones arbitrarias en los otros bordes. Sin embargo, en tal caso resulta necesario el cálculo previo de los valores λ_k a partir de la ecuación de frecuencia transcendente correspondiente. Un nuevo ejemplo de función de influencia que puede obtenerse en forma de desarrollo en serie es el caso de placa circular, cuyas formas de vibración, expresables mediante funciones de Bessel, son bien conocidas.

[1] Véase, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», vol. 1, página 370, Nueva York, 1953.

Librodot

en la que $\lambda = p^2\mu$. Para determinadas condiciones de contorno la ecuación (*b*) sólo admite solución para una serie definida de valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ del parámetro λ, valores llamados *números característicos* (o *valores propios*) del problema. Las soluciones correspondientes forman una serie de funciones características $w_1(x,y), w_2(x,y), \ldots, w_k(x,y), \ldots$ Estas funciones son otorgonales entre sí, es decir

$$\iint_A w_i(x,y)w_k(x,y)\,dx\,dy = 0 \qquad (c)$$

para $i \neq k$, estando extendida la integral a toda la superficie de la placa. Como las funciones $w_k(x,y)$ están definidas salvo un factor constante, pueden «normalizarse» eligiendo este factor de modo que se satisfaga la condición

$$\iint_A w_k^2(x,y)\,dx\,dy = a^2b^2 \qquad (d)$$

La forma elegida para el segundo miembro de (*d*) es la apropiada para el caso de placa rectangular de lados *a* y *b*, pero cualquiera que sea el contorno de la placa, w_k debe tener la dimensión de una longitud. Establecida la serie de valores λ_k y la correspondiente serie de funciones normalizadas $w_k(x,y)$ puede demostrarse[1] que el desarrollo

$$K(x,y,\xi,\eta) = \frac{1}{a^2b^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w_k(x,y)w_k(\xi,\eta)}{\lambda_k} \qquad (e)$$

es válido para la función de influencia de una placa con condiciones de contorno que se satisfacen por las funciones características.

Aplicando el resultado (*e*) a las ecuaciones (*a*) y (*b*) del apartado anterior concluimos que, independientemente de cuál sea la distribución de las cargas, la flecha de la placa puede siempre representarse mediante una combinación lineal de funciones características.

Consideremos, como ejemplo, una placa rectangular simplemente apoyada (fig. 59). Las funciones propias que satisface la ecuación (*b*) junto con las condiciones de contorno $w = \Delta w = 0$ y la condición (*d*) son

$$w_k = 2\sqrt{ab}\,\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \qquad (f)$$

siendo *m* y *n* dos números enteros arbitrarios.

El valor propio correspondiente de la ecuación (*b*) es

$$\lambda_k = \pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \qquad (g)$$

La sustitución de estas expresiones en el desarrollo (*e*) conduce inmediatamente al resultado (134). Pueden obtenerse de modo parecido funciones de influencia para placas rectangulares con dos bordes opuestos simplemente apoyados, con condiciones arbitrarias en los otros bordes. Sin embargo, en tal caso resulta necesario el cálculo previo de los valores λ_k a partir de la ecuación de frecuencia transcendente correspondiente. Un nuevo ejemplo de función de influencia que puede obtenerse en forma de desarrollo en serie es el caso de placa circular, cuyas formas de vibración, expresables mediante funciones de Bessel, son bien conocidas.

[1] Véase, por ejemplo, R. Courant y D. Hilbert, «Methods of Mathematical Physics», vol. 1, página 370, Nueva York, 1953.

Librodot

Puesto que la intensidad de la carga está dada por $f(\eta) = P/v$ para $-v/2 < \eta < v/2$ y por cero en todo otro punto tenemos

$$f(y) = \frac{2P}{\pi v} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha v}{2} \cos \alpha y}{\alpha} \, d\alpha \qquad (d)$$

Por otra parte, la función $f(y)$ es igual a la diferencia de esfuerzos cortantes Q_x a ambos lados de la sección $x = \xi$. Así pues, mediante las ecuaciones (108), tenemos

$$D \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_1 - \Delta w_2) = f(y) \qquad (e)$$

en que $x = \xi$. De acuerdo con la ecuación (d) representamos las flechas w_1 y w_2 por las integrales

$$w_i = \int_0^\infty X_i(x,\alpha) \cos \alpha y \, d\alpha \qquad i = 1, 2 \qquad (f)$$

en las que la función

$$X_i(x,\alpha) = (A_i + B_i x) \operatorname{ch} \alpha x + (C_i + D_i x) \operatorname{sh} \alpha x$$

tiene la misma forma que la función Y_m de la página 136.

Basta ahora sustituir las expresiones (f) en las ecuaciones (a), (b) y (e) para determinar los coeficientes A_1, B_1, ..., D_2 independientes de y y funciones de α.

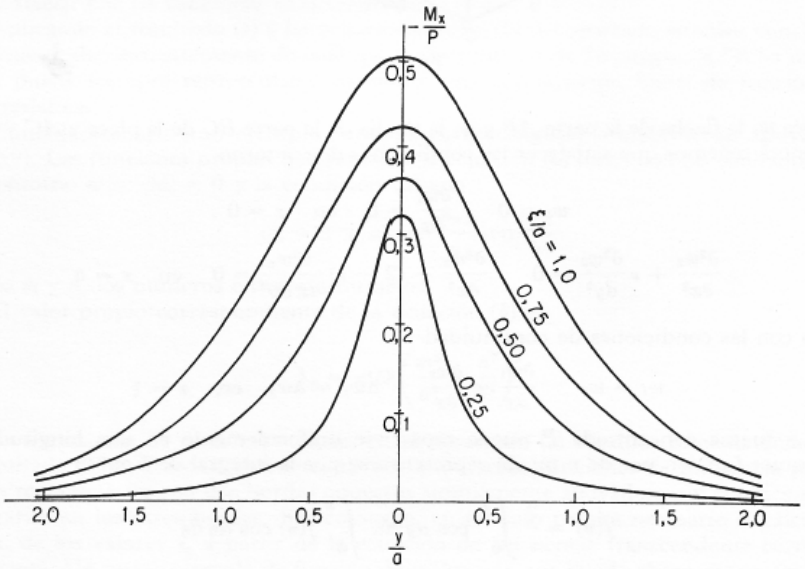


FIG. 175

En la figura 175 se muestra la distribución de momentos flectores en el borde empotrado, calculada mediante la solución anterior para diversas posiciones de la carga y para los valores $v = 0$ y $\nu = 0{,}3$.

Librodot

Transformacion de Mellin

La aplicación de esta transformación es apropiada en placas en forma de sector de condiciones homogéneas en los bordes $\theta = 0$ y $\theta = \alpha$ (fig. 176). Consideremos como ejemplo el borde $\theta = 0$ empotrado y el borde $\theta = \alpha$ libre y con una carga concentrada en él en $r = r_0$[1].

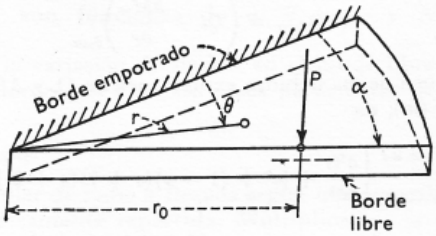


FIG. 176

Utilizamos coordenadas polares (v. ap. 62) y comenzamos tomando la solución general de la ecuación diferencial $\Delta\Delta w = 0$ en la forma

$$W(s) = r^{-s}\Theta(\theta,s) \tag{g}$$

donde s es un parámetro y

$$\Theta(\theta,s) = A(s)\cos s\theta + B(s)\operatorname{sen} s\theta + C(s)\cos(s+2)\theta + D(s)\operatorname{sen}(s+2)\theta \tag{h}$$

La flecha y la pendiente en el borde empotrado se anulan si

$$[W(s)]_{\theta=0} = 0 \qquad \frac{1}{r}\left[\frac{\partial W(s)}{\partial\theta}\right]_{\theta=0} = 0 \tag{i}$$

El momento flector M_t en el borde libre se anula a condición de que

$$\left[\nu\frac{\partial^2 W(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W(s)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W(s)}{\partial\theta^2}\right]_{\theta=\alpha} = 0 \tag{j}$$

Ahora bien, una función $f(r)$ puede representarse mediante la fórmula de Mellin en la forma siguiente:

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} r^{-s}\,ds \int_0^\infty \rho^{s-1} f(\rho)\,d\rho \tag{k}$$

en la que σ es una constante real sometida a algunas limitaciones. Para el caso específico de una fuerza P concentrada en $r = r_0$, obtenemos

$$f(r) = \frac{P}{2\pi i r_0}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-(s+3)} ds \tag{l}$$

[1] El problema fue estudiado por S. Woinowsky-Krieger, *Ingr.-Arch.*, vol. 20, pág. 391, 1952. Le hizo algunas correcciones W. T. Koiter, *Ingr.-Arch.*, vol. 21, pág. 381, 1953. Para placa con los dos bordes empotrados, véase Y. S. Uflyand, *Doklady Akad. Nauk S.S.S.R.*, volumen 84, pág. 463, 1952. Véase también W. T. Koiter y J. B. Alblas, *Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, serie B, vol. 57, núm. 2, pág. 259, 1954.

Librodot

Esto sugiere la forma siguiente para la flecha de la placa:

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} r^{-s}\Theta(\theta,s)\,ds \qquad (m)$$

Ahora bien, las fuerzas que actúan hacia abajo en el borde $\theta = \alpha$ están dadas por

$$(V_t)_{\theta=\alpha} = \left(Q_t - \frac{\partial M_{rt}}{\partial r}\right)_{\theta=\alpha} \qquad (n)$$

Esto mediante el uso de las debidas expresiones de Q_t y M_{rt} (v. págs. 310 y 311) así como la expresión (m), da

$$(V_t)_{\theta=\alpha} = -\frac{D}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\left\{\frac{\partial^3\Theta}{\partial\theta^3} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)]\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right\}_{\theta=\alpha} r^{-(s+3)}\,ds \qquad (o)$$

Finalmente igualamos las expresiones (l) y (o) y así obtenemos, junto con las ecuaciones (i) y (j) cuatro condiciones para determinar $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ y $D(s)$. La

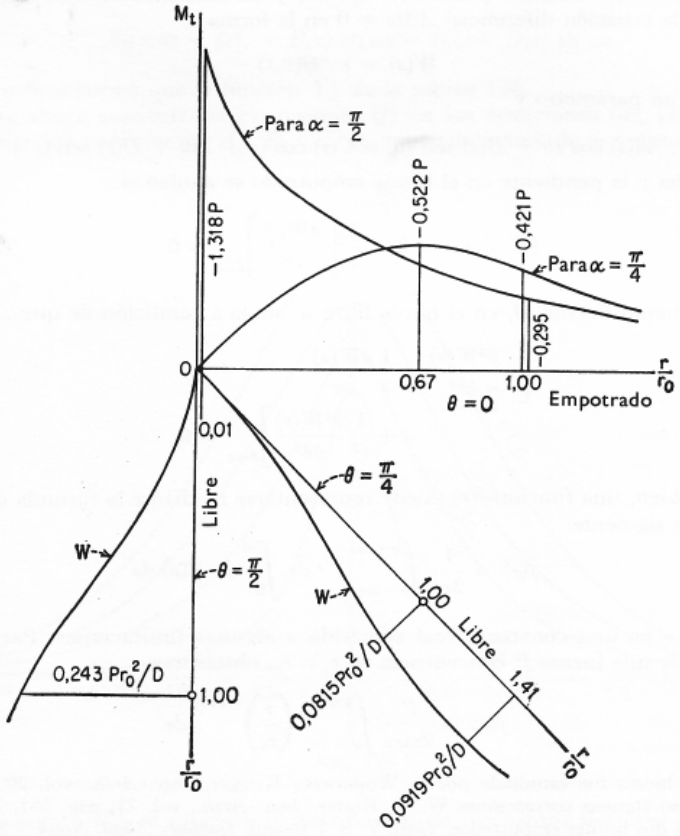


FIG. 177

Librodot

sustitución de estos coeficientes en las expresiones (h) y (m) y la introducción de una nueva variable $u = -(s+1)i$, donde $i = \sqrt{1}$, da la siguiente expresión de la flecha:

$$w = \frac{2Prr_0}{\pi D}\int_0^\infty \frac{G\cos\left(u\ln\frac{r}{r_0}\right) + H\,\text{sen}\left(u\ln\frac{r}{r_0}\right)}{Nu(1+u^2)}\,du \qquad (p)$$

en la que G y H son funciones de α, θ y u, y N es función de α y u.

La figura 177 da la variación de flechas en el borde libre y la distribución de momentos M_t en el borde $\theta = 0$ en los casos particulares de $\alpha = \pi/4$ y $\alpha = \pi/2$.

Transformacion de Hankel

Sea una placa circular de radio a flexada según una superficie de revolución por una carga $q(r)$ simétricamente repartida. Multiplicamos la ecuación diferencial $\Delta\Delta w = q/D$ de esa placa por $r\mathcal{J}_0(\lambda r)dr$ e integramos por partes entre 0 e ∞. Dado que $w = 0$ para $r > a$, el resultado es

$$\lambda^4\int_0^\infty w(r)r\mathcal{J}_0(\lambda r)\,dr = g(\lambda) \qquad (q)$$

donde

$$g(\lambda) = (C_1 + \lambda^2 C_2)J_0(\lambda a) + (\lambda C_3 + \lambda^3 C_4)J_1(\lambda a) + \frac{1}{D}\int_0^a q(\rho)\rho J_0(\lambda\rho)\,d\rho \qquad (r)$$

$\mathcal{J}_0$ y $\mathcal{J}_1$ son las funciones de Bessel de orden cero y uno, y C_i son constantes. Aplicando el teorema recíproco de Hankel a la ecuación (q) tenemos

$$w = \int_0^\infty g(\lambda)\frac{1}{\lambda^3}J_0(\lambda r)\,d\lambda \qquad (s)$$

Ahora pueden obtenerse las constantes C_1 de las condiciones en el contorno de la placa $r = a$ y de la condición de que la función $g(\lambda)/\lambda^4$ debe ser acotada. En el caso de placa anular[1] es preciso modificar ligeramente la expresión (r). En el apartado 61 se han dado ejemplos de aplicación de soluciones del tipo (s) a problemas de placas apoyadas elásticamente.

Transformación seno

Hemos utilizado soluciones del tipo

$$w(x,y) = \Sigma Y(y,\alpha)\,\text{sen}\,\alpha x$$

en el caso de placas rectangulares y de la forma

$$w(r,\theta) = \Sigma R(r,\beta)\,\text{sen}\,\beta\theta$$

en placas en forma de sector.

Las transformaciones finitas en seno de la función w, tomada respecto a x y θ respectivamente e introducida junto con las derivadas transformadas de w y la ecuación diferencial transformada de la placa, aparecen entonces como útiles para el cálculo de las constantes de las funciones Y o R a partir de las condiciones de contorno de la placa dada[2].

[1] Respecto al fundamento del método, véase H. Lung, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 32, página 46, 1952, donde se da una extensa relación de transformadas necesarias para su aplicación.

[2] La aplicación del método se debe a L. I. Deverall y C. J. Thorne, *J. Appl. Mechanics*, volumen 18, págs. 152 y 359, 1951.

Librodot

79. *Método de variable compleja*

Tomando como variables independientes $z = x + iy$ y $\bar{z} = x - iy$ la ecuación diferencial (104) de la placa flexada toma la forma

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\, \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{16D}\, q(z,\bar{z}) \qquad (a)$$

Tomemos $w = w_0 + w_1$, donde w_1 es la solución general de la ecuación

$$\frac{\partial^4 w}{\partial^2 z\, \partial^2 \bar{z}} = 0$$

y w_0 una solución particular de la ecuación (a). Entonces tenemos[1]

$$w_1 = \mathcal{R}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \qquad (b)$$

donde φ y χ son funciones analíticas en la región considerada. Generalmente se introduce con χ la derivada $\psi = d\chi/dz$.

En el caso de una carga concentrada P que actúa en $z_0 = x_0 + iy_0$ puede elegirse la solución w_0 en la forma

$$w_0 = \frac{P}{16\pi D}\,(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)\ \ln\ [(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)] \qquad (c)$$

que es equivalente en esencia a la expresión (206). Una expresión adecuada para una carga uniforme sería

$$w_0 = \frac{qz^2\bar{z}^2}{64D}$$

Si el contorno interior o exterior de la placa es un círculo, podemos sustituirlo por un círculo unidad $z = e^{i\theta}$ o en forma abreviada $z = \sigma$. Las condiciones de contorno en $z = \sigma$ deben expresarse también en forma compleja. Las funciones φ y ψ pueden tomarse en forma de series de potencias, con términos adicionales si es preciso, según los valores que tomen los esfuerzos en el borde interior de la placa. Multiplicando las condiciones de contorno por $[2\pi i(\sigma - z)]^{-1}\, d\sigma$ integrando a lo largo de $z = \sigma$ obtenemos las funciones buscadas φ y ψ[2].

Para contornos distintos del círculo puede usarse una función $z = w(\zeta) = w(\varrho e^{i\eta})$ tal que transformarse el contorno en el círculo unidad $\zeta = e^{i\eta} = \sigma$. La determinación de las funciones $\varphi_1(\zeta) = \varphi(z)$ y $\psi_1(\zeta) = \psi(z)$ a partir de las condiciones de contorno en $\zeta = \sigma$ se reduce entonces al problema considerado antes. El método de Muschelišhvili antes esbozado es eficiente de un modo particular en los casos relativos a distribución de tensiones en torno a agujeros[3]; en este caso la función $w(\zeta)$ tiene que reducir la parte infinita de placa al interior del círculo unidad.

[1] $\mathcal{R}$ representa la parte real de la solución. Esta forma de solución de la ecuación bipotencial se debe a E. Goursat, *Bull. Soc. Math. France*, vol. 26, pág. 236, 1898.

[2] Respecto al cálculo de las integrales del tipo Cauchy que implica este procedimiento, véase N. I. Muschelišhivili, «Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Groningen, 1953.

[3] Una amplia aplicación de este método al problema de concentración de tensiones se debe a G. N. Savin; véase su «Strees Concentration around Holes», Moscú, 1951. Véase también Yi-Yuan Yu, *J. Appl. Mechanics*, vol. 21, pág. 129, 1954, y *Proc. Ninth Intern. Congr. Appl. Mech.*, vol. 6, pág. 378, Bruselas, 1957; también L. I. Deverall, *J. Appl. Mechanics*, vol. 24, página 295, 1957. A. C. Stevenson utilizó un método ligeramente distinto aplicable también a algunos problemas de la teoría de placas gruesas, véase *Phil. Mag.*, vol. 33, pág. 639, 1942.

Librodot

El método de variable compleja nos permite también expresar en forma finita las funciones de Green de una placa circular con diversas condiciones de contorno[1].

En otros casos tales como el de una placa cuadrada, es preciso conformarse con una determinación aproximada de las funciones de Green[2].

Cuando la deformación de la placa pueda ponerse en forma de doble serie trigonométrica, podrá expresarse también mediante una serie sencilla haciendo uso de las propiedades de doble periodicidad de las funciones elípticas. Para el valor de Δw que satisface la ecuación potencial $\Delta(\Delta w) = 0$, tal expresión resulta especialmente conveniente a causa de la última conexión entre la función de Green de la expresión Δw y la función que reduce al círculo unidad la superficie de la placa dada[3]. Determinada Δw los esfuerzos cortantes de la placa están dados inmediatamente por las derivadas de esta función, en virtud de las ecuaciones (108).

80. *Aplicación del método de la energía de deformación al cálculo de flechas*

Consideremos de nuevo el problema de la placa rectangular simplemente apoyada. Del estudio hecho en el apartado 28 se deduce que la flecha de dicha placa (fig. 59) puede ponerse siempre en forma de una doble serie trigonométrica[4].

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (a)$$

Los coeficientes a_{mn} pueden considerarse como las coordenadas que definen la forma de la deformada y puede aplicarse a su determinación el principio de los trabajos virtuales. Para la aplicación de este principio necesitamos la expresión de la energía de deformación (v. pág. 108):

$$V = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \, dy} \right)^2 \right] \right\} dx \, dy \qquad (b)$$

Sustituyendo w por su expresión (a) el primer término de la integral en (b) toma la forma

$$\frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \right) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \right]^2 dx \, dy \qquad (c)$$

[1] E. Reissner, *Math. Ann.*, vol. 111, pág. 777, 1935; A. Lourye, *Priklad. Mat. Mekhan.*, volumen 4, pág. 93, 1940.

[2] F. Schultz-Grunoz, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 33, pág. 227, 1953.

[3] Courant y Hilbert, *op. cit.*, vol. 1, pág. 377. Han sido usadas de un modo especial las funciones elípticas por A. Nádai, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 2, pág. 1, 1922 (forjados), por F. Tölke, *Ingr.-Arch.*, vol. 5, pág. 187, 1934 (placas rectangulares); y también por B. D. Aggarwala, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 34, pág. 226, 1954 (placas poligonales y, en particular, placas triangulares).

[4] Los términos de esta serie son funciones características de la placa considerada (véase apartado 77).

Librodot

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^a \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{m'\pi x}{a}\,dx = \int_0^b \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\operatorname{sen}\frac{n'\pi y}{b}\,dy = 0$$

si $m \neq m'$ y $n \neq n'$, deducimos que para calcular la integral (c) tenemos que considerar únicamente los términos cuadráticos de la serie que aparece entre corchetes. Empleando la fórmula

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{ab}{4}$$

el cálculo de la integral (c) da

$$\frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2$$

Dado que

$$\int_0^a \int_0^b \operatorname{sen}^2\frac{m\pi x}{a}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^b \cos^2\frac{m\pi x}{a}\cos^2\frac{n\pi y}{b}\,dx\,dy = \frac{ab}{4}$$

puede deducirse que el segundo término de la integral de la expresión (b) se anula al verificar la integración. Por consiguiente la energía total de deformación está dada en este caso por la expresión (c) y es

$$V = \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \qquad (d)$$

Consideremos la deformada de una placa (fig. 59) debida a una fuerza concentrada P perpendicular a la placa y aplicada en el punto $x = \xi$, $y = \eta$. Para tener un desplazamiento virtual que cumpla con las condiciones de contorno damos a cualquier coeficiente $a_{m'n'}$ de la serie (a) una variación elemental $\delta a_{m'n'}$. Como consecuencia de ello la flecha (a) sufre una variación.

$$\delta w = \delta a_{m'n'} \operatorname{sen}\frac{m'\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n'\pi y}{b}$$

y la carga P produce un trabajo virtual

$$P\,\delta a_{m'n'} \operatorname{sen}\frac{m'\pi \xi}{a}\operatorname{sen}\frac{n'\pi \eta}{b}$$

Del principio de los trabajos virtuales se deduce que este trabajo debe ser igual a la variación de la energía potencial (d) debida a la variación $\delta a_{m'n'}$. Por lo tanto

$$P\,\delta a_{m'n'} \operatorname{sen}\frac{m'\pi \xi}{a}\operatorname{sen}\frac{n'\pi \eta}{b} = \frac{\partial V}{\partial a_{m'n'}}\,\delta a_{m'n'}$$

Librodot

Sustituyendo V por su expresión (d), obtenemos

$$P\,\delta a_{m'n'}\,\text{sen}\,\frac{m'\pi\xi}{a}\,\text{sen}\,\frac{n'\pi\eta}{b} = \frac{\pi^4 ab}{4}\,D a_{m'n'}\left(\frac{m'^2}{a^2}+\frac{n'^2}{b^2}\right)^2\delta a_{m'n'} \quad (e)$$

de donde

$$a_{m'n'} = \frac{4P\,\text{sen}\,\dfrac{m'\pi\xi}{a}\,\text{sen}\,\dfrac{n'\pi\eta}{b}}{\pi^4 abD\left(\dfrac{m'^2}{a^2}+\dfrac{n'^2}{b^2}\right)^2} \quad (f)$$

Sustituyendo en la expresión (a), obtenemos una vez más el resultado (133).

En lugar de utilizar el principio de los trabajos virtuales para calcular los coeficientes a_{mn} en la expresión (a) de la flecha, podemos obtener el mismo resultado considerando la energía total del sistema. Si un sistema está en una posición de equilibrio estable, su energía total es un mínimo. Aplicando este acento al estudio de la flexión de placas, observamos que la energía total en tales casos consta de dos partes: la energía de deformación debida a la flexión, dada por la expresión (b) y la energía potencial de la carga que actúa sobre la placa. Definiendo la posición del elemento de carga $q\,dx\,dy$ por su distancia vertical w al plano xy, la energía potencial correspondiente puede ponerse en la forma $-wq\,dx\,dy$, y la energía potencial de la carga total es

$$-\iint wq\,dx\,dy \quad (g)$$

Entonces la energía total del sistema es

$$I = \iint\left(\frac{D}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} - wq\right)dx\,dy \quad (h)$$

El problema de la flexión de una placa se reduce en cada caso particular a la determinación de una función w de x e y que satisfaga las condiciones de contorno dadas y haga que la integral (h) sea mínima. Si aplicamos a este problema el cálculo de variaciones obtenemos para w la ecuación (104) en derivadas parciales, que ya habíamos deducido de la consideración del equilibrio de un elemento de la placa. Sin embargo, puede utilizarse ventajosamente la integral (h) en el estudio aproximado de la flexión de placas. Para ello sustituyamos el problema de cálculo de variaciones por la determinación del mínimo de una cierta función, suponiendo que la flecha w puede ponerse en la forma

$$w = a_1\varphi_1(x,y) + a_2\varphi_2(x,y) + a_3\varphi_3(x,y) + \ldots + a_n\varphi_n(x,y) \quad (211)$$

en la que las funciones $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se han elegido en la forma apropiada[1] para representar la deformada y cumplir al mismo tiempo las condiciones

[1] Por la experiencia se sabe aproximadamente la forma de la deformada y nos guiamos por esta información para elegir la forma apropiada de las funciones φ.

Librodot

de contorno. Sustituyendo la expresión (211) en la integral (*h*), obtenemos después de integrar una función de segundo grado en los coeficientes a_1, a_2, ... Ahora basta elegir estos coeficientes de modo que la integral (*h*) sea un mínimo, de donde se deduce que

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial I}{\partial a_2} = 0 \qquad \cdots \qquad \frac{\partial I}{\partial a_n} = 0 \tag{i}$$

Lo que nos da un sistema de n ecuaciones lineales en a_1, a_2, ..., a_n y puede calcularse fácilmente estos valores en cada caso particular. Si las funciones φ son tales que la expresión (211) puede representar una función arbitraria dentro del contorno de la placa[1], este método de cálculo de flechas w nos lleva a aproximaciones cada vez mejores cuando aumenta el número n de términos y tomando n infinito obtenemos una solución exacta del problema.

Aplicando el método al caso de una placa rectangular simplemente apoyada, tomamos la flecha mediante la serie trigonométrica (*a*). Entonces, utilizando la expresión (*d*) de la energía de deformación, la integral (*h*) queda en la forma siguiente:

$$I = \frac{\pi^4 abD}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy \tag{j}$$

y las ecuaciones (*i*) tienen la forma

$$\frac{\pi^4 abD}{4} a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \int_0^a \int_0^b q \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy = 0 \tag{k}$$

En el caso de una carga P aplicada en un punto de coordenadas ξ, η, la intensidad de la carga q es nula en toda la placa salvo en el punto (ξ, η) en el que tenemos $q\, dx\, dy = P$. Entonces la ecuación (*k*) coincide con la ecuación (*e*) antes deducida mediante el principio de los trabajos virtuales. A efectos prácticos debe tenerse en cuenta que la integral

$$\iint \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] dx\, dy \tag{l}$$

contenida en las expresiones (*b*) y (*h*) se anula si la placa está rígidamente empotrada en el contorno. La misma simplificación es válida para una placa

[1] Hemos visto que una doble serie trigonométrica (*a*) tiene esta propiedad respecto a las flechas w de una placa rectangular simplemente apoyada. Por lo tanto, puede usarse para obtener una solución exacta del problema. El método de resolver problemas de flexión de placas mediante la integral (*h*) fue desarrollado por W. Ritz; véase *J. reine angew. Math.*, volumen 135, 1908, y *Ann. Physik*, serie 4, vol. 28, pág. 737, 1909.

Librodot

poligonal si una de las condiciones de contorno es $w = 0$ o bien $\partial w/\partial n = 0$, siendo n la dirección normal al borde de la placa[1].

Si se utilizan coordenadas polares en lugar de coordenadas rectangulares y se supone que existe simetría axial de carga y deformación, la ecuación (h) debe sustituirse por

$$I = \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 - \frac{2(1-\nu)}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] - wq \right\} r\, dr\, d\theta \quad (m)$$

Nuevamente la aportación del término que contiene el factor $1 - \nu$ es nula en el caso de placa empotrada en el contorno.

El método de la energía de deformación puede utilizarse también para calcular las flechas de una placa circular apoyada en una cimentación elástica. Por ejemplo, para obtener una primera aproximación para el caso de placa circular, tomamos para la flecha la expresión

$$w = A + Br^2 \quad (n)$$

en la que A y B son dos constantes a determinar mediante la condición de que la energía total del sistema en equilibrio es mínima.

La energía de deformación de la placa de radio a dada por la ecuación (m) es

$$V_1 = 4B^2 D\pi a^2 (1 + \nu)$$

La energía de deformación de la cimentación elástica es

$$V_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{kw^2}{2} r\, dr\, d\theta = \pi k \left(\frac{1}{2} A^2 a^2 + \frac{1}{2} ABa^4 + \frac{1}{6} B^2 a^6 \right)$$

La energía total del sistema para el caso de una carga P aplicada en el centro es

$$V = 4B^2 D\pi a^2 (1 + \nu) + \pi k(\tfrac{1}{2} A^2 a^2 + \tfrac{1}{2} ABa^4 + \tfrac{1}{6} B^2 a^6) - PA$$

Derivando esta expresión respecto a A y B y anulando las derivadas tenemos

$$A + Ba^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{16D(1+\nu)}{ka^4} \right] = 0$$

$$A + \frac{1}{2} Ba^2 = \frac{P}{\pi k a^2}$$

De acuerdo con el ejemplo numérico de la página 291 tomamos

$$l = a \qquad \frac{D}{ka^4} = 1 \qquad \frac{P}{8\pi k a^3} = 102 \cdot 10^{-5}$$

y obtenemos

$$w_{\text{máx}} = A = 108{,}7 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

Este resultado es aproximadamente el 3 % menor que el resultado $111{,}8 \times 10^{-3}$ obtenido mediante la ecuación diferencial de una placa apoyada en una cimentación elástica. Para una mayor aproximación deben utilizarse más términos en la expresión (n).

Si se desea obtener el reparto de tensiones en torno a la carga y no únicamente la flecha, es preciso añadir en la expresión (n) un término de la forma

$$\frac{P}{8\pi D} r^2 \ln r$$

de acuerdo con el tipo de singularidad requerida [v. ec. (206)].

[1] Véase, por ejemplo, E. R. Berger, *Osterr. Ingr.-Arch.*, vol. 7, pág. 41, 1953.

Librodot

En la mayoría de los casos en que se utilizan coordenadas polares la integral (*h*) toma la forma

$$I = \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2(1-\nu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \right] - wq \right\} r\,dr\,d\theta \quad (o)$$

81. *Otra forma de aplicar el método de la energía de deformación*

El cálculo de los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la expresión (211) que tiene que satisfacer las condiciones de contorno, pero no la ecuación diferencial del problema, puede llevarse a cabo sin necesidad de determinar la energía potencial del sistema.

Supongamos una flecha virtual de la placa δw; entonces calculamos el trabajo correspondiente de la carga q bien directamente mediante la integral

$$(\delta V)_1 = \iint q\,\delta w\,dx\,dy \qquad (a)$$

bien indirectamente, utilizando la expresión

$$(\delta V)_2 = \iint D\Delta\Delta w\,\delta w\,dx\,dy \qquad (b)$$

Si w fuera la solución exacta de la ecuación diferencial de la placa $D\Delta\Delta w = q$, las expresiones (*a*) y (*b*) serían idénticas. Para una solución aproximada representada por la ecuación (211) esto no es cierto. Podemos, no obstante, conseguir igualar las expresiones del trabajo para una sucesión particular de flechas virtuales a saber $\delta w_1 = \varphi_1 \delta a_1$, $\delta w_2 = \varphi_2 \delta a_2$, ..., $\delta w_n = \varphi_n \delta a_n$. Sustituyendo estas expresiones consecutivamente en la ecuación $(\delta V)_1 = (\delta V)_2$ o, lo que es lo mismo, en la ecuación

$$\iint q\,\delta w\,dx\,dy = \iint D\Delta\Delta w\,\delta w\,dx\,dy \qquad (c)$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones[1]:

$$\begin{aligned} \iint \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{D} \right) \varphi_1\,dx\,dy &= 0 \\ \iint \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{D} \right) \varphi_2\,dx\,dy &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \iint \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{D} \right) \varphi_n\,dx\,dy &= 0 \end{aligned} \qquad (d)$$

Queda únicamente sustituir la expresión (211) en las ecuaciones (*d*) y resolverlo respecto a los coeficientes desconocidos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esto lleva a la expresión final de la flecha de la forma (211).

[1] El principio que conduce a las llamadas ecuaciones de Galerkin fue indicado por W. Ritz; véase «Gesammelte Werke», pág. 228, 1911.

Librodot

Para aclarar la aplicación del método consideremos una placa rectangular uniformemente cargada con todos los bordes empotrados (fig. 91). Escribiendo para abreviar $2x/a = u$, $2y/b = v$, usaremos las expresiones

$$\begin{aligned} U_1 &= u^4 - 2u^2 + 1 \qquad & V_1 &= v^4 - 2v^2 + 1 \\ U_2 &= u^6 - 2u^4 + u^2 \qquad & V_2 &= v^6 - 2v^4 + v^2 \end{aligned} \tag{e}$$

La sucesión de funciones

$$\varphi_1 = U_1V_1 \qquad \varphi_2 = U_1V_2 \qquad \varphi_3 = U_2V_1 \qquad \varphi_4 = U_2V_2 \tag{f}$$

verifica entonces las condiciones

$$w = \frac{\partial w}{\partial u} = 0 \qquad \text{en } u = \pm 1$$

y

$$w = \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \qquad \text{en } v = \pm 1$$

Desarrollemos el cálculo para el caso particular de una placa cuadrada. Como x e y son intercambiables, tenemos $a_2 = a_3$ y, en consecuencia,

$$\varphi_2 = \varphi_3 = U_1V_2 + U_2V_1$$

Poniendo $qa^4/16D = N$ tomamos la expresión (211) en la forma

$$w = a_1U_1V_1 + a_2(U_1V_2 + U_2V_1) + a_4U_2V_2 \tag{g}$$

Sustituyendo consecutivamente en las ecuaciones (d) con los factores φ_1, φ_2 y φ_4 y teniendo en cuenta la notación (e), tenemos entonces que calcular las integrales entre los límites $u = \pm 1$, $v = \pm 1$. Llegamos así al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 6{,}687345a_1 &+ 1{,}215879a_2 + 0{,}0675488a_4 &&= 0{,}1422221N \\ 1{,}215879a_1 &+ 2{,}743525a_2 + 0{,}218235a_4 &&= 0{,}0406349N \\ 0{,}0675488a_1 &+ 0{,}218235a_2 + 0{,}00590462a_4 &&= 0{,}00290249N \end{aligned} \tag{h}$$

Para la primera aproximación tenemos

$$a_1 = \frac{0{,}1422221}{6{,}687345} N = 0{,}02127N$$

Resolviendo el sistema (h) completo tenemos

$$a_1 = 0{,}02023N \qquad a_2 = 0{,}00535N \qquad a_4 = 0{,}00625N$$

para la tercera aproximación.

Los resultados numéricos obtenidos mediante la expresión (g) para la flecha en el centro, los momentos $M_x = M_y$ en el centro, y el momento M_x en $x = a/2$, $y = 0$ son respectivamente:

Primera aproximación

$$0{,}001329qa^4/D,\ 0{,}0276qa^2,\ -0{,}0425qa^2$$

Tercera aproximación

$$0{,}001264qa^4/D,\ 0{,}0228qa^2,\ -0{,}0512qa^2$$

Como comparación, tenemos los valores dados por la tabla 35

$$0{,}00126qa^4/D,\ 0{,}0231qa^2,\ -0{,}0513qa^2$$

Los momentos en el centro se han calculado para $\nu = 0{,}3$.

Librodot

Se ve que, mientras la primera aproximación no es suficiente satisfactoria, la tercera aproximación parece suficiente aun por lo que se refiere a los momentos flectores.

82. *Diversos métodos aproximados*

Método combinado[1]

El método descrito en el apartado anterior puede limitarse a una variable, y por ejemplo, obteniéndose así una ecuación diferencial ordinaria respecto a la otra variable x. Consideremos de nuevo una placa cuadrada empotrada sometida a carga uniforme (fig. 91).

Limitándonos a la primera aproximación, tomamos en esta ocasión

$$w = \varphi(x)\psi(y) = \varphi(x)(a^4 - 8a^2y^2 + 16y^4) \qquad (a)$$

verificando así la función $\psi(y)$ las condiciones de contorno $w = dw/dy = 0$ para $y = \pm a/2$. Probemos ahora a satisfacer la condición (c) del apartado 81 tomando la variación en la forma

$$\delta w = \psi(y)\,\delta\varphi(x) \qquad (b)$$

Sustituyendo en la ecuación (c) del apartado 81, tenemos

$$\int \left[\int \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y)\, dy \right] dx\, \delta\varphi(x) = 0 \qquad (c)$$

que se verifica si

$$\int_{-a/2}^{a/2} \left(\Delta\Delta w - \frac{q}{D} \right) \psi(y)\, dy = 0 \qquad (d)$$

A continuación sustituimos la expresión (a) en esta última ecuación y obtenemos para la función incógnita $\varphi(x)$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{a^4}{504}\frac{d^4\varphi}{dx^4} - \frac{a^2}{21}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = \frac{q}{384D} \qquad (e)$$

Una solución particular inmediata de esta ecuación es $\varphi = q/384D$. Para la ecuación homogénea que corresponde a la ecuación (e) cuando $q = 0$ tenemos que tomar $\varphi = e^{\lambda x/a}$. Obteniendo $\lambda = \pm\alpha \pm \beta i$ con $\alpha = 4{,}1503$ y $\beta = 2{,}2858$. A causa de la simetría de la deformada respecto al eje y, las soluciones de la ecuación (e) deben ser funciones pares respecto a x; de acuerdo con ellos tenemos

$$\varphi = \frac{q}{384D}\left(1 + C_1 \operatorname{ch}\frac{\alpha x}{a}\cos\frac{\beta x}{a} + C_2 \operatorname{sh}\frac{\alpha x}{a}\operatorname{sen}\frac{\beta x}{a} \right) \qquad (f)$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 utilizamos las condiciones de contorno $\varphi = \partial\varphi/\partial x = 0$ para $x = \pm a/2$. Así obtenemos $C_1 = -0{,}50227$, $C_2 = -0{,}04396$, que dan definitivamente la forma de la función (f) y la solución (a).

De aquí deducimos los siguientes resultados numéricos para el centro de la placa: $w = 0{,}001296qa^4/D$ y (para $\nu = 0{,}3$) $-M_x = 0{,}0241qa^2$ y $M_y = 0{,}0261qa^2$.

Se ve, pues, que el uso parcial de la ecuación diferencial da para la primera aproximación resultados más exactos que los obtenidos en el apartado 81 por la pura aplicación del método de la energía de deformación. Para obtener una mayor aproximación, tenemos que tomar

$$w = \varphi_1(x)\psi_1(x) + \varphi_2(x)\psi_2(\psi) + \cdots \qquad (g)$$

[1] Debido a L. V. Kantorovich, *Izvest. Akad. Nauk S.S.S.R.*, núm. 5, 1933.

Librodot

donde todas las funciones $\psi(y)$ tienen que cumplir las condiciones de contorno en $y = \pm a/2$. La utilización de la ecuación (c) con variaciones $\delta w_1 = \psi_1 \delta\varphi_1 \delta w_2 = = \psi_2 \delta\varphi_2$, ... nos llevaría esta vez a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes para determinar las funciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... La solución de tal sistema, aunque en principio no presenta dificultad, puede resultar pesada para aproximaciones de orden superior; sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos es suficiente la segunda aproximación.

Método de retroceso

Puede utilizarse en la forma siguiente una solución (211) que cumpla únicamente las condiciones de contorno del problema. En lugar de calcular mediante la ecuación diferencial (103) las flechas correspondientes a un reparto dado de carga, utilizamos la misma ecuación para calcular la carga

$$\bar{q} = D\Delta\Delta w \qquad (h)$$

que resulta de una expresión (211) de la flecha. Según nuestra hipótesis la expresión (211) no representa la solución rigurosa del problema y por lo tanto, la carga (h) no coincidirá con la cargada q. Sin embargo, podemos elegir los parámetros a_1, a_2, ..., de la expresión (211) de modo que se igualen los valores medios de q y $\bar{q}$ en diversas partes de la superficie de la placa.

Consideremos, por ejemplo, una placa rectangular (fig. 178) con condiciones de contorno y reparto de carga simétricos respecto a los ejes x e y. Si subdividimos la

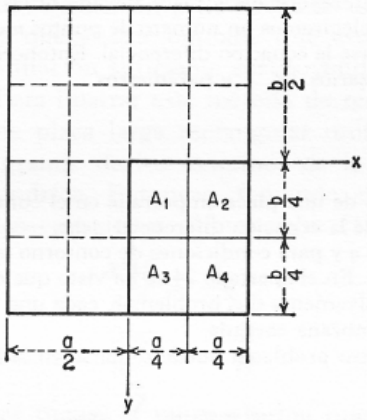


FIG. 178

placa en 16 rectángulos iguales, basta por razón de simetría considerar cuatro de ellos, tales como A_1, A_2, A_3 y A_4. Según ello la expresión (211) puede reducirse a cuatro términos, es decir, a

$$w = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 + a_4\varphi_4 \qquad (i)$$

Imponiendo ahora a q y q' en cada área parcial la condición

$$\iint_{A_n} (q - \bar{q})\, dx\, dy = 0 \qquad n = 1, 2, 3, 4 \qquad (j)$$

Librodot

obtenemos cuatro ecuaciones lineales respecto a los cuatro parámetros A_n y la resolución de este sistema da a la expresión (*i*) su forma definitiva[1].

Métodos de aproximación de las condiciones de contorno

Si disponemos de una solución que cumple la ecuación diferencial (103) junto con una de las condiciones de contorno, la segunda condición puede satisfacerse determinando un grupo de parámetros elegidos en forma adecuada. Para resolver el problema planteado en el apartado 44, se introdujeron como tales parámetros los coeficientes de las dos series trigonométricas que dan la variación de los momentos de borde de la placa. Se empleó el desarrollo en serie de Fourier[2] de la pendiente $\partial w/\partial N$ a lo largo del contorno, con el fin de anular esta pendiente de acuerdo con las condiciones del problema. Utilizando esta última condición podían calcularse los parámetros. Para cumplir en forma aproximada las condiciones de contorno puede aplicarse algún principio de mínimo, por ejemplo el método de mínimos cuadrados. La aplicación de un principio semejante requiere una consideración más detallada cuando deben cumplirse simultáneamente dos condiciones de contorno[3].

Cuando se utiliza una solución que únicamente cumple la ecuación diferencial del problema, resulta a veces más sencillo satisfacer las condiciones de contorno únicamente en un determinado número de puntos del contorno adecuadamente elegidos. Al elegir tales puntos deben tenerse en cuenta las condiciones de simetría cuando haya lugar a ello. Para satisfacer todas las condiciones de contorno en m puntos debemos disponer de $2m$ parámetros.

En el caso más general[4] podemos utilizar una expresión de la flecha que no cumpla ni la ecuación diferencial de la placa flexada ni las condiciones de contorno del problema. Entonces elegiremos un número de puntos n en el contorno e interiores en los que debe satisfacerse la ecuación diferencial. Entonces para obtener la solución del problema serán necesarios $2m + n$ parámetros.

Método de Weinstein[5]

En el caso específico de una placa empotrada en el contorno, podemos comenzar buscando una solución de la ecuación diferencial $\Delta\Delta w_1 = q/D$, tal que la solución sea válida para la carga dada q y para condiciones de contorno $w_1 = 0$, $\Delta w_1 = 0$, en lugar de las condiciones reales. En el apartado 24 se ha visto que este último procedimiento equivale a resolver sucesivamente dos problemas, cada uno de los cuales corresponde al equilibrio de una membrana cargada.

La solución de nuestro problema puede tomarse en la forma

$$w = w_1 + \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k \qquad (k)$$

donde a_k son constantes y φ_k funciones de x e y que se anulan en el contorno y cumplen la ecuación diferencial $\Delta\Delta x_k = 0$. La condición de contorno requerida

[1] Puede hallarse un ejemplo aclaratorio de la aplicación del método en C. B. Biezeno y R. Grammel, *Technische Dynamik*, 2.ª ed., vol. 1, pág. 147, Berlín, 1953.

[2] A. Nádai ha utilizado para cumplir una condición de contorno un sistema más general de funciones ortogonalizadas a lo largo de un borde; véase «Elastische Platten», pág. 180, Berlín, 1925.

[3] E. Berger ha contribuido notablemente en este problema; véase *op. cit.*, pág. 39.

[4] El método fue estudiado por C. J. Thorne y J. V. Atanasoff, *Iowa State Coll. J. Sci.*, volumen 14, pág. 333, 1940.

[5] A. Weinstein y D. H. Rock, *Quart. Appl. Math.*, vol. 2, pág. 262, 1944.

Librodot

$\partial w/\partial N = 0$ (donde N es la normal al contorno) puede modificarse mediante el teorema de Green, que conduce al siguiente sistema de m ecuaciones lineales que nos permite calcular los coeficientes a_k:

$$\begin{aligned} \iint \frac{q\varphi_1}{D}\,dx\,dy + \sum_{k=1}^{m} a_k \iint \Delta\varphi_1\,\Delta\varphi_k\,dx\,dy &= 0, \\ \iint \frac{q\varphi_2}{D}\,dx\,dy + \sum_{k=1}^{m} a_k \iint \Delta\varphi_2\,\Delta\varphi_k\,dx\,dy &= 0 \end{aligned} \qquad (l)$$

donde todas las integrales se extienden a toda la superficie de la placa. El método puede usarse ventajosamente cuando las condiciones de contorno $w = 0$, $\Delta w = 0$ sugieren una solución del problema mucho más sencilla que las condiciones reales $w = 0$, $\partial w/\partial N = 0$.

83. *Aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas a la flexión de placas simplemente apoyadas*

En nuestro estudio anterior (ap. 24) se ha demostrado que la ecuación diferencial de la flexión de las placas podía sustituirse por dos ecuaciones que tuvieran la forma de la ecuación de la flecha de una membrana uniformemente tensada. Hay que añadir también que esta última ecuación se resuelve con una aproximación suficiente sustituyéndola por una ecuación en diferencias finitas. Para ilustrar este método de resolución, comenzaremos por el caso de una placa larga rectangular uniformemente cargada. A una distancia muy grande de los extremos de la placa, la deformada puede considerarse cilíndrica. Entonces, tomando el eje x paralelo a la anchura de la placa, las ecuaciones diferenciales (120), toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} &= -q \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \qquad (a)$$

Estas dos ecuaciones tienen la misma forma que la ecuación de una cuerda flexible tensada y cargada transversalmente.

Sea AB (fig. 179) la deformada de la cuerda tendida por las fuerzas S y uniformemente cargada por una carga vertical de intensidad q. Para deducir la ecuación de esta curva consideramos un elemento infinitamente pequeño mn en equilibrio. Las fuerzas de tracción en los puntos m y n están dirigidas según las tangentes a la deformada, en estos puntos (fig. 179). Proyectando estas fuerzas así como la carga $q\,dx$ sobre el eje z, se obtiene

$$-S\frac{dw}{dx} + S\left(\frac{dw}{dx} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx\right) + q\,dx = 0 \qquad (b)$$

Librodot

de donde

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{q}{S} \qquad (c)$$

Esta ecuación es idéntica a las ecuaciones (a), deducidas para una placa infinitamente larga. La deformada se obtiene entonces integrando la ecuación (c), obteniendo la parábola

$$w = \frac{4\delta x\,(a - x)}{a^2} \qquad (d)$$

que satisface la condición $w = 0$ en los extremos y tiene una flecha δ en el centro.

El mismo problema puede resolverse gráficamente, sustituyendo la carga uniforme por un sistema de fuerzas concentradas $q\Delta x$ equidistantes,

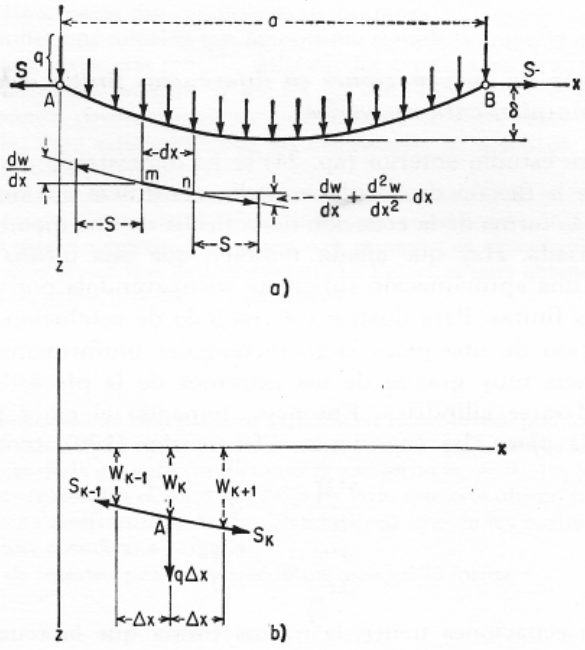


FIG. 179

siendo Δx la distancia entre dos fuerzas adyacentes, y construyendo el polígono funicular de estas fuerzas. Si A (fig. 179) es uno de los vértices de este polígono y S_{k-1}, S_k las tracciones sobre dos lados adyacentes del polígono, las proyecciones horizontales de estas fuerzas son iguales a S y la suma de sus proyecciones verticales equilibra la carga $q\Delta x$ lo que da

$$-S\frac{w_k - w_{k-1}}{\Delta x} + S\frac{w_{k+1} - w_k}{\Delta x} + q\,\Delta x = 0 \qquad (e)$$

Librodot

En esta ecuación w_{k-1}, w_k y w_{k+1}, son las ordenadas correspondientes a tres vértices consecutivos del polígono funicular y $(w_k - w_{k-1})/\Delta x$, $(w_{k+1} - w_k)/\Delta x$ son las pendientes de los dos lados adyacentes. Se puede utilizar la ecuación (e) para calcular las ordenadas consecutivas w_1, w_2, ..., w_{k-1}, w_{k-2}, ..., w_n del polígono funicular. Para ello construiremos el cuadro (f)

0	w_0	Δw_0	
Δx	w_1		
.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....
$(k-1)\,\Delta x$	w_{k-1}	Δw_{k-1}	
$k\,\Delta x$	w_k		$\Delta^2 w_k$
$(k+1)\,\Delta x$	w_{k+1}	Δw_k	
.....	.....	.....	.....

(f)

En la primera columna del cuadro entramos con las abscisas de los puntos sucesivos que dividen el vano.

En la segunda, se encuentran las ordenadas sucesivas de los vértices del polígono. Hallando las diferencias de las ordenadas consecutivas, $w_1 - w_0$, ..., $w_k - w_{k-1}$, w_{k+1}, $-w_k$, ..., se obtienen las *primeras diferencias* representadas por Δw_0, ..., Δw_{k-1}, Δw_k, ..., en la tercera columna. Las *segundas diferencias* se obtienen restando los números consecutivos de la tercera columna. Por ejemplo, para el punto k de abscisa $k\Delta x$, la segunda diferencia es

$$\Delta^2 w_k = \Delta w_k - \Delta w_{k-1}$$
$$= w_{k+1} - w_k - (w_k - w_{k-1}) = w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1} \quad (g)$$

Con ayuda de estas notaciones, la ecuación (e) se escribe

$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{q}{S} \quad (h)$$

Esta es la ecuación en diferencias finitas correspondiente a la ecuación diferencial (c) y que tiende cada vez más hacia ella cuando el número de puntos que divide el vano aumenta.

De igual forma, se pueden sustituir las ecuaciones diferenciales (a) por las ecuaciones en diferencias finitas

$$\frac{\Delta^2 M}{\Delta x^2} = -q$$
$$\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} = -\frac{M}{D} \quad (i)$$

Librodot

Para aplicar estas ecuaciones al cálculo de las flechas de una placa, dividiremos el vano de esta en ocho partes iguales, es decir, $\Delta x = 1/8a$. Las ecuaciones (i), toman la forma

$$\Delta^2 M = -\frac{qa^2}{64}$$
$$\Delta^2 w = -\frac{Ma^2}{64D}$$

Estableceremos las segundas diferencias de los puntos de división consecutivos w_1, w_2, w_3 y w_4 como indica la ecuación (g), recordando que en nuestro caso $w_0 = 0$, $M_0 = 0$ y por simetría $w_3 = w_5$, $M_3 = M_5$, obtenemos los dos grupos de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned}
M_2 - 2M_1 &= -\frac{qa^2}{64} & w_2 - 2w_1 &= -\frac{M_1 a^2}{64D} \\
M_3 - 2M_2 + M_1 &= -\frac{qa^2}{64} & w_3 - 2w_2 + w_1 &= -\frac{M_2 a^2}{64D} \\
M_4 - 2M_3 + M_2 &= -\frac{qa^2}{64} & w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\frac{M_3 a^2}{64D} \\
M_3 - 2M_4 + M_3 &= -\frac{qa^2}{64} & w_3 - 2w_4 + w_3 &= -\frac{M_4 a^2}{64D}
\end{aligned} \qquad (j)$$

Resolviendo el primer grupo, tenemos los valores de M siguientes:

$$M_1 = \frac{7}{2}\frac{qa^2}{64} \qquad M_2 = 6\frac{qa^2}{64} \qquad M_3 = \frac{15}{2}\frac{qa^2}{64} \qquad M_4 = 8\frac{qa^2}{64} \qquad (k)$$

Estos valores coinciden exactamente con los de los momentos flectores de una franja uniformemente cargada, calculados por la ecuación conocida

$$M = \frac{qa}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

Sustituyendo los valores (k) de los momentos en el segundo grupo de las ecuaciones (j), se obtiene

$$\begin{aligned}
w_2 - 2w_1 &= -\tfrac{7}{2}N \\
w_3 - 2w_2 + w_1 &= -6N \\
w_4 - 2w_3 + w_2 &= -\tfrac{15}{2}N \\
w_3 - 2w_4 + w_3 &= -8N
\end{aligned}$$

donde

$$N = \frac{qa^4}{64^2 D}$$

Resolviendo estas ecuaciones, se obtienen en los puntos de división, las flechas siguientes:

$$w_1 = 21N \qquad w_2 = 38{,}5N \qquad w_3 = 50N \qquad w_4 = 54N \qquad (l)$$

Librodot

Los valores exactos de estas flechas calculados mediante la ecuación conocida

$$w = \frac{qx}{24D}(a^3 - 2ax^2 + x^3)$$

de la flecha de una franja uniformemente cargada de anchura a a título de comparación son:

$$w_1 = 20{,}7N \qquad w_2 = 38N \qquad w_3 = 49{,}4N \qquad w_4 = 53{,}3N$$

Se ve que dividiendo la luz en ocho partes, el error en el valor de la flecha máxima, obtenida por las ecuaciones en diferencias finitas (i) es del orden de 1,25 %. Aumentando el número de divisiones, la exactitud obtenida será todavía mayor, pero esto exige más trabajo puesto que el número de ecuaciones del sistema (j) aumenta con el número de divisiones (fig. 180).

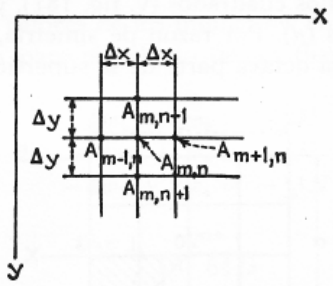


FIG. 180

Consideremos ahora una placa rectangular de longitud finita. En este caso, las flechas son funciones de x e y, y las ecuaciones (a) deben ser sustituidas por las ecuaciones generales (120). Sustituyendo estas últimas por las ecuaciones en diferencias finitas, se han de tener en cuenta las diferencias correspondientes en las variaciones de las dos coordenadas x e y. Indicando sobre la figura 180, la notación utilizada para designar los puntos adyacentes, se utilizarán para las primeras diferencias en un punto A_{mn} de coordenadas $m\Delta x$ y $n\Delta y$ las siguientes notaciones

$$\Delta_x w_{m-1,n} = w_{mn} - w_{m-1,n} \qquad \Delta_x w_{mn} = w_{m+1,n} - w_{mn}$$
$$\Delta_y w_{m,n-1} = w_{mn} - w_{m,n-1} \qquad \Delta_y w_{mn} = w_{m,n+1} - w_{mn}$$

Conociendo las primeras diferencias, se calculan las tres clases de segundas diferencias, como sigue:

$$\begin{aligned}
\Delta_{xx} w_{mn} &= \Delta_x w_{mn} - \Delta_x w_{m-1,n} = w_{m+1,n} - w_{mn} - (w_{mn} - w_{m-1,n}) \\
&= w_{m+1,n} - 2w_{mn} + w_{m-1,n} \\
\Delta_{yy} w_{mn} &= \Delta_y w_{mn} - \Delta_y w_{m,n-1} = w_{m,n+1} - w_{mn} - (w_{mn} - w_{m,n-1}) \\
&= w_{m,n+1} - 2w_{mn} + w_{m,n-1} \\
\Delta_{xy} w_{mn} &= \Delta_y w_{mn} - \Delta_y w_{m-1,n} = w_{m,n+1} - w_{mn} - (w_{m-1,n+1} - w_{m-1,n}) \\
&= w_{m,n+1} - w_{mn} - w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n}
\end{aligned} \qquad (m)$$

Librodot

Con estas notaciones las ecuaciones diferenciales (120) se sustituyen por las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{xx}M}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}M}{\Delta y^2} &= -q \\ \frac{\Delta_{xx}w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_{yy}w}{\Delta y^2} &= -\frac{M}{D} \end{aligned} \qquad (n)$$

En el caso de una placa rectangular simplemente apoyada, M y w son nulos en el contorno y pueden resolverse sucesivamente las ecuaciones (n) sin ninguna dificultad.

Para ilustrar el método del cálculo de momentos y flechas, consideremos el caso muy simple de una placa cuadrada uniformemente cargada (fig. 181). Se obtiene una fuerte aproximación de M y w, dividiendo la placa en dieciséis pequeños cuadrados (v. fig. 181), y tomando $\Delta x = \Delta y = a/4$ en las ecuaciones (n). Por razón de simetría, es evidente que basta hacer los cálculos para la octava parte de la superficie de la placa, es decir

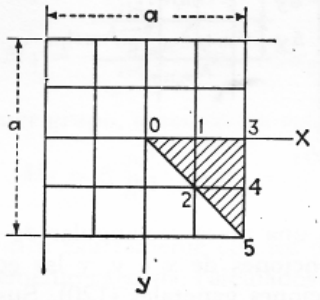


FIG. 181

el triángulo rayado en la figura. Sobre esta área no se hacen los cálculos más que para los tres puntos 0, 1, 2, para los que M y w son distintos de cero. Estos últimos valores son nulos en los puntos 3, 4, 5 debido a las condiciones de contorno. Comenzando por la primera de las ecuaciones (n) y considerando el punto 0 centro de la placa, se encuentran utilizando las ecuaciones (m) y las condiciones de simetría, los valores siguientes de las segundas diferencias en este punto:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}M_0 &= 2M_1 - 2M_0 \\ \Delta_{yy}M_0 &= 2M_1 - 2M_0 \end{aligned}$$

en las que M_1 y M_0 son los valores de M en 1 y 0. De igual forma para 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx}M_1 &= M_3 - 2M_1 + M_0 = -2M_1 + M_0 \\ \Delta_{yy}M_1 &= 2M_2 - 2M_1 \end{aligned}$$

Librodot

Las segundas diferencias en el punto 2 se calculan de la misma manera. Sustituyendo estas expresiones de las segundas diferencias en la primera de las ecuaciones (n), se obtiene para los puntos 0, 1 y 2, las tres ecuaciones siguientes:

$$4M_1 - 4M_0 = -\frac{qa^2}{16}$$
$$2M_2 - 4M_1 + M_0 = -\frac{qa^2}{16}$$
$$-4M_2 + 2M_1 = -\frac{qa^2}{16}$$

de donde se deduce

$$M_0 = \frac{9}{2}\frac{qa^2}{64} \qquad M_1 = \frac{7}{2}\frac{qa^2}{64} \qquad M_2 = \frac{11}{4}\frac{qa^2}{64}$$

Sustituyendo estos valores de los momentos en la segunda de las ecuaciones (n), se obtienen para el cálculo de las flechas w_0, w_1, w_2, las tres ecuaciones

$$4w_1 - 4w_0 = -\tfrac{9}{2}N$$
$$2w_2 - 4w_1 + w_0 = -\tfrac{7}{2}N$$
$$-4w_2 + 2w_1 = -\tfrac{11}{4}N$$

donde

$$N = \frac{qa^4}{16 \cdot 64D}$$

De estas ecuaciones obtenemos para las flechas los valores

$$w_0 = \tfrac{66}{16}N \qquad w_1 = \tfrac{48}{16}N \qquad w_2 = \tfrac{35}{16}N$$

El valor de la flecha en el centro es

$$w_0 = \frac{66}{16}N = \frac{66qa^4}{16 \cdot 16 \cdot 64D} = 0{,}00403\,\frac{qa^4}{D}$$

Comparando este valor con $0{,}00406qa^4/D$ dado en la tabla 8, se llega a que el error de la flecha calculada es inferior al 1 %. Para el momento flector en el centro hallamos

$$M_x = M_y = \frac{M_0(1+\nu)}{2} = \frac{1{,}3}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{qa^2}{64} = 0{,}0457qa^2$$

inferior en 4,5 % al valor exacto $0{,}0479qa^2$.

Consta que en este caso un pequeño número de subdivisiones de la placa permite una exactitud que satisface las aplicaciones prácticas. Doblando el número de subdivisiones, es decir $\Delta x = \Delta y = a/8$, el valor del momento flector difiere en el 1 % del valor exacto.

Librodot

Consideremos la flexión de una placa oblicua simplemente apoyada, que soporta una carga uniforme de intensidad q (fig. 182). Las subdivisiones en este caso son $\Delta x = b/6$ y $\Delta y = b/3$.*

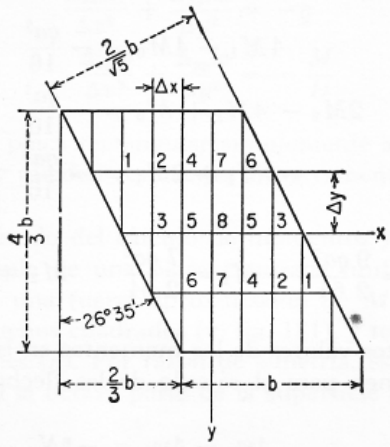


FIG. 182

En consecuencia la primera de las ecuaciones (n) puede escribirse en la forma

$$4\Delta_{xx}M + \Delta_{yy}M = -\frac{qb^2}{9} \qquad (o)$$

Apliquemos sucesivamente esta ecuación en los puntos 1 al 8 y utilicemos las expresiones (m) de las diferencias, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{aligned}
-10M_1 + 4M_2 &= -\frac{qb^2}{9} \\
4M_1 - 10M_2 + M_3 + 4M_4 &= -\frac{qb^2}{9} \\
M_2 - 10M_3 + 4M_5 &= -\frac{qb^2}{9} \\
4M_2 - 10M_4 + M_5 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9} \\
4M_3 + M_4 - 10M_5 + M_6 + 4M_8 &= -\frac{qb^2}{9} \\
M_5 - 10M_6 + 4M_7 &= -\frac{qb^2}{9} \\
4M_4 + 4M_6 - 10M_7 + M_8 &= -\frac{qb^2}{9} \\
8M_5 + 2M_7 - 10M_8 &= -\frac{qb^2}{9}
\end{aligned} \qquad (p)$$

Librodot

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} M_1 &= 0{,}29942\frac{qb^2}{9} & M_5 &= 0{,}66191\frac{qb^2}{9} \\ M_2 &= 0{,}49854\frac{qb^2}{9} & M_6 &= 0{,}39387\frac{qb^2}{9} \\ M_3 &= 0{,}41462\frac{qb^2}{9} & M_7 &= 0{,}56920\frac{qb^2}{9} \\ M_4 &= 0{,}59329\frac{qb^2}{9} & M_8 &= 0{,}74337\frac{qb^2}{9} \end{aligned} \qquad (q)$$

La segunda de las ecuaciones (m) toma entonces la forma

$$4\Delta_{xx}w + \Delta_{yy}w = -\frac{Mb^2}{9D} \qquad (r)$$

teniendo en cuenta los valores (q), esta ecuación nos da el segundo grupo de ecuaciones

$$\begin{aligned} -10w_1 + 4w_2 &= -0{,}29942N \\ 4w_1 - 10w_2 + w_3 + 4w_4 &= -0{,}49854N \\ w_2 - 10w_3 + 4w_5 &= -0{,}41462N \\ 4w_2 - 10w_4 + w_5 + 4w_7 &= -0{,}59329N \\ 4w_3 + w_4 - 10w_5 + w_6 + 4w_8 &= -0{,}66191N \\ w_5 - 10w_6 + 4w_7 &= -0{,}39387N \\ 4w_4 + 4w_6 - 10w_7 + w_8 &= -0{,}56920N \\ 8w_5 + 2w_7 - 10w_8 &= -0{,}74337N \end{aligned} \qquad (s)$$

donde

$$N = \frac{qb^4}{81D}$$

Lo que da las flechas

$$\begin{aligned} w_1 &= 0{,}13176N & w_5 &= 0{,}38549N \\ w_2 &= 0{,}25455N & w_6 &= 0{,}20293N \\ w_3 &= 0{,}22111N & w_7 &= 0{,}31249N \\ w_4 &= 0{,}32469N & w_8 &= 0{,}44523N \end{aligned} \qquad (t)$$

Debe notarse que la integración de la ecuación diferencial de la placa por métodos analíticos tendría, en este caso, dificultades considerables.

Para calcular los momentos en el punto central 8, se utilizan las expresiones (101) y (102), en las que las primeras derivadas están sustituidas por las diferencias correspondientes. Así pues utilizando[1] las expresiones (m), los valores (t) de las flechas y para $\nu = 0{,}2$, obtenemos

$$(M_x)_8 = -D\left(\frac{w_5 - 2w_8 + w_5}{\Delta x^2} + \nu\frac{w_7 - 2w_8 + w_7}{\Delta y^2}\right) = 0{,}0590qb^2$$

$$(M_y)_8 = -D\left(\frac{w_7 - 2w_8 + w_7}{\Delta y^2} + \nu\frac{w_5 - 2w_8 + w_5}{\Delta x^2}\right) = 0{,}0401qb^2$$

$$(M_{xy})_8 = (1-\nu)D\frac{w_4 - w_6 - w_6 + w_4}{4\Delta x\,\Delta y} = 0{,}0108qb^2$$

[1] Véanse también los diagramas de las figuras 184, para el caso particular $\Delta x = \Delta y$.

Librodot

El círculo de Mohr (fig. 183) da[1] entonces en el punto 8, los momentos principales siguientes:

$$M_{máx} = \frac{M_x + M_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} = 0{,}0639qb^2$$

$$M_{mín} = \frac{M_x + M_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} = 0{,}0352qb^2$$

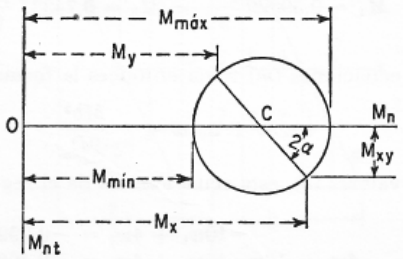


FIG. 183

La dirección de las tensiones debidas a estos momentos, está dada respecto a los ejes de coordenadas x, y por

$$\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2M_{xy}}{M_x - M_y} = 24°25'$$

De la figura 182 se deduce que las tensiones debidas a $M_{máx}$ en el centro actúan casi exactamente en la dirección del vano menor de la placa.

La planta de la placa de la figura 182 era tal que se podía utilizar una muralla rectangular de subdivisiones constantes Δx y Δy. En el caso más general, para el análisis de una losa oblicua se debe utilizar una malla triangular[2].

Se puede aplicar el método de diferencias finitas a placas de bordes empotrados o libres y finalmente a las placas con condiciones de contorno mixtas[3]. Puesto que en el caso general el valor de M en el contorno no es fijo su utilización es menos ventajosa y las flechas w se calculan directamente mediante una serie de ecuaciones de diferencias finitas equivalentes a la ecuación diferencial $\Delta\Delta w = q/D$ de la placa flexada. Para mayor comodidad la diferencia finita equivalente al operador $\Delta\Delta(...)$ está representada en la figura 184 con otros operadores útiles. El diagrama está fundado en la hipótesis $\Delta x = \Delta y = \lambda$. Cada número debe multiplicarse por el símbolo w_k que representa la flecha en el punto k correspondiente y la suma de estos productos debe estar dividida por la expresión dada en el pie.

[1] Véase la diferencia de notación de las figuras 183 y 22. Los momentos principales de la figura 183 se llaman $M_{máx}$ y $M_{mín}$. Nótese también que en ambos diagramas si el punto se desplaza sobre el círculo en el sentido de las agujas del reloj, la normal a la sección correspondiente se desplazará en el mismo sentido.

[2] V. P. Jensen, en *Univ. Illinois Bull.*, 332, 1941, utiliza con gran profusión estas mallas y de esta revista se ha tomado el anterior ejemplo numérico.

[3] Se encuentran varios ejemplos de esta clase en la obra de H. Marcus, *Die Theorie elastischer Gewebe*, 2.ª ed., Berlín, 1938; véase también N. J. Nielsen, «Bestemmelse of Spaendinger i Plader», Copenhague, 1920.

Librodot

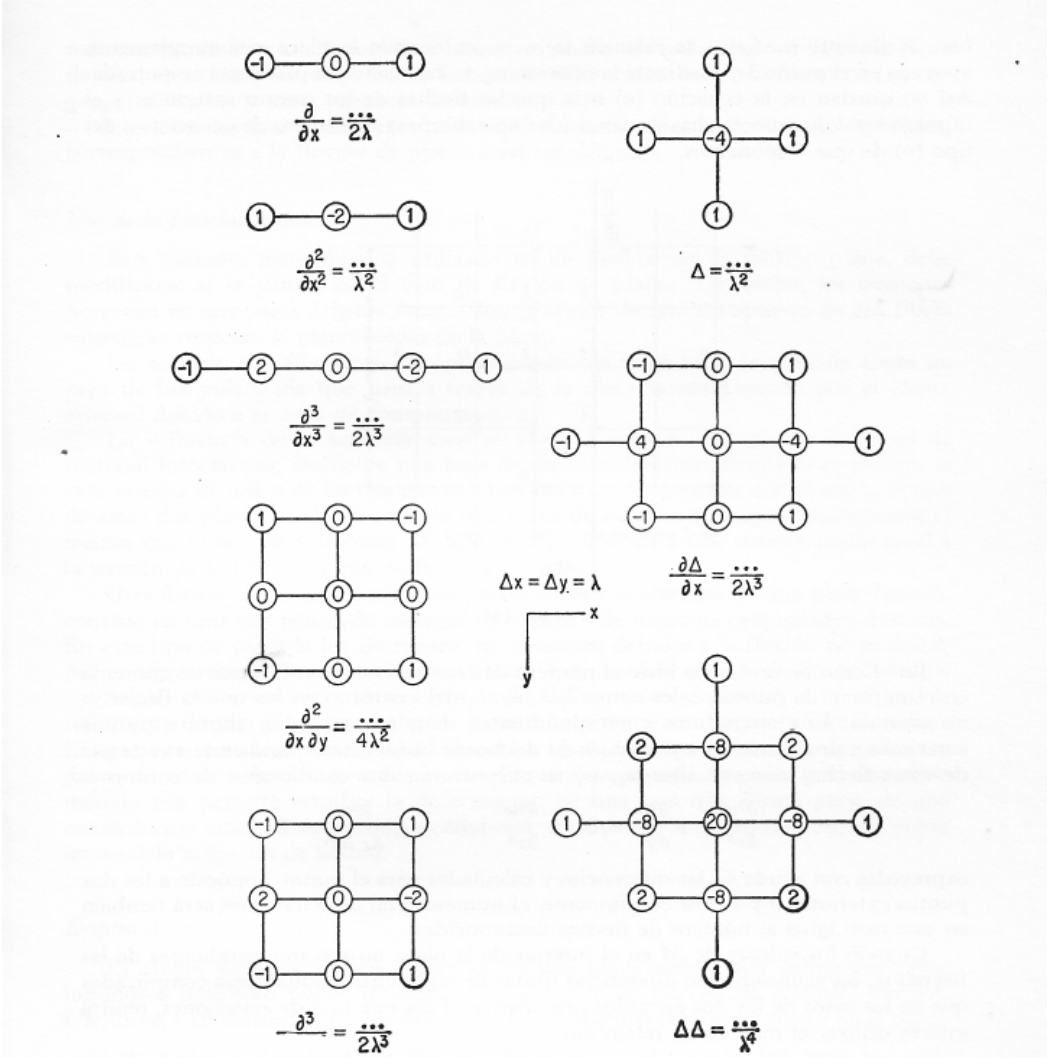


FIG. 184

Para formular las condiciones de contorno para un borde en el que las flechas son nulas establecemos la ecuación para un punto interior 7, próximo al borde (fig. 185). Aplicando el operador $\Delta\Delta(...)$ tenemos

$$[w_1 + w_5 + w_9 + w_{13} + 2(w_2 + w_4 + w_{10} + w_{12}) - 8(w_3 + w_6 + w_8 + w_{11}) + 20w_7]\frac{1}{\lambda^4} = \frac{q_7}{D} \quad (u)$$

en la que $w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Debemos eliminar ahora la flecha w_1 en el punto ficticio 1, obtenido prolongando la malla más allá del contorno de la placa. Esto se

Librodot

hace fácilmente mediante la relación $w_1 = -w_7$ cuando la placa está simplemente apoyada en el punto 3 y mediante la relación $w_1 = w_7$ cuando la placa está empotrada. Así no quedan en la ecuación (n) más que las flechas de los puntos interiores y el número total de estas flechas desconocidas no sobrepasa el número de ecuaciones del tipo (n) de que disponemos.

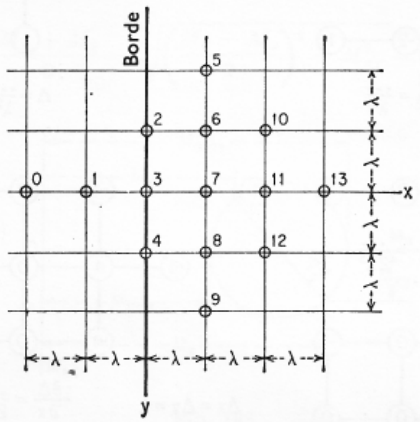


FIG. 185

En el caso de un borde libre el número de las ecuaciones en diferencias aumenta en el número de puntos, tales como 2, 3, 4, ..., del contorno en los que la flecha ya no es nula. Los operadores correspondientes $\Delta\Delta w$ se extienden ahora a puntos exteriores a una distancia λ y también 2λ del borde libre. Correspondiendo a cada par de estas flechas desconocidas w_0, w_1 se encontrarán dos condiciones de contorno:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial y^2} = 0$$

expresadas con ayuda de las diferencias y calculadas para el punto 3 opuesto a los dos puntos exteriores 0 y 1. Por consiguiente, el número total de ecuaciones será también en este caso igual al número de flechas desconocidas.

Cuando los valores de M en el interior de la placa no son independientes de las flechas w, las ecuaciones en diferencias finitas de las flechas resultan más complicadas que en los casos de los dos ejemplos precedentes. Para este tipo de ecuaciones, tendrá interés utilizar el método de relajación[1].

84. Métodos experimentales

Para placas de forma irregular, de espesor variable o aligeradas por numerosos orificios es más eficaz el empleo de métodos experimentales de investigación que los

[1] Respecto a este método debido a R. V. Southwell, véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2.ª ed., pág. 468, Nueva York, 1951. Véase también F. S. Shaw, «An Introduction to Relaxation Methods», Dover Publication, Nueva York, 1953, donde se encuentra más bibliografía. H. Liebman, «Die angenäherte Enmittlung hamonischer Funktionen und Komformer Abbildungen», *Sitzber. München Akad.*, pág. 385, 1918, ha desarrollado otro método de aproximaciones sucesivas utilizando las ecuaciones en diferencias finitas. La convergencia de este método fue estudiada por F. Wolf, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 118, 1926, y por R. Courant, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 6, pág. 322, 1926. Para un método perfeccionado, véase también R. Zurmühl, *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 37, pág. 1, 1957.

Librodot

métodos puramente analíticos. Para la determinación de la deformación de una placa flexada, se utilizan los dispositivos habituales tales como deformabilímetros (strain-gauge) eléctricos y extensómetros de todo tipo[1].

Los métodos brevemente reseñados aquí son apropiados a condiciones especiales, correspondientes a la flexión de placas elásticas delgadas.

Uso de la fotoelasticidad[2]

Este método, generalmente utilizado en los problemas de tensión plana, debe modificarse si se utiliza en el caso de flexión de placas. De hecho, las tensiones normales en una placa delgada flexada son iguales y de sentido opuesto en dos fibras simétricas respecto al plano medio de la placa.

De acuerdo con ello, el efecto óptico producido en la zona de tracción sobre un rayo de luz polarizada que pasa a través de la placa queda anulado por el efecto opuesto debido a la zona de comprensión.

La influencia de la segunda zona se elimina uniendo dos placas idénticas de material fotoelástico, mediante una hoja de metal reflectante. Para ello se plantea la cara interna de una o de las dos placas[3]. Los cálculos demuestran que el efecto óptico de estas dos placas unidas formando una placa de espesor h es aproximadamente el mismo que el de una sola placa de espesor $h/2$ sometida a una tensión plana igual a la tensión de la fibra extrema de la placa flexada.

Otra forma[4] de hacer efectivas las propiedades fotoelásticas de una placa flexada, consiste en unir dos placas de material fotoelástico de distintas propiedades elásticas. En este tipo de placa la ley de reparto de tensiones debidas a la flexión no es lineal, por consiguiente al flexar produce un efecto óptico sobre un haz de luz polarizada.

Según un tercer método se unen hojas de materia fotoelástica a la superficie reflectante de una placa de cualquier material elástico y cualesquiera dimensiones[5]. El comportamiento de estas hojas respecto a un haz de luz polarizada da todos los datos relativos a la deformación en las fibras extremas de la placa probada. Este método nos permite estudiar la deformación de una losa que forma parte de una construcción existente, sometida a carga real, en lugar de limitarnos al estudio sobre un modelo reducido de la losa.

Empleo de luz reflejada[6]

El efecto de la superficie reflexiva de una placa deformada sobre dos rayos luminosos próximos puede utilizarse para calcular las curvaturas $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$, $\partial^2 w/\partial x\,\partial y$, y en consecuencia los valores de los momentos flectores y torsor de la placa.

[1] W. Andrä, F. Leonhard y R. Krieger, *Bauingenieur*, vol. 33, pág. 107, 1958, han utilizado un método electromecánico para medir las curvaturas de una losa flexada.

[2] Véase, por ejemplo, Timoshenko y Goodier, *op. cit.*, pág. 131.

[3] Véase J. N. Goodier y G. H. Lee, *J. Appl. Mechanics*, vol. 8, pág. A-27, 1941, y M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, pág. 281, 1952.

[4] Véase H. Favre, *Schweiz. Bauztg.*, 1950. Respecto a la aplicación del método a una placa cantilever de espesor variable, véase H. Schwieger y G. Haberland, *Z. angew. Math. Mech.*, volumen 36, pág. 287, 1956.

[5] Este método de *fototensión* se debe en su principio a A. Menager, 1930, pero sus aplicaciones prácticas no se han llevado a cabo hasta fechas más recientes; véase, por ejemplo, F. Zandman y M. R. Wood, *Prod. Eng.*, setiembre 1956. Respecto a la aplicación a las placas del llamado método de *congelación*, véase D. C. Drucker, *J. Appl. Mechanics*, vol. 9, página A-161, 1942.

[6] Respecto a la teoría y aplicación del método a diversos problemas de flexión de placas, véase M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, 1940 y 1952. Véase también G. Bowen, *Eng. News-Record*, vol. 143, pág. 70, 1949.

Librodot

Con el mismo fin puede utilizarse la distorsión de una malla luminosa rectangular proyectada sobre la superficie inicialmente plana de la placa. Los resultados obtenidos por este procedimiento son especialmente interesantes para placas, sobre cimentación elástica, cuyas propiedades mecánicas no pueden expresarse perfectamente en forma analítica.

Método de interferencia

Similar al método clásico utilizado para la determinación del módulo de Poisson de vigas, el método de interferencia se ha aplicado también a la medición de las flechas de una placa flexada[1].

Analogía entre tensión plana y flexión de placas[2]

Existe una analogía entre la flecha de una placa, regida por la ecuación diferencial $\Delta\Delta w = 0$, en el caso particular de que actúen únicamente fuerzas de borde, y la función de Airy φ que satisface la ecuación $\Delta\Delta\varphi = 0$. Mientras la función w da las curvaturas de la deformada, la función de Airy da las tensiones $\sigma_x = \partial^2\varphi/\partial y^2$, $\sigma_y = \partial^2\varphi/\partial x^2$ y $\tau_{xy} = -\partial^2\varphi/\partial x\,\partial y$ del estado plano en el sólido elástico. Si el contorno $f(x,y) = 0$ es el mismo en ambos casos, podemos poner

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K\sigma_y \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K\sigma_x \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = -K\tau_{xy}$$

en las que K es una constante arbitraria tal que las curvaturas sean pequeñas.

Las flechas medidas w pueden usarse para el cálculo de las tensiones en el estado de tensión plana y viceversa si se cumplen ciertas condiciones de analogía en los contornos de la placa[3] y el sólido elástico[3].

[1] Véase R. Landwehr y G. Grabert, *Ingr.-Arch.*, vol. 18, pág. 1, 1950.

[2] Establecida por K. Wieghardt, *Mitt. Forschungsarb. Ingenieurwesens*, vol. 49, 1908. Para una explicación más exacta de la analogía, véase H. Schaefer, *Abhandl. Braunschweig. wiss. Ges.*, vol. 8, pág. 142, 1956.

[3] Una formulación sencilla de estas condiciones se debe a M. Dantu, *Ann. ponts et chaussées*, página 386, 1952. Respecto a métodos basados en analogía con fenómenos eléctricos, véase R. H. MacNeal, *J. Appl. Mechanics*, vol. 18, pág. 59, 1951, y K. Wotruba, *Czechoslov. J. Phys.*, vol. 2, pág. 56, 1953. Puede encontrarse más información sobre diversos métodos experimentales en L. Föppl y E. Mönch, «Praktische Spannungsoptik», 2.ª ed., Berlín, 1959.

Librodot